# ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ
## Матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь

Лінійна алгебра та аналітична геометрія · І курс

## 1. Теоретичні відомості

Систему $n$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими можна записати в матричному вигляді

$$AX = B, \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $\det A \neq 0$, матриця $A$ має обернену $A^{-1}$ і система має єдиний розв’язок:

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

Обернену матрицю знаходимо через **алгебраїчні доповнення**:

$$M_{ij} = \det A^{(ij)}, \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де $A^{(ij)}$ отримують викресленням $i$-го рядка та $j$-го стовпця. Матриця $\widetilde{A} = (A_{ij})$ називається матрицею алгебраїчних доповнень. Тоді

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \widetilde{A}^{\mathsf{T}}.}$$

**Алгоритм:** скласти $A$ та $B$; перевірити $\det A \neq 0$; знайти $A^{-1}$; обчислити $X = A^{-1}B$; перевірити $AX = B$. Якщо $\det A = 0$, формула оберненої матриці не застосовується: система може бути несумісною або мати нескінченно багато розв’язків.

## 2. Системи двох рівнянь із двома невідомими

**Приклад 1.** Розв’язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

**Розв’язання.** Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Для матриці другого порядку обернена матриця обчислюється за формулою

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $2\cdot 2+3=7$, $2+3=5$.

**Відповідь.** $x=2,\ y=3$.

**Приклад 2.** Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x+2y=8,\\ x+y=3. \end{cases}$$

**Розв'язання.** $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$, $\det A=3-2=1$. Тоді

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $3\cdot 2+2\cdot 1=8$, $2+1=3$.

**Відповідь.** $x=2,\ y=1$.

## 3. Системи трьох рівнянь із трьома невідомими

**Приклад 3.** Розв'язати систему, знайшовши обернену матрицю за допомогою алгебраїчних доповнень:

$$\begin{cases} x+y+z=2,\\ x+2y+z=4,\\ 2x+y+3z=1. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Маємо

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Визначник матриці:

$$\det A=1(6-1)-1(3-2)+1(1-4)=5-1-3=1.$$

Знайдемо всі дев'ять алгебраїчних доповнень:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3,$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1,$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Тому

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-3\\-2&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\frac{1}{1}\widetilde{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10-8-1\\-2+4\\-6+4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $1+2-1=2$; $1+4-1=4$; $2+2-3=1$.

**Відповідь.** $x=1,\ y=2,\ z=-1$.

**Приклад 4.** Розв'язати систему з нетрикутною матрицею коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2x+y+z=7,\\ x+2y+z=8,\\ x+y+3z=12. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Записуємо

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}7\\8\\12\end{pmatrix}.$$

Обчислюємо визначник:

$$\det A=2(6-1)-(3-1)+(1-2)=10-2-1=7.$$

Алгебраїчні доповнення обчислюємо як визначники другого порядку зі знаками $(-1)^{i+j}$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1,$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3.$$

Отже,

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&5&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{7}\widetilde{A}^{\mathsf{T}}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&5&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}35-16-12\\-14+40-12\\-7-8+36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $2+2+3=7$, $1+4+3=8$, $1+2+9=12$.

**Відповідь.** $x=1,\ y=2,\ z=3$.

## 4. Система чотирьох рівнянь із чотирма невідомими

**Приклад 5.** Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_4=8,\\ x_1+3x_2+x_3=10,\\ x_2+2x_3+x_4=12,\\ x_1+x_3+3x_4=16. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Маємо

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&3&1&0\\0&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}8\\10\\12\\16\end{pmatrix}.$$

Розкладаємо визначник за першим рядком:

$$\begin{aligned}\det A &= 2\begin{vmatrix}3&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&1&3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&3&1\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}\\ &= 2\cdot 12 - 6 - 6 = 12.\end{aligned}$$

Для кожного елемента $a_{ij}$ знаходимо мінор третього порядку $M_{ij}$ і доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Наприклад,

$$\begin{aligned}A_{11} &= \begin{vmatrix}3&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{vmatrix} = 12,\\ A_{12} &= -\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&1&3\end{vmatrix} = -6,\\ A_{22} &= \begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&3\end{vmatrix} = 8,\\ A_{44} &= \begin{vmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{vmatrix} = 8.\end{aligned}$$

Аналогічно обчислюємо решту алгебраїчних доповнень. Отримуємо

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix}12&-6&6&-6\\-6&8&-6&4\\6&-6&12&-6\\-6&4&-6&8\end{pmatrix}.$$

Матриця $\widetilde{A}$ у цьому прикладі симетрична, отже $\widetilde{A}^{\mathsf{T}} = \widetilde{A}$. За формулою оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\widetilde{A}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}12&-6&6&-6\\-6&8&-6&4\\6&-6&12&-6\\-6&4&-6&8\end{pmatrix}.$$

Тепер множимо:

$$X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}12&-6&6&-6\\-6&8&-6&4\\6&-6&12&-6\\-6&4&-6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\10\\12\\16\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}12\\24\\36\\48\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $2+2+4=8$, $1+6+3=10$, $2+6+4=12$, $1+3+12=16$.

**Відповідь.** $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$.

## 5. Домашнє завдання

Розв’язати наведені системи **матричним методом**. Для кожної записати $AX = B$, обчислити $\det A$, знайти $A^{-1}$, виконати множення $A^{-1}B$ і перевірити розв’язок підстановкою.

1. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + y = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 2y + z = 8, \\ 2x + y + 3z = 13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ y + z = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_2 + x_3 = 7, \\ x_3 + x_4 = 9, \\ x_4 = 5. \end{cases}$

**Відповіді для самоперевірки:**

1. $x = 2$, $y = 1$.
2. $x = 2$, $y = 1$.
3. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
4. $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$.
5. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$.