ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11
ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ І ФУНКЦІЙ

Вища математика · I курс економічних спеціальностей

1. Короткі теоретичні відомості

Границя послідовності. Якщо $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Для раціональних виразів від n зручно поділити чисельник і знаменник на найбільший степінь n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \ (k>0), \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ (|q|<1), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Границя функції. Для усунення невизначеності $\frac{0}{0}$ використовують розкладання на множники, скорочення, домноження на спряжений вираз. Для $\frac{\infty}{\infty}$ у раціональних функціях ділять на найвищий степінь змінної.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Еквівалентні нескінченно малі при $t \to 0$:

$$\sin t \sim t, \quad \tan t \sim t, \quad 1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}, \quad \ln(1+t)\sim t, \quad e^t-1\sim t.$$

Важливо: еквівалентності застосовують до добутків і часток; заміна окремих доданків у різниці без обґрунтування може дати неправильний результат.

2. Обчислення границь числових послідовностей

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n+7}{2n^2+5n-1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+7}{2n^2+5n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n^2+2}$.

Розв'язання. Степінь знаменника більший за степінь чисельника:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-2n}{n^2+4}$.

Розв'язання. Винесемо найбільші степені:

$$\frac{5n^3-2n}{n^2+4} = n\,\frac{5-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Відповідь: $+\infty$.

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \le (-1)^n \le 1$, маємо

$$-\frac{1}{n+1} \le \frac{(-1)^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Обидві крайні послідовності прямують до нуля. За теоремою про стискання шукана границя дорівнює нулю.

Відповідь: 0.

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

Розв'язання. Це геометрична послідовність зі знаменником $q = \frac{3}{5}$, причому $|q| < 1$. Отже, $q^n \to 0$.

Відповідь: 0.

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{3n}$.

Розв'язання. Застосуємо другу визначну границю:

$$\left(1+\frac{4}{n}\right)^{3n} = \left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{12} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{12}.$$

Відповідь: e^{12}.

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$.

Розв'язання. Домножимо на спряжений вираз:

$$\sqrt{n^2+5n}-n = \frac{(n^2+5n)-n^2}{\sqrt{n^2+5n}+n} = \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1} \longrightarrow \frac{5}{2}.$$

Відповідь: $\frac{5}{2}$.

3. Границі функцій: невизначеність $\frac{0}{0}$

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Розв'язання. Розкладемо різницю квадратів:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

Розв'язання. Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4}$.

Приклад 10. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+5x}-1)(\sqrt{1+5x}+1)}{x(\sqrt{1+5x}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+5x}+1}=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{5}{2}$.

Приклад 11. Обчислити $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Розв'язання. Скористаємося тотожністю $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4.$$

Відповідь: 4.

4. Границі при нескінченності та односторонні границі

Приклад 12. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-5}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник на x^3:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}}=\frac{7}{2}.$$

Відповідь: $\frac{7}{2}$.

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^3-2}$.

Розв'язання. Степінь знаменника більший, тому

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^3}}=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 14. Знайти односторонні границі функції $f(x) = \frac{|x|}{x}$ у точці $x = 0$.

Розв'язання. Для $x < 0$ маємо $|x| = -x$, тому $f(x) = -1$. Для $x > 0$ маємо $f(x) = 1$. Отже,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Оскільки односторонні границі різні, двостороння границя не існує.

Відповідь: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$

5. Перша визначна границя та еквівалентності

Приклад 15. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(7x)}{3x}$.

Розв'язання. Виділимо стандартне відношення $\frac{\sin t}{t}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{3x} = \frac{7}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{7x} = \frac{7}{3}.$$

Відповідь: $\frac{7}{3}$.

Приклад 16. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(4x)}{x^2}$.

Розв'язання. За тотожністю $1 - \cos(2t) = 2\sin^2 t$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(2x)}{x^2} = 8 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^2 = 8.$$

Відповідь: 8.

Приклад 17. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\sin(5x)}$.

Розв'язання. При $x \to 0$ маємо $\tan(3x) \sim 3x$ та $\sin(5x) \sim 5x$. Тому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

Приклад 18. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 6x)}{e^{2x} - 1}$.

Розв'язання. Використаємо $\ln(1 + t) \sim t$ та $e^t - 1 \sim t$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{6x}{2x} = 3.$$

Відповідь: 3.

6. Друга визначна границя

Приклад 19. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$.

Розв'язання. Перепишемо степінь, виділяючи вираз другої визначної границі:

$$(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^6 \xrightarrow[x\to 0]{} e^6.$$

Відповідь: e^6.

Приклад 20. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^x$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{x+5}{x+2} = 1 + \frac{3}{x+2}$, то

$$\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^x = \left[\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{3}}\right]^{\frac{3x}{x+2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^3.$$

Відповідь: e^3.

7. Економічний приклад

Приклад 21. Підприємство має сукупні витрати $C(q) = 1200 + 30q + 0{,}2q^2$ грн на виготовлення q одиниць продукції. Знайти границю середніх витрат при $q \to +\infty$.

Розв'язання. Середні витрати дорівнюють

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1200}{q} + 30 + 0{,}2q.$$

При $q \to +\infty$ перший доданок прямує до нуля, а останній необмежено зростає. Отже, $AC(q) \to +\infty$: за цією моделлю середні витрати не стабілізуються, а зростають.

Відповідь: $+\infty$.

8. Завдання для самостійного розв'язування

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+3n-1}{2n^2-n+4}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{5n}$.
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+8x}-1}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(9x)}{2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+2x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^3+1}{x^3-7x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$.

Відповіді для перевірки:

1) 3; 2) 0; 3) e^{10}; 4) 10; 5) 4.
6) $\frac{9}{2}$; 7) 18; 8) $\frac{5}{2}$; 9) 4; 10) e^{12}.