ЛЕКЦІЯ № 6
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Вища математика · I курс економічних спеціальностей

1. Поняття похідної. Правила диференціювання

1.1. Означення та позначення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0. Надамо аргументу приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді приріст функції дорівнює $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. **Означення.** Похідною функції f у точці x_0 називається скінченна границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо ця границя існує:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Позначення похідної: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$. Операцію знаходження похідної називають диференціюванням. **Геометричний зміст.** Число $f'(x_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка в точці $(x_0, f(x_0))$. Рівняння дотичної:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Економічний зміст. Якщо $C(q)$ — витрати на виробництво q одиниць продукції, то $C'(q)$ — граничні витрати; якщо $R(q)$ — дохід, то $R'(q)$ — граничний дохід. **Приклад 1.** За означенням знайти похідну $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

1.2. Таблиця похідних основних елементарних функцій

Функція	Похідна	Функція	Похідна
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \ln a$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Тут $a > 0$, $a \neq 1$; кожна формула справедлива в тих точках своєї області визначення, де відповідна похідна існує. Для x^α із довільним дійсним α беремо $x > 0$. **1.3. Правила диференціювання**

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, c — стала. Тоді

$$(c)' = 0, \qquad (cu)' = cu', \qquad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Правило складної функції. Якщо $y = f(u)$, $u = g(x)$, то

$$y'_x = f'_u(u)\, g'_x(x).$$

Приклад 3. Знайти похідну $y = (x^2+1)(3x-2)$. **Розв'язання.** Застосовуємо правило похідної добутку: похідна першого множника, помножена на другий, плюс перший множник, помножений на похідну другого:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'(3x-2) + (x^2+1)(3x-2)' \\ &= 2x(3x-2) + (x^2+1)\cdot 3 \\ &= 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = \boxed{9x^2 - 4x + 3}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти похідну $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, $x \neq 1$. **Розв'язання.** За правилом похідної частки: у чисельнику похідна чисельника на знаменник мінус чисельник на похідну знаменника; у знаменнику квадрат знаменника:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+1)'(x-1) - (x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x(x-1) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}}. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти похідну $y = (2x^2 - 3x + 1)^5$. **Розв'язання.** Це складна функція. Спочатку диференціюємо п'ятий степінь, залишаючи внутрішній вираз без змін, а потім множимо на похідну внутрішнього виразу:

$$\begin{aligned} y' &= 5(2x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (2x^2 - 3x + 1)' \\ &= 5(2x^2 - 3x + 1)^4 (4x - 3). \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти похідну $y = 3e^{2x} - 4\ln x + \sin x$, $x > 0$. **Розв'язання.** Використовуємо похідну суми, правило сталого множника, таблицю похідних і правило складної функції:

$$\begin{aligned} y' &= 3(e^{2x})' - 4(\ln x)' + (\sin x)' \\ &= 3e^{2x}(2x)' - 4\cdot\frac{1}{x} + \cos x \\ &= \boxed{6e^{2x} - \frac{4}{x} + \cos x}. \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти похідну $y = \ln(1 + x^2)$. **Розв'язання.** Застосовуємо правило складної функції до логарифма:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \boxed{\frac{2x}{1+x^2}}.$$

2. Дослідження функції за допомогою похідної

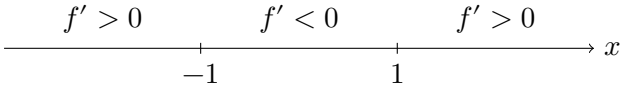
2.1. Монотонність функції

Критерій монотонності. Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі, то f строго зростає на ньому; якщо $f'(x) < 0$, то строго спадає. Це випливає з теореми Лагранжа. Критична точка

— внутрішня точка області визначення, де $f'(x) = 0$ або похідна не існує. Якщо $f'(x) = 0$, точку називають стаціонарною. **Приклад 8.** Дослідити на монотонність $f(x) = x^3 - 3x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Стаціонарні точки: $x = -1$, $x = 1$. На $(-\infty, -1)$ і $(1, +\infty)$ похідна додатна, на $(-1, 1)$ — від'ємна.



Відповідь. Функція зростає при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ і спадає при $x \in (-1, 1)$. **2.2. Локальні екстремуми**

Означення. У точці x_0 функція має локальний максимум (мінімум), якщо в деякому околі x_0 виконується $f(x) \le f(x_0)$ (відповідно $f(x) \ge f(x_0)$). **Теорема Ферма.** Якщо в точці внутрішнього локального екстремуму існує похідна, то $f'(x_0) = 0$. Обернене твердження загалом неправильне. **Перша достатня умова.** Якщо при переході через критичну точку знак f' змінюється з «+» на «−», маємо локальний максимум; із «−» на «+» — локальний мінімум. **Друга достатня умова.** Якщо $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то в x_0 строгий локальний мінімум; якщо $f''(x_0) < 0$ — строгий локальний максимум. **Приклад 9.** Для $f(x) = x^3 - 3x$ із прикладу 8:

$$f(-1) = 2, \qquad f(1) = -2.$$

При $x = -1$ похідна змінює знак з «+» на «−», тому $f(-1) = 2$ — локальний максимум. При $x = 1$ знак змінюється з «−» на «+», тому $f(1) = -2$ — локальний мінімум. **Приклад 10.** Знайти найбільше й найменше значення $f(x) = x^2 - 4x + 1$ на $[0, 5]$.

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \iff x = 2; \qquad f(0) = 1, \quad f(2) = -3, \quad f(5) = 6.$$

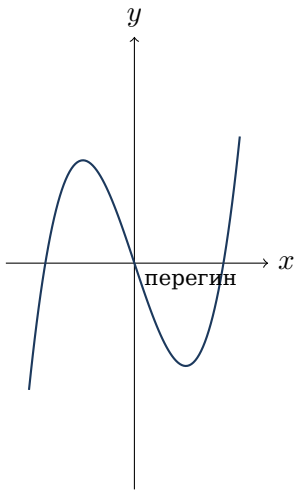
$$\min_{x \in [0,5]} f(x) = f(2) = -3, \qquad \max_{x \in [0,5]} f(x) = f(5) = 6.$$

2.3. Опуклість, вгнутість і точки перегину

Нехай f двічі диференційовна. Якщо $f''(x) > 0$ на інтервалі, графік опуклий донизу (вгнутий); якщо $f''(x) < 0$, графік опуклий догори. За умови двічі диференційовності критерій із нерівностями $f'' \ge 0$ та $f'' \le 0$ є необхідним і достатнім для відповідних видів опуклості. Точка перегину — точка графіка, в якій змінюється характер опуклості. Зміна знака f'' при переході через точку (за неперервності функції) є достатньою ознакою перегину. **Приклад 11.** Дослідити опуклість і точки перегину $f(x) = x^3 - 3x$.

$$f''(x) = 6x.$$

При $x < 0$ друга похідна від'ємна, при $x > 0$ — додатна. Отже, на $(-\infty, 0)$ графік опуклий догори, на $(0, +\infty)$ — донизу; $(0, 0)$ — точка перегину.



Приклад 12. Нехай дохід $R(q) = 100q - q^2$, витрати $C(q) = 20q + 400$. Прибуток:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = 80q - q^2 - 400.$$

$$\Pi'(q) = 80 - 2q = 0 \iff q = 40, \qquad \Pi''(q) = -2 < 0.$$

Отже, максимальний прибуток досягається при $q = 40$ і становить $\Pi(40) = 1200$ грошових одиниць. **3. Повне дослідження функції та побудова графіка**

3.1. Асимптоти графіка функції

Вертикальна асимптота. Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою, якщо хоча б одна з односторонніх границь $\lim_{x\to a-} f(x)$ або $\lim_{x\to a+} f(x)$ дорівнює $+\infty$ чи $-\infty$. **Похила асимптота.** Пряма $y = kx + b$ є асимптотою при $x \to +\infty$ (або $x \to -\infty$), якщо

$$\lim_{x\to\pm\infty} \bigl(f(x) - (kx + b)\bigr) = 0.$$

Якщо така асимптота існує, то її коефіцієнти визначаються формулами

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \bigl(f(x) - kx\bigr).$$

Границі при $+\infty$ і $-\infty$ обчислюють окремо. Якщо $k = 0$, асимптота горизонтальна: $y = b$. **Приклад 13.** Для $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$ знайти асимптоти. Вертикальна асимптота: $x = 1$, оскільки знаменник прямує до нуля, а чисельник — до 3.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{x(x - 1)} = 2.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2.$$

Відповідь. Вертикальна асимптота $x = 1$; похила асимптота $y = 2x + 2$. **3.2. Алгоритм повного дослідження**

1. Знайти область визначення, точки перетину з осями, парність або непарність.
2. Дослідити неперервність і знайти вертикальні асимптоти.
3. Обчислити границі при $x \to \pm\infty$, знайти похилі або горизонтальні асимптоти.
4. Знайти $f'(x)$, критичні точки, проміжки зростання та спадання, локальні екстремуми.

5. Знайти $f''(x)$, проміжки опуклості та точки перегину.
6. За отриманими даними побудувати узгоджений ескіз графіка.

3.3. Повний приклад дослідження функції

Приклад 14. Дослідити функцію $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ і побудувати її графік. **1.** Область визначення: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Перетин з осями — точка $(0,0)$. Функція не є ні парною, ні непарною. **2.** Вертикальна асимптота: $x = 1$, оскільки

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$$

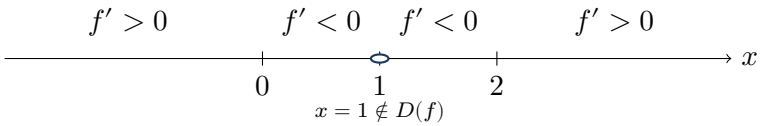
3. Похила асимптота: знаходимо коефіцієнти

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1.$$

Отже, $y = x + 1$ — похила асимптота на обох нескінченностях. **4.** Перша похідна та екстремуми:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

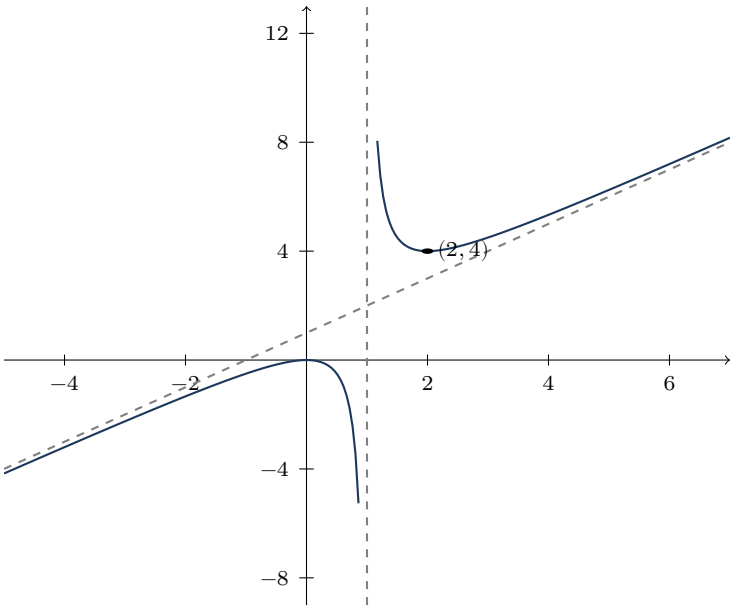
Критичні точки: $x = 0$ і $x = 2$. Значення $x = 1$ не належить області визначення, тому не є критичною точкою, але розділяє проміжки дослідження.



Функція зростає при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; спадає при $x \in (0,1) \cup (1,2)$. Локальний максимум: $f(0) = 0$; локальний мінімум: $f(2) = 4$. **5.** Друга похідна та опуклість:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

На $(-\infty, 1)$ маємо $f'' < 0$ (опуклість догори), на $(1, +\infty)$ — $f'' > 0$ (опуклість донизу). Точок перегину немає, бо $x = 1$ не належить області визначення. **6.** Графік: суцільна крива — функція, пунктирні прямі — асимптоти.



Приклад 15. Економічна інтерпретація повного дослідження. Нехай функція прибутку $\Pi(q) = -q^2 + 60q - 500$, $q \geq 0$. Маємо

$$\Pi'(q) = 60 - 2q, \qquad \Pi''(q) = -2 < 0.$$

Прибуток зростає при $0 \leq q < 30$, спадає при $q > 30$; найбільше значення $\Pi(30) = 400$ досягається при $q = 30$. Графік — парабола, опукла догори, асимптот немає.