ЛЕКЦІЯ № 9

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

Застосування похідної

1. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на сегменті (глобальний екстремум)

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$. За другою теоремою Вейєрштрасса вона досягає на цьому сегменті найбільшого та найменшого значень: існують $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ такі, що

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}), \qquad x \in [a, b].$$

Якщо внутрішня точка $x_0 \in (a, b)$ є точкою глобального екстремуму і $f'(x_0)$ існує, то за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. Проте екстремум може досягатися також у внутрішній точці, де похідна не існує, або на кінцях сегмента.

Алгоритм. Знайти всі внутрішні критичні точки ($f'(x) = 0$ або похідна не існує); обчислити значення функції в цих точках та на кінцях a, b; вибрати найбільше і найменше з отриманих значень.

Приклад 1. Знайти глобальні екстремуми $f(x) = x^3 - 3x$ на $[-2, 3]$.

Розв'язання. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Критичні точки $x = -1$ і $x = 1$ належать $(-2, 3)$. Обчислюємо:

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-2	2	-2	18

Відповідь. Найменше значення -2 досягається у двох точках, а найбільше значення 18 — у точці $x = 3$:

$$\boxed{\min_{x \in [-2,3]} f(x) = f(-2) = f(1) = -2,}$$

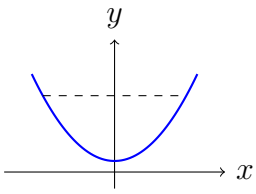
$$\boxed{\max_{x \in [-2,3]} f(x) = f(3) = 18.}$$

2. Дослідження функцій на опуклість і вгнутість

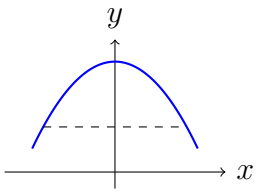
Означення. Графік функції називають *вгнутим (опуклим донизу)*, якщо він лежить не вище від кожної хорди, що сполучає дві його точки; *опуклим (опуклим догори)* — якщо він лежить не нижче від кожної такої хорди.

Для x_1, x_2 з проміжку і $0 \le t \le 1$ відповідні нерівності мають вигляд

$$\text{вгнутість: } f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$
$$\text{опуклість: } f((1-t)x_1 + tx_2) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$



Вгнутий графік



Опуклий графік

Теорема (критерій опуклості графіка функції). Нехай f неперервна на $[a,b]$ і двічі диференційовна на (a,b). Графік f вгнутий (опуклий донизу) тоді й лише тоді, коли $f''(x) \geq 0$ для всіх $x \in (a,b)$. Графік опуклий (опуклий догори) тоді й лише тоді, коли $f''(x) \leq 0$ для всіх $x \in (a,b)$.

Доведення. Доведемо перше твердження. Якщо $f'' \geq 0$, то f' неспадна. Для $x_1 < z < x_2$ за теоремою Лагранжа

$$\frac{f(z)-f(x_1)}{z-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(z)}{x_2-z},$$

де $x_1 < \xi_1 < z < \xi_2 < x_2$. Звідси

$$f(z) \leq \frac{x_2-z}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{z-x_1}{x_2-x_1} f(x_2),$$

тобто графік лежить під хордою.

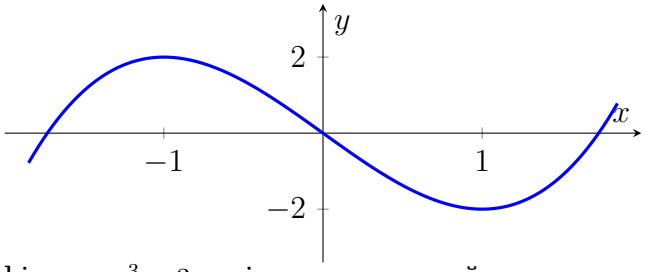
Навпаки, якщо графік лежить під кожною хордою, то для малих $h>0$

$$f(x) \leq \frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}, \qquad \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \geq 0.$$

При $h \to 0$ останній дріб прямує до $f''(x)$, отже $f''(x) \geq 0$. Друге твердження випливає із застосування першого до $-f$. $\square$

Приклад 2. Дослідити опуклість $f(x) = x^3 - 3x$.

Розв'язання. $f''(x) = 6x$. При $x<0$ друга похідна від'ємна, отже графік опуклий догори; при $x>0$ — додатна, отже графік вгнутий (опуклий донизу).



Схематичний графік $y = x^3 - 3x$: ліворуч опуклий догори, праворуч — донизу.

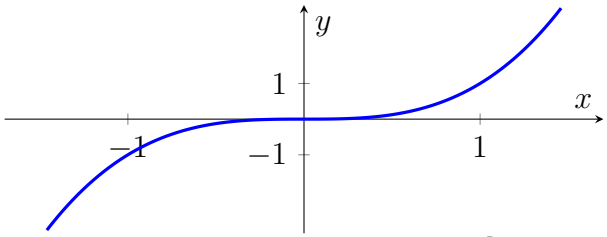
3. Точки перегину

Означення. Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка неперервної функції називається *точкою перегину*, якщо при переході через x_0 змінюється характер опуклості графіка.

Достатня ознака. Якщо f неперервна поблизу x_0, двічі диференційовна по обидва боки від x_0 і f'' має різні знаки ліворуч і праворуч, то x_0 — абсциса

точки перегину. Якщо $f''(x_0)$ існує, то в точці перегину $f''(x_0) = 0$; сама ця рівність ще не гарантує перегину.

Приклад 3. Для $f(x) = x^3$ маємо $f''(x) = 6x$, отже $(0,0)$ — точка перегину. Натомість для $f(x) = x^4$ маємо $f''(0) = 0$, але $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ по обидва боки від нуля, тому перегину немає.



Точка $(0,0)$ — точка перегину графіка $y = x^3$.

4. Асимптоти графіків функцій

4.1. Вертикальні асимптоти

Означення. Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою графіка $y = f(x)$, якщо принаймні одна з односторонніх границь нескінченна:

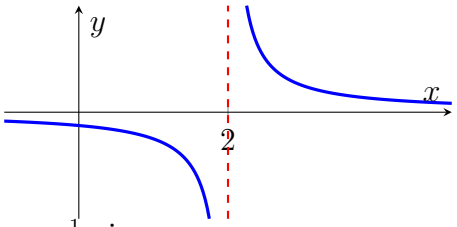
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty \qquad \text{або} \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty.$$

Такі прямі шукають насамперед серед точок розриву другого роду або граничних точок області визначення. Не кожна точка розриву другого роду дає вертикальну асимптоту: потрібна саме нескінченна одностороння границя.

Приклад 4. Для $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ маємо

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2+0} f(x) = +\infty.$$

Отже, $x = 2$ — вертикальна асимптота.



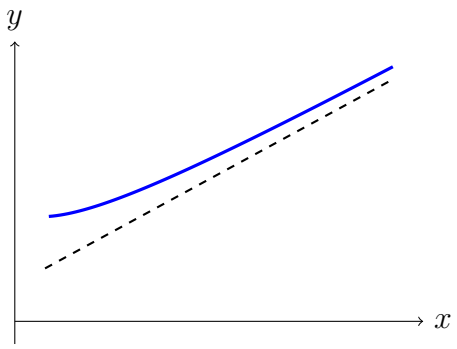
Графік $y = \frac{1}{x-2}$ і вертикальна асимптота $x = 2$.

4.2. Похилі асимптоти

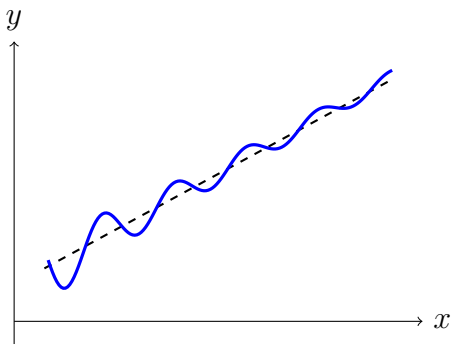
Означення. Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою графіка f при $x \to +\infty$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty} \big| f(x) - (kx + b) \big| = 0.$$

Аналогічно визначається асимптота при $x \to -\infty$. При $k = 0$ асимптота горизонтальна.



Наближення з одного боку



Перетини й осциляції

Виведення формул. З означення маємо $f(x) = kx + b + \varepsilon(x)$, де $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поділивши на x, дістаємо

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}, \qquad \boxed{k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}.$$

Віднімаючи kx, одержимо

$$f(x) - kx = b + \varepsilon(x), \qquad \boxed{b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big)}.$$

Отже, спочатку знаходимо скінченну границю k, а потім скінченну границю b. Якщо обидві існують, $y = kx + b$ — асимптота. Для $x \to -\infty$ формули аналогічні.

Приклад 5. Знайти асимптоти $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = -\infty$ та $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = +\infty$, пряма $x = 1$ — вертикальна асимптота.

Знайдемо кутовий коефіцієнт похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1.$$

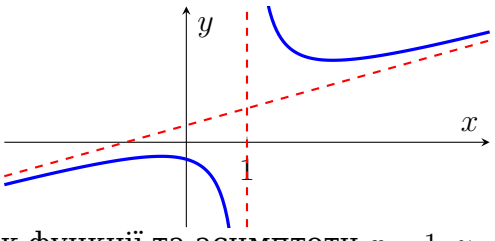
Тепер знайдемо вільний член:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Отже, $y = x + 1$ — похила асимптота. При $x \to -\infty$ аналогічно $k = 1$, $b = 1$.

Відповідь. Вертикальна асимптота $x = 1$; похила асимптота $y = x + 1$ при $x \to \pm\infty$.



Графік функції та асимптоти $x = 1$, $y = x + 1$.

Приклад 6. Знайти похилі асимптоти $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

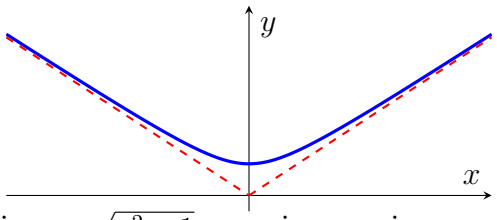
Розв'язання. При $x \to +\infty$ маємо

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Отже, справа асимптота $y = x$. При $x \to -\infty$ одержуємо $k = -1$ і

$$b = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0.$$

Отже, зліва асимптота $y = -x$.



Графік $y = \sqrt{x^2+1}$ та дві похилі асимптоти.

Приклад 7. Розглянемо $f(x) = x + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ при $x > 0$. Оскільки

$$|f(x) - x| = \frac{|\sin(x^2)|}{x} \le \frac{1}{x} \longrightarrow 0,$$

то $y = x$ — похила асимптота. Графік перетинає її нескінченно багато разів у точках $x = \sqrt{n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$; між ними він осцилює навколо асимптоти.

5. Правило Лопіталя

Теорема (правило Лопіталя). Нехай функції f і g диференційовні в проколотому околі точки a, причому $g'(x) \neq 0$. Нехай при $x \to a$ маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}),$$

то за відповідних стандартних умов теореми Коші існує й границя початкового відношення, причому

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.}$$

Правило застосовується також для односторонніх границь і при $x \to \pm\infty$. Важливо: диференціюємо окремо чисельник і знаменник, а не весь дріб за правилом похідної частки.

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{1} = 1.}$$

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Диференціюємо чисельник і знаменник окремо:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1.}$$

Відповідь. 1.