ЛЕКЦІЯ № 8

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

Диференціальне числення функції однієї змінної

1. Похідна параметрично заданої функції

Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де φ і ψ диференційовні, а $\varphi'(t) \neq 0$. Тоді, застосовуючи правило диференціювання складної функції, дістаємо

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.}$$

Теорема. Якщо функції $\varphi(t)$ ***і*** $\psi(t)$ ***диференційовні поблизу*** t_0 ***і*** $\varphi'(t_0) \neq 0$***, то параметрично задана функція*** $y(x)$ ***диференційовна в точці*** $x_0 = \varphi(t_0)$ ***і її похідна визначається наведеною формулою.***

Приклад 1. Нехай $x = t^2 + 1$, $y = t^3 - 2t$. Знайти y'_x.
Розв'язання. Маємо $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2 - 2$. Тому

$$\boxed{y'_x = \frac{3t^2 - 2}{2t}}, \qquad t \neq 0.$$

Приклад 2. Якщо $x = \cos t$, $y = \sin t$, то

$$y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t, \qquad \sin t \neq 0.$$

2. Похідна неявно заданої функції

Якщо $F(x, y) = 0$ визначає диференційовну функцію $y = y(x)$, то диференціюємо рівність за x, ураховуючи залежність y від x:

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y'(x) = 0.$$

Теорема (формула неявного диференціювання). Якщо F ***має неперервні частинні похідні поблизу*** (x_0, y_0)***,*** $F(x_0, y_0) = 0$ ***і*** $F_y(x_0, y_0) \neq 0$***, то локально*** y ***є диференційовною функцією від*** x ***і***

$$\boxed{y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.}$$

Приклад 3. $x^2 + xy + y^2 = 7$.
Розв'язання. $2x + y + xy' + 2yy' = 0$, отже

$$\boxed{y' = -\frac{2x+y}{x+2y}}, \quad x + 2y \neq 0.$$

Приклад 4. $x^3 + y^3 = 6xy$.
Розв'язання. $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$. Звідси

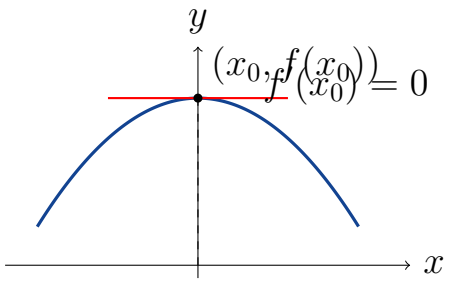
$$\boxed{y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}}, \quad y^2 \neq 2x.$$

3. Основні теореми диференціального числення

3.1. Теорема Ферма

Теорема (Ферма). Якщо функція f ***має локальний екстремум у внутрішній точці*** x_0 ***області визначення і диференційовна в*** x_0**, то** $f'(x_0) = 0$**.**

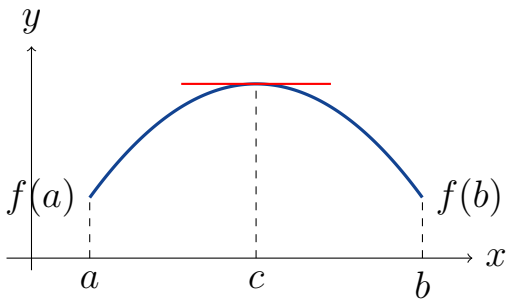
Доведення. Нехай у x_0 локальний максимум. Для малих $h > 0$ маємо $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \leq 0$, а для $h < 0$ відповідне відношення ≥ 0. Оскільки обидві односторонні границі дорівнюють $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$. Для мінімуму міркування аналогічне. **Геометричний зміст:** дотична до графіка в гладкій точці внутрішнього екстремуму горизонтальна.



3.2. Теорема Ролля

Теорема (Ролля). Якщо f ***неперервна на*** $[a, b]$**, диференційовна на** (a, b) ***і*** $f(a) = f(b)$**, то існує** $c \in (a, b)$ ***таке, що*** $f'(c) = 0$**.**

Доведення. За теоремою Вейєрштрасса функція досягає найбільшого й найменшого значень. Якщо вони однакові, функція стала і похідна всюди нульова. Інакше хоча б один із екстремумів досягається всередині відрізка; застосовуємо теорему Ферма. **Геометричний зміст:** за однакових висот кінців графіка знайдеться внутрішня точка з горизонтальною дотичною.

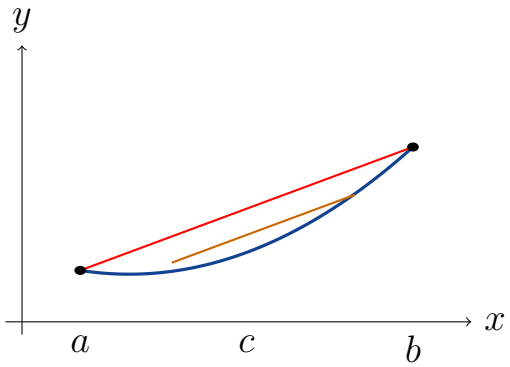


3.3. Теорема Лагранжа

Теорема (Лагранжа). Якщо f ***неперервна на*** $[a,b]$ ***і диференційовна на*** (a,b)***, то існує*** $c \in (a,b)$ ***таке, що***

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.}$$

Доведення. До функції $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ застосовуємо теорему Ролля, бо $g(a) = g(b) = 0$. Із $g'(c) = 0$ отримуємо потрібну рівність. **Геометричний зміст:** у деякій точці дотична паралельна січній, проведеній через кінці графіка.



3.4. Критерій сталості функції

Теорема. Нехай f ***неперервна на*** $[a,b]$ ***та диференційовна на*** (a,b)***. Функція*** f ***стала на*** $[a,b]$ ***тоді й лише тоді, коли*** $f'(x) = 0$ ***для всіх*** $x \in (a,b)$***.***

Доведення. Необхідність очевидна. Для достатності беремо будь-які $u < v$ з $[a, b]$ і застосовуємо теорему Лагранжа: $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) = 0$.

3.5. Теорема Коші

Теорема (Коші). Нехай f, g ***неперервні на*** $[a, b]$ ***і диференційовні на*** (a, b)***. Тоді існує*** $c \in (a, b)$ ***таке, що***

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Якщо $g'(c) \neq 0$ та $g(b) \neq g(a)$, цю рівність можна записати як

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.}$$

Зауваження. Це узагальнення теореми Лагранжа: досить взяти $g(x) = x$.

4. Формула Тейлора. Многочлен Тейлора

Нехай x_0 — фіксована точка, а f має похідні до порядку n у її околі. **Многочленом Тейлора** порядку n у точці x_0 називається

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.}$$

Формула Тейлора. За відповідних умов гладкості функція подається у вигляді $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$***, де*** $R_n(x)$ ***— залишковий член. Якщо*** f ***має*** $(n + 1)$***-шу похідну між*** x_0 ***і*** x***, то для деякого*** ξ ***між ними***

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Приклад 5. Розклади в точці $x_0 = 0$ (ряди Маклорена):

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Приклад 6. Для $f(x) = \ln(1+x)$ при $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

5. Похідні та диференціали вищих порядків

Означення. Друга похідна — це похідна від першої: $f''(x) = (f'(x))'$. Аналогічно n-та похідна визначається рекурентно:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Для незалежної змінної x диференціали вищих порядків визначаються формулами

$$\boxed{d^2y = f''(x)(dx)^2, \qquad d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n.}$$

Зауваження. Формули мають такий простий вигляд, коли x є незалежною змінною, тобто $d^2x = 0$.

Приклад 7. $f(x) = x^4 - 3x^2$: $f'(x) = 4x^3 - 6x$, $f''(x) = 12x^2 - 6$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$.

Приклад 8. $f(x) = \sin x$: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$; отже, похідні повторюються з періодом чотири.

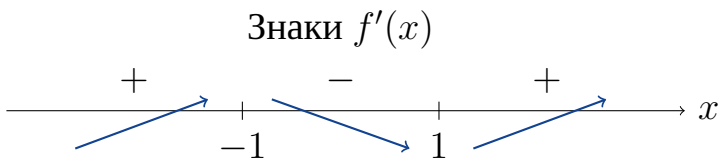
Приклад 9. $f(x) = e^{2x}$: $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, а $d^ny = 2^n e^{2x}(dx)^n$.

6. Застосування похідної: монотонність

Теорема (критерій монотонності). Нехай f диференційовна на відкритому проміжку E. Функція f неспадна на E тоді й лише тоді, коли $f'(x) \geq 0$ для всіх $x \in E$. Аналогічно, f незростаюча на E тоді й лише тоді, коли $f'(x) \leq 0$ для всіх $x \in E$.

Доведення. Достатність випливає з теореми Лагранжа. Для необхідності розглядаємо границі відношення приростів неспадної (або незростаючої) функції.

Приклад 10. $f(x) = x^3 - 3x$. Маємо $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, критичні точки -1 і 1.



Отже, f зростає на $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$ і спадає на $(-1, 1)$.

7. Локальні екстремуми функції

Означення. Точка x_0 — точка **локального максимуму**, якщо в деякому її околі $f(x) \leq f(x_0)$. Для **локального мінімуму** маємо $f(x) \geq f(x_0)$.

Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма). Якщо в точці локального екстремуму x_0 ***похідна існує, то*** $f'(x_0) = 0$**.**

Ця умова **не є достатньою**: для $f(x) = x^3$ маємо $f'(0) = 0$, але екстремуму немає. Водночас $f(x) = |x|$ має мінімум у 0, хоча $f'(0)$ не існує. **Означення.** Критична точка — внутрішня точка області визначення, де $f'(x) = 0$ або похідна не існує. Стаціонарна точка — точка, де $f'(x) = 0$.

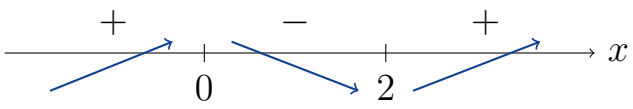
7.1. Алгоритм знаходження локальних екстремумів

1. Знайти область визначення функції.
2. Обчислити $f'(x)$ і знайти всі критичні точки.
3. Розбити область визначення критичними точками на проміжки й визначити знак $f'(x)$ на кожному.
4. За зміною знака встановити точки максимуму й мінімуму та обчислити значення функції.

7.2. Перша достатня умова екстремуму

Теорема (ознака зміни знака першої похідної). Якщо при переході через критичну точку x_0 ***похідна змінює знак з «+» на «−», то*** x_0 ***— точка локального максимуму; якщо з «−» на «+», то*** x_0 ***— точка локального мінімуму.***

Приклад 11. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Тоді $f'(x) = 3x(x-2)$. Критичні точки 0 і 2.



У $x = 0$ — локальний максимум $f(0) = 2$; у $x = 2$ — локальний мінімум $f(2) = -2$.

Приклад 12. $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x > 0$. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. На $(0, 2)$ похідна від'ємна, на $(2, +\infty)$ — додатна. Отже, $x = 2$ — мінімум, $f(2) = 4$.

7.3. Друга достатня умова екстремуму

Теорема (ознака за першою ненульовою похідною). Нехай f ***має достатню кількість неперервних похідних поблизу*** x_0**,** $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ***і*** $f^{(n)}(x_0) \neq 0$**, де** $n \geq 2$***. Якщо*** n ***парне, то при*** $f^{(n)}(x_0) > 0$ ***маємо строгий локальний мінімум, а при*** $f^{(n)}(x_0) < 0$ ***— строгий локальний максимум. Якщо*** n ***непарне, локального екстремуму немає.***

Пояснення. За формулою Тейлора головний член приросту поблизу x_0 дорівнює $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$; його знак і визначає поведінку функції.

Приклад 13. $f(x) = x^4$: $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Отже, $x = 0$ — строгий мінімум.

Приклад 14. $f(x) = -x^4$: $f^{(4)}(0) = -24 < 0$, усі похідні порядків $1, 2, 3$ у нулі дорівнюють нулю. Отже, $x = 0$ — строгий максимум.

Приклад 15. $f(x) = x^3$: $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$. Порядок першої ненульової похідної непарний, тому екстремуму в нулі немає.