ВИЩА МАТЕМАТИКА

Практичне заняття № 10

Область визначення та основні властивості функцій

Мета: навчитися знаходити області визначення та множини значень, досліджувати парність, нулі, знакосталість і періодичність, будувати графіки та складати функціональні моделі.

1. Короткі теоретичні відомості

Область визначення D(f) — усі значення аргументу, за яких формула функції має зміст. Множина значень E(f) — усі значення, яких набуває функція. Для дробу знаменник не дорівнює нулю; для квадратного кореня підкореневий вираз невід’ємний; для логарифма аргумент строго додатний. Якщо корінь стоїть у знаменнику, підкореневий вираз строго додатний.

$$\frac{A(x)}{B(x)}:\ B(x)\neq 0;\quad \sqrt{A(x)}:\ A(x)\geq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{A(x)}}:\ A(x)>0;\quad \ln A(x):\ A(x)>0$$

Парність перевіряють на області визначення, симетричній відносно нуля: парна функція задовольняє f(−x)=f(x), непарна — f(−x)=−f(x). Період T>0 задовольняє f(x+T)=f(x).

2. Розв’язання завдань

Завдання 1. Область визначення раціональних функцій

Умова

а) Знайти область визначення функції

$$y=3x-5$$

Розв’язання

Лінійна функція визначена за будь-якого дійсного x.

Відповідь

$$D(y)=\mathbb{R}$$



Умова

б) Знайти область визначення функції

$$y = \frac{1}{x-4}$$

Розв’язання

Знаменник не може дорівнювати нулю: $x-4 \neq 0$, отже $x \neq 4$.

Відповідь

$$D(y) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$$



Умова

в) Знайти область визначення функції

$$y = \frac{2}{x^2-9}$$

Розв’язання

Розкладаємо знаменник: $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Виключаємо $x=-3$ і $x=3$.

Відповідь

$$D(y) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$



Завдання 2. Області визначення функцій із коренями

Умова

а) Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{2x-6}$$

Розв’язання

Підкореневий вираз має бути невід’ємним: $2x-6 \geq 0$, тобто $x \geq 3$.

Відповідь

$$D(y) = [3, +\infty)$$



Умова

б) Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{5 - x}$$

Розв’язання

Вимагаємо $5-x \geq 0$, тобто $x \leq 5$.

Відповідь

$$D(y) = (-\infty, 5]$$



Умова

в) Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

Розв’язання

Розв’язуємо нерівність $(x-1)/(x+2) \geq 0$ з умовою $x \neq -2$. Критичні точки -2 та 1. Методом інтервалів отримуємо допустимі проміжки.

Відповідь

$$D(y) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$



Завдання 3. Області визначення логарифмів

Умова

а) Знайти область визначення функції

$$y = \ln(x - 2)$$

Розв’язання

Аргумент логарифма має бути додатним: $x-2>0$.

Відповідь

$$D(y) = (2, +\infty)$$



Умова

б) Знайти область визначення функції

$$y = \log_2(5 - x)$$

Розв’язання

Аргумент логарифма додатний: $5-x>0$, звідки $x<5$.

Відповідь

$$D(y) = (-\infty, 5)$$



Умова

в) Знайти область визначення функції

$$y = \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$$

Розв’язання

Розв’язуємо $(x+1)/(x-3)>0$. Чисельник і знаменник мають однакові знаки; точки -1 та 3 виключаємо.

Відповідь

$$D(y) = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$



Завдання 4. Комбіновані обмеження

Умова

а) Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

Розв’язання

Одночасно $x+2 \geq 0$ та $x-1 \neq 0$. Отже $x \geq -2$, але $x \neq 1$.

Відповідь

$$D(y) = [-2, 1) \cup (1, +\infty)$$



Умова

б) Знайти область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Розв’язання

Корінь міститься в знаменнику, тому $4-x^2>0$. Отже $-2<x<2$.

Відповідь

$$D(y) = (-2, 2)$$



Умова

в) Знайти область визначення функції

$$y = \ln(x^2 - 4x + 3)$$

Розв’язання

Аргумент логарифма додатний: $(x-1)(x-3)>0$. Добуток додатний поза коренями.

Відповідь

$$D(y) = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$



Завдання 5. Парність і непарність

Умова

а) Дослідити функцію на парність

$$f(x) = x^2 + 3$$

Розв’язання

Підставляємо $-x$: $f(-x)=(-x)^2+3=x^2+3=f(x)$.

Відповідь

$$f(-x) = f(x) \quad \text{(парна)}$$

Умова

б) Дослідити функцію на парність

$$f(x) = x^3 - 2x$$

Розв’язання

Маємо $f(-x)=-x^3+2x=-f(x)$.

Відповідь

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{(непарна)}$$

Умова

в) Дослідити функцію на парність

$$f(x) = x^3 + x^2$$

Розв’язання

Маємо $f(-x)=-x^3+x^2$, що не збігається ні з $f(x)$, ні з $-f(x)$.

Відповідь

$$f(-x) = -x^3 + x^2$$

Відповідь: функція ні парна, ні непарна.

Завдання 6. Нулі та проміжки знакосталості

Умова

а) Знайти нулі та проміжки знакосталості

$$f(x) = x - 3$$

Розв’язання

Рівняння x−3=0 дає x=3. Ліворуч від 3 функція від’ємна, праворуч — додатна.

Відповідь

$$f < 0 : \ x < 3; \qquad f > 0 : \ x > 3$$

Умова

б) Знайти нулі та проміжки знакосталості

$$f(x) = x^2 - 4$$

Розв’язання

Розкладаємо: (x−2)(x+2). Нулі x=−2 та x=2. За знаками множників отримуємо:

Відповідь

$$f > 0 : \ (-\infty, \ -2) \cup (2, \ +\infty)$$

$$f < 0 : \ (-2, 2)$$

Умова

в) Знайти нулі та проміжки знакосталості

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)$$

Розв’язання

Нулі x=−3 та x=1. Добуток додатний поза коренями та від’ємний між ними.

Відповідь

$$f > 0 : \ (-\infty, \ -3) \cup (1, \ +\infty)$$

$$f < 0 : \ (-3, 1)$$

Завдання 7. Функція з модулем

Умова

Дослідити функцію: знайти область визначення, множину значень, нулі та побудувати графік.

$$f(x) = |x - 2|$$

Розв’язання

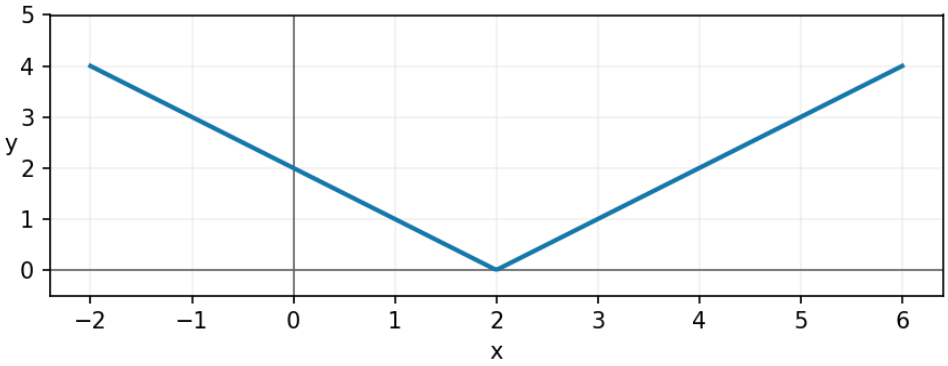
За означенням модуля, при x<2 маємо 2−x, а при x≥2 маємо x−2. Графік V-подібний із вершиною (2; 0).

$$f(x) = 2 - x \quad (x < 2)$$

$$f(x) = x - 2 \quad (x \geq 2)$$

Відповідь

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = [0, +\infty), \quad x_0 = 2$$



Завдання 8. Квадратична функція

Умова

Знайти нулі, вершину, область визначення, множину значень та побудувати графік функції.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

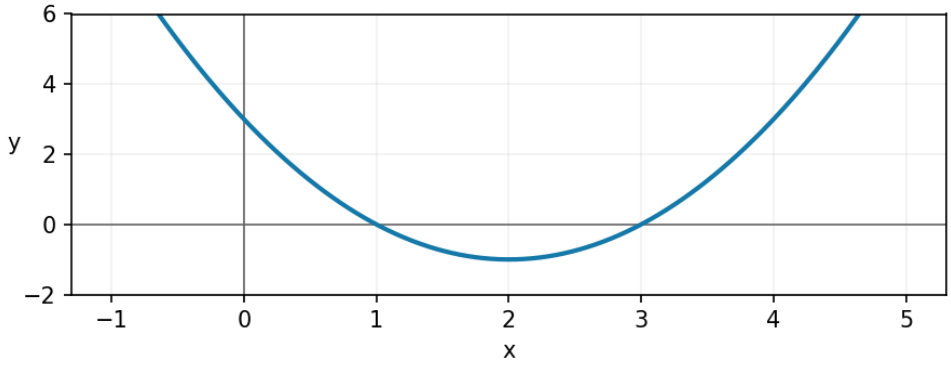
Розв’язання

Розкладаємо на множники для знаходження нулів і виділяємо повний квадрат для вершини.

$$f(x) = (x-1)(x-3) = (x-2)^2 - 1$$

Відповідь

Область визначення — $\mathbb{R}$; нулі $x=1$ та $x=3$; вершина $(2;\,-1)$; найменше значення -1 при $x=2$; множина значень $[-1,+\infty)$. Вітки параболи спрямовані вгору.



Завдання 9. Періодичність

Умова

а) Знайти найменший додатний період

$$y = \sin x$$

Розв’язання

Синус має найменший додатний період 2π.

Відповідь

$$T = 2\pi$$

Умова

б) Знайти найменший додатний період

$$y = \cos(2x)$$

Розв’язання

Аргумент збільшується на 2π, коли x збільшується на π.

Відповідь

$$T = \pi$$

Умова

в) Знайти найменший додатний період

$$y = \sin(3x - 1)$$

Розв’язання

Коефіцієнт при x дорівнює 3, а зсув на -1 періоду не змінює.

Відповідь

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

Завдання 10. Композиції функцій

Умова

Для заданих функцій знайти обидві композиції f(g(x)) і g(f(x)).

$$f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = x^2$$

Розв’язання

Спочатку підставляємо $g(x)=x^2$ у f, потім $f(x)=2x+1$ у g.

$$f(g(x)) = 2x^2 + 1$$

$$g(f(x)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

Відповідь

Обидві композиції визначені на $\mathbb{R}$, але не збігаються.

Завдання 11. Побудова графіка за знаками

Умова

Побудувати на відрізку $[-3;4]$ функцію з нулями -1 та 2, додатну поза цими точками і від’ємну між ними.

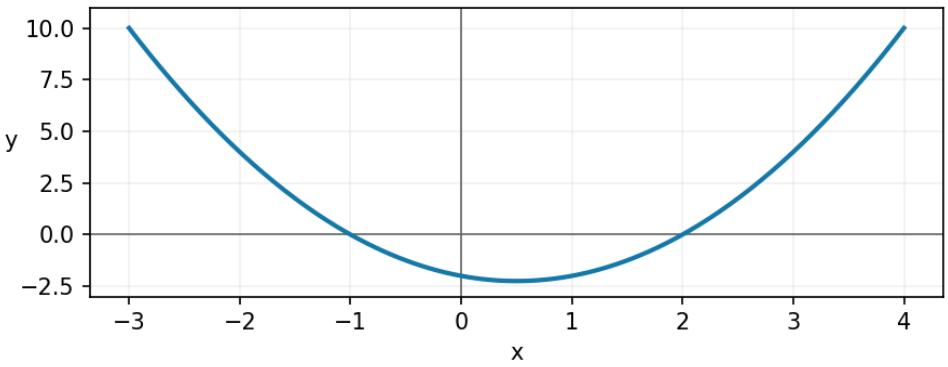
Розв’язання

Підійде добуток двох лінійних множників, що змінює знак у заданих нулях.

$$f(x) = (x + 1)(x - 2), \quad x \in [-3, 4]$$

Відповідь

Функція додатна на $[-3;-1)$ і $(2;4]$, від’ємна на $(-1;2)$; $f(-3)=10$, $f(4)=10$.



Завдання 12. Економічна модель витрат, доходу та прибутку

Умова

Витрати C(q)=20000+150q, дохід R(q)=250q. Знайти функцію прибутку, точку беззбитковості, прибуток при q=100, 200, 300 і пояснити економічний зміст результатів.

Розв’язання

Прибуток — різниця доходу та витрат.

$$P(q) = R(q) - C(q) = 100q - 20000$$

Економічно змістовна область: q≥0; для кількості окремих виробів q має бути цілим.

$$00) = -10000, \quad P(200) = 0, \quad P(300) = 10($$

Розв’язуємо 100q−20000=0, звідки q=200.

Відповідь

Точка беззбитковості — 200 виробів. За 0≤q<200 маємо збиток, при q=200 — нульовий прибуток, за q>200 — прибуток. Стала 20000 — фіксовані витрати.