ЛЕКЦІЯ № 4

Визначники. Системи лінійних рівнянь. Обернена матриця. Ранг матриці

Для студентів I курсу спеціальності «Інженерія програмного забезпечення»

Мета: навчитися обчислювати визначники, розв'язувати системи лінійних рівнянь методами Гаусса, Крамера й оберненої матриці; визначати ранг і досліджувати сумісність систем.

1 Основна теорема про розклад визначника

Нехай $A = (a_{ij})$ — квадратна матриця порядку n. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник матриці, утвореної викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця. **Алгебраїчне доповнення** цього елемента:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема (розклад за рядком або стовпцем). Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного фіксованого рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i\text{-й рядок}), \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (j\text{-й стовпець}).$$

Знаки алгебраїчних доповнень чергуються за схемою $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \end{pmatrix}$.

Приклад. Обчислити визначник 3×3 розкладом за першим рядком.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$D = 2(-8) - 1(-2) + 3(1) = -16 + 2 + 3 = \boxed{-11}.$$

Приклад. Обчислити визначник 4×4 розкладом за першим стовпцем.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

У першому стовпці три нулі, тому

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = \boxed{8}.$$

Зауваження. Для трикутної матриці визначник дорівнює добутку діагональних елементів.

2 Обчислення визначника методом нулів

Ідея методу: за допомогою додавання до одного рядка іншого, помноженого на число, створити нулі в обраному стовпці, а потім розкласти визначник за цим стовпцем. Така операція *не змінює* визначника. Перестановка двох рядків змінює його знак.

Приклад. Обчислити продиктований визначник методом нулів.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями R_1 та R_3 (знак визначника зміниться):

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Зробимо нулі під першим елементом: $R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$, $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1$:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 13 & -18 & -9 \\ 0 & 7 & -9 & -2 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 13 & -18 & -9 \\ 7 & -9 & -2 \\ 7 & -11 & -10 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо другий рядок від третього в останньому визначнику:

$$D = -\begin{vmatrix} 13 & -18 & -9 \\ 7 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}.$$

Розклад за третім рядком:

$$D = -\left[(-2)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 13 & -9 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + (-8)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 13 & -18 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}\right].$$

$$\begin{vmatrix} 13 & -9 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -26 + 63 = 37, \qquad \begin{vmatrix} 13 & -18 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -117 + 126 = 9.$$

$$D = -\big[2 \cdot 37 - 8 \cdot 9\big] = -2. \qquad \boxed{D = -2}$$

3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Система лінійних рівнянь з m рівнянь і n невідомих має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Розв'язок — впорядкований набір $(x_1, \dots, x_n)$, який перетворює кожне рівняння на правильну числову рівність.

Система **сумісна**, якщо має хоча б один розв'язок, і **несумісна**, якщо не має жодного. Сумісна система **означена**, якщо має рівно один розв'язок, і **неозначена**, якщо має більше одного розв'язку (для лінійної системи над $\mathbb{R}$ — нескінченно багато). Дві системи **рівносильні**, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.

Елементарні перетворення систем рівнянь

1. Переставити місцями два рівняння.
2. Помножити рівняння на ненульове число.
3. Додати до одного рівняння інше, помножене на довільне число.

Теорема. У результаті скінченної послідовності елементарних перетворень отримуємо систему, рівносильну початковій.

Пояснення. Кожне перетворення оборотне: перестановку можна повторити, множення на $c \neq 0$ скасувати множенням на $1/c$, додавання c разів іншого рівняння — відніманням c разів. Тому множина розв'язків не змінюється.

4 Метод Гаусса

Ідея: записати розширену матрицю $[A \mid b]$, прямим ходом виключити невідомі під провідними елементами, а потім зворотним ходом знайти невідомі. Якщо з'явиться рядок $[0 \ \cdots \ 0 \mid c]$, $c \neq 0$, система несумісна; якщо провідних змінних менше за кількість невідомих і суперечності немає, є вільні змінні.

Приклад. Розв'язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Виконаємо $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Поміняємо R_2 та R_3 і виконаємо $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right].$$

Зворотний хід: $-7z = -21 \Rightarrow z = 3$; $y - 2z = -4 \Rightarrow y = 2$; $x + y + z = 6 \Rightarrow x = 1$.

Відповідь: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Теорема про метод Гаусса. Елементарними перетвореннями будь-яку скінченну систему лінійних рівнянь можна привести до східчастого вигляду. За ним встановлюють, чи система несумісна, чи має єдиний розв'язок, чи має нескінченно багато розв'язків. Це випливає з рівносильності перетворень та зворотного ходу.

5 Метод Крамера для системи 2×2

Нехай

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Помножимо перше рівняння на b_2, друге — на b_1 і віднімемо друге від першого:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Аналогічно, виключаючи x, дістаємо $(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1$. Якщо $\Delta \neq 0$, то

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати систему за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x - 4y = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 + 6 = -14,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11.$$

$$x = \frac{-14}{1} = -14, \qquad y = \frac{-11}{1} = -11.$$

Перевірка: $2(-14) - 3(-11) = 5$, $3(-14) - 4(-11) = 2$.

Відповідь: $(x, y) = (-14, -11)$.

6 Формули Крамера для системи 3×3

Для $Ax = b$, де A — квадратна матриця 3×3 та $\Delta = \det A \neq 0$, маємо

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}},$$

де $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ — визначники, утворені заміною відповідного стовпця матриці A стовпцем вільних членів.

Приклад. Та сама система, що й у методі Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1) = -1 + 3 + 5 = 7.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6(1-2) - 1(-3-2) + 1(6+2) = -6 + 5 + 8 = 7.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-3-2) - 6(-2-1) + 1(4-3) = -5 + 18 + 1 = 14.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2-6) - 1(4-3) + 6(4+1) = -8 - 1 + 30 = 21.$$

$$x = \frac{7}{7} = 1, \qquad y = \frac{14}{7} = 2, \qquad z = \frac{21}{7} = 3.$$

Відповідь: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Загальна теорема Крамера. Якщо A — квадратна матриця порядку n і $\det A \neq 0$, то система $Ax = b$ має єдиний розв'язок $x_i = \Delta_i / \Delta$ ($i = 1, \ldots, n$). Якщо $\Delta = 0$, формули Крамера у такому вигляді не застосовуються; сумісність перевіряють іншими методами.

7 Обернена матриця

Квадратна матриця A^{-1} називається **оберненою** до A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. **Критерій існування:** A^{-1} існує тоді й лише тоді, коли $\det A \neq 0$ (еквівалентно $\operatorname{rank} A = n$). Обернена матриця, якщо існує, єдина.

Формула через алгебраїчні доповнення:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T}.$$

Практичний альтернативний спосіб: перетворити $[A \mid I]$ елементарними операціями рядків на $[I \mid A^{-1}]$.

Приклад. Знайти обернену матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2(-1) = 3 \neq 0.$$

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$C = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj } A = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Перевірка множенням: $AA^{-1} = I_3$.

8 Матричний метод розв'язування СЛАР

Якщо система записана як $AX = b$ і $\det A \neq 0$, то, помноживши обидві частини зліва на A^{-1}, одержуємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}b \quad \Longrightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}b}.$$

Приклад. Розв'язати вже розглянуту систему матричним методом.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 7.$$

Матриця алгебраїчних доповнень і приєднана матриця:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{adj } A = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6+9+4 \\ 18-6+2 \\ 30-3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

9 Мінори та ранг матриці

Мінор порядку r — визначник будь-якої квадратної підматриці $r \times r$, утвореної вибором r рядків і r стовпців даної матриці. **Ранг матриці** $\operatorname{rank} A$ — найбільший порядок її ненульового мінора; для нульової матриці ранг дорівнює нулю.

Теорема. Елементарні перетворення рядків (або стовпців) не змінюють рангу матриці. Зокрема, ранг дорівнює кількості ненульових рядків її східчастого вигляду.

Пояснення. Кожне елементарне перетворення — множення на оборотну елементарну матрицю, а оборотні перетворення зберігають лінійну незалежність рядків та їхній ранг.

Приклад. Обчислити ранг матриці.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Є два ненульові рядки в східчастому вигляді, тому $\boxed{\operatorname{rank} B = 2}$. Також мінор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, а визначник третього порядку дорівнює нулю.

10 Теорема Кронекера–Капеллі

Нехай A — матриця коефіцієнтів системи $AX = b$, а $[A \mid b]$ — розширена матриця.

Теорема. Система сумісна тоді й лише тоді, коли

$$\boxed{\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b]}.$$

Наслідок. Якщо спільний ранг дорівнює r, а кількість невідомих — n, то при $r = n$ система має єдиний розв'язок; при $r < n$ — нескінченно багато розв'язків, що залежать від $n - r$ вільних параметрів. Якщо ранги різні, розв'язків немає.

Приклад. Дослідити систему з єдиним розв'язком.

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ 3x + 2z = 8. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Отже, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = 3 = n$. Зворотний хід:

$$-2z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}, \qquad -3y + z = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2},$$
$$x + y + z = 2 \Rightarrow x = 3.$$

Відповідь: $(x, y, z) = \left(3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Приклад. Дослідити несумісну систему.

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ 3x + 4z = 8. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Останній рядок означає $0 = 1$ — суперечність. Тому

$$\boxed{\operatorname{rank} A = 2, \qquad \operatorname{rank}[A \mid b] = 3};$$

система **несумісна**.

Приклад. Додатково: випадок нескінченної кількості розв'язків.

Замінимо в попередній системі останню праву частину на 7:

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ 3x + 4z = 7. \end{cases}$$

Третє рівняння — сума перших двох. Ранги обох матриць дорівнюють $2 < 3$, отже маємо один вільний параметр. Нехай $z = t$. Тоді

$$\begin{cases} x + y = 2 - t, \\ 2x - y = 5 - 3t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{7 - 4t}{3}, \quad y = \frac{t - 1}{3}.$$

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{7 - 4t}{3}, \frac{t - 1}{3}, t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Підсумок лекції

Головні формули:

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij}, \qquad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\ (\Delta \neq 0), \qquad X = A^{-1} b,$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}, \qquad AX = b \text{ сумісна } \iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b].$$

Запитання студентам: Чому метод Крамера не можна застосувати при $\det A = 0$? Як метод Гаусса допомагає знайти ранг? Який рядок розширеної матриці свідчить про несумісність?

НАСТУПНИЙ РОЗДІЛ
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ