Практичне заняття № 4

Метод Гаусса

Спеціальність: «Інженерія програмного забезпечення»

Мета. Навчитися розв’язувати системи лінійних рівнянь методом Гаусса, визначати сумісність систем та записувати загальний розв’язок.

Короткі теоретичні відомості

Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих шляхом елементарних перетворень рядків розширеної матриці. Можна міняти рядки місцями, множити рядок на ненульове число та додавати до нього кратний іншого рядка. Після прямого ходу виконуємо зворотний хід. Рядок $[0 \ \dots \ 0 \mid b]$, де $b \neq 0$, означає, що система несумісна. За наявності вільних невідомих система має нескінченно багато розв’язків.

Розв’язання аудиторних завдань

Приклад 1. Система двох рівнянь із двома невідомими

Умова. Розв’язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання. Записуємо розширену матрицю системи:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Від другого рядка віднімаємо подвоєний перший: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right].$$

Отримали східчасту матрицю. **Зворотний хід:** із другого рядка $-3x_2 = -9$, отже $x_2 = 3$. Із першого рядка $x_1 + x_2 = 5$, тому $x_1 = 5 - 3 = 2$.

$$\boxed{x_1 = 2, \qquad x_2 = 3.}$$

Перевірка: $2 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 - 3 = 1$. Обидві рівності виконуються. Система має єдиний розв’язок.

Приклад 2. Система трьох рівнянь із трьома невідомими

Умова. Розв’язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв’язання. Складаємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

Крок 1. Занулюємо елементи першого стовпця під ведучою одиницею: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Крок 2. Занулюємо елемент другого стовпця під ведучою одиницею: $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right].$$

Зворотний хід. Із третього рядка $-x_3 = -3$, отже $x_3 = 3$. Із другого рядка $x_2 - x_3 = -1$, тому $x_2 = 2$. Із першого рядка $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, тому $x_1 = 1$.

$$\boxed{x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3.}$$

Перевірка: $1 + 2 + 3 = 6$, $2 + 6 + 3 = 11$, $1 - 2 + 6 = 5$. Усі рівності виконуються. Система має єдиний розв'язок.

Завдання № 1.127

Умова. Розв'язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Крок 1. Виконуємо перетворення $R_2 \leftarrow R_2 - (1)R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Крок 2. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (1)R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Крок 3. Виконуємо перетворення $R_2 \leftarrow \frac{1}{-2}R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Крок 4. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (-3)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Зворотний хід. З останніх ненульових рівнянь послідовно виражаємо ведучі невідомі через вільні. Вільні змінні можуть набувати довільних дійсних значень.

$$\boxed{\left(x_2 + \frac{1}{2},\ x_2,\ x_4 + \frac{1}{2},\ x_4\right)}$$

Перевірка. Підстановка знайдених значень у вихідну систему підтверджує всі рівності.

Завдання № 1.135

Умова. Розв'язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right]$$

Крок 1. Виконуємо перетворення $R_1 \leftrightarrow R_4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right]$$

Крок 2. Виконуємо перетворення $R_2 \leftarrow R_2 - (4)R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right]$$

Крок 3. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (2)R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right]$$

Крок 4. Виконуємо перетворення $R_4 \leftarrow R_4 - (2)R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right]$$

Крок 5. Виконуємо перетворення $R_2 \leftrightarrow R_4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \end{array}\right]$$

Крок 6. Виконуємо перетворення $R_2 \leftarrow \frac{1}{-11}R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \end{array}\right]$$

Крок 7. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (-13)R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & \frac{21}{11} & \frac{21}{11} \\ 0 & -29 & 19 & -39 \end{array}\right]$$

Крок 8. Виконуємо перетворення $R_4 \leftarrow R_4 - (-29)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & \frac{21}{11} & \frac{21}{11} \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & \frac{35}{11} \end{array}\right]$$

Крок 9. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow \frac{1}{\frac{21}{11}}R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & \frac{35}{11} \end{array}\right]$$

Крок 10. Виконуємо перетворення $R_4 \leftarrow R_4 - (\frac{35}{11})R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Зворотний хід. З останніх ненульових рівнянь послідовно виражаємо ведучі невідомі через вільні.

$$\boxed{(3,\ 2,\ 1)}$$

Перевірка. Підстановка знайдених значень у вихідну систему підтверджує всі рівності.

Завдання № 1.141

Умова. Розв'язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Крок 1. Виконуємо перетворення $R_2 \leftarrow R_2 - (1)R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Крок 2. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (1)R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Крок 3. Виконуємо перетворення $R_2 \leftarrow \frac{1}{-2}R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Крок 4. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (4)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Зворотний хід. З останніх ненульових рівнянь послідовно виражаємо ведучі невідомі через вільні. Вільні змінні можуть набувати довільних дійсних значень.

$$\boxed{(2x_2 - x_3,\ x_2,\ x_3,\ 1)}$$

Перевірка. Підстановка знайдених значень у вихідну систему підтверджує всі рівності.

Завдання № 1.145

Умова. Розв’язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Розв’язання. Записуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Крок 1. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (1)R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Крок 2. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow R_3 - (5)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Крок 3. Виконуємо перетворення $R_4 \leftarrow R_4 - (-7)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right]$$

Крок 4. Виконуємо перетворення $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right]$$

Крок 5. Виконуємо перетворення $R_4 \leftarrow R_4 - (-4)R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Зворотний хід. З останніх ненульових рівнянь послідовно виражаємо ведучі невідомі через вільні. Вільні змінні можуть набувати довільних дійсних значень.

$$\boxed{(-8,\ x_4 + 3,\ 2x_4 + 6,\ x_4)}$$

Перевірка. Підстановка знайдених значень у вихідну систему підтверджує всі рівності.

Домашнє завдання

Розв’язати методом Гаусса систему № 1.128 з вихідного переліку домашніх завдань. Записати розширену матрицю, показати прямий і зворотний хід та зробити висновок про кількість розв’язків.

Завдання № 1.128

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$