ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

Взаємне розташування прямих. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої

Дисципліна: Вища математика. **Мета:** навчитися визначати взаємне розташування прямих, їхні кути й точки перетину, складати рівняння прямих та обчислювати відстані.

Короткі теоретичні відомості

Загальне рівняння прямої має вигляд **Ax + By + C = 0**, де A і B одночасно не дорівнюють нулю. Вектор (A; B) є нормальним до прямої. Для прямої y = kx + b число k називають кутовим коефіцієнтом.

Для двох прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$: паралельність означає $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$; перпендикулярність означає $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Паралельні прямі збігаються, коли всі три коефіцієнти пропорційні.

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|, \qquad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Якщо $1 + k_1k_2 = 0$, прямі перпендикулярні, а кут між ними становить 90°. Кут між прямими зазвичай беруть менший із двох утворених кутів.

Завдання 1. Визначити взаємне розташування прямих 2x − 3y + 5 = 0 та 4x − 6y − 7 = 0.

Порівнюємо коефіцієнти при x та y: друга пара дорівнює подвоєній першій, тому нормальні вектори пропорційні. Але вільні члени не мають такого співвідношення: $2 \cdot 5 = 10 \neq -7$. Отже, спільних точок немає.

$$2 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3) = 0, \qquad 2 \cdot 5 \neq -7$$

Відповідь: прямі паралельні та не збігаються.

Завдання 2. Визначити взаємне розташування прямих 3x + 2y − 4 = 0 та 2x − 3y + 1 = 0.

Перевіряємо скалярний добуток нормальних векторів (3; 2) і (2; −3). Він дорівнює нулю, тому нормалі взаємно перпендикулярні. Отже, і самі прямі перпендикулярні.

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 6 - 6 = 0$$

Відповідь: прямі перпендикулярні.

Завдання 3. Знайти точку перетину прямих x + 2y − 7 = 0 та 3x − y − 7 = 0.

Перепишемо рівняння як систему. Із другого рівняння y = 3x − 7. Підставимо в перше: x + 2(3x − 7) = 7, тобто 7x = 21. Тоді x = 3, y = 2. Перевірка: 3 + 4 − 7 = 0; 9 − 2 − 7 = 0.

$$x + 2y = 7, \quad 3x - y = 7 \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (3, 2)$$

Відповідь: (3; 2).

Завдання 4. Знайти гострий кут між прямими y = 2x + 1 та y = −x + 4.

Кутові коефіцієнти $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Підставляємо у формулу тангенса кута між прямими. Значення тангенса додатне, тому беремо гострий кут.

$$\tan\varphi = \left|\frac{-1-2}{1+2(-1)}\right| = 3$$

$$\varphi = \arctan 3 \approx 71.565^\circ$$

Відповідь: приблизно 71,57°.

Завдання 5. Знайти кут між прямими 2x − y + 3 = 0 та x + 3y − 5 = 0.

Виразимо y: перша пряма y = 2x + 3, друга y = −x/3 + 5/3. Тому $k_1 = 2$, $k_2 = -1/3$.

$$\tan\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{3}-2}{1+2(-\frac{1}{3})}\right| = 7$$

$$\varphi = \arctan 7 \approx 81.870^\circ$$

Відповідь: приблизно 81,87°.

Завдання 6. Скласти рівняння прямої через M(2; −3), паралельної прямій 3x − 4y + 7 = 0.

Паралельна пряма має такі самі коефіцієнти при x та y: 3x − 4y + C = 0. Оскільки M належить шуканій прямій, підставимо координати: 3 · 2 − 4 · (−3) + C = 0, звідки C = −18.

$$3x - 4y - 18 = 0$$

Відповідь: 3x − 4y − 18 = 0.

Завдання 7. Скласти рівняння прямої через A(1; 2), перпендикулярної до 2x + 5y − 10 = 0.

Задана пряма має кутовий коефіцієнт −2/5. Перпендикулярна до неї пряма має коефіцієнт 5/2. За формулою прямої через задану точку:

$$y - 2 = \frac{5}{2}(x-1) \quad\Longrightarrow\quad 5x - 2y - 1 = 0$$

Відповідь: 5x − 2y − 1 = 0.

Завдання 8. Знайти відстань від M(3; −2) до прямої 4x − 3y + 6 = 0.

Використовуємо формулу відстані від точки до прямої. У нашому випадку A = 4, B = −3, C = 6.

$$d = \frac{|4 \cdot 3 - 3(-2) + 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{24}{5} = 4.8$$

Відповідь: 24/5 = 4,8.

Завдання 9. Знайти відстань між паралельними прямими 3x − 4y + 5 = 0 та 3x − 4y − 10 = 0.

Коефіцієнти A = 3 і B = −4 однакові, тому прямі паралельні. Для таких рівнянь відстань дорівнює модулю різниці вільних членів, поділеному на довжину нормального вектора. Це випливає з формули відстані від довільної точки першої прямої до другої.

$$d = \frac{|5 - (-10)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Відповідь: 3.

Завдання 10. Знайти m, за якого прямі mx + 2y − 3 = 0 і 4x − 6y + 1 = 0: а) паралельні; б) перпендикулярні.

а) Для паралельності визначник із коефіцієнтів при x та y повинен дорівнювати нулю:

$$m(-6) - 4 \cdot 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{4}{3}$$

б) Для перпендикулярності скалярний добуток нормальних векторів дорівнює нулю:

$$4m + 2(-6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 3$$

Відповідь: а) m = −4/3; б) m = 3.

Завдання 11. Дано A(1; 1), B(5; 3), C(2; 6). Знайти рівняння BC, висоти з A та її довжину.

1. Напрямний вектор BC = (2 − 5; 6 − 3) = (−3; 3), тому нахил сторони BC дорівнює −1. Через B(5; 3) одержуємо y − 3 = −(x − 5).

$$BC: \quad x + y - 8 = 0$$

2. Висота з A перпендикулярна до BC. Її кутовий коефіцієнт дорівнює 1. Через A(1; 1) маємо y − 1 = x − 1, тобто y = x.

$$AH: \quad x - y = 0$$

3. Довжина висоти дорівнює відстані від A до прямої BC:

$$AH = \frac{|1 + 1 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Відповідь: BC: x + y − 8 = 0; висота: x − y = 0; довжина: 3√2.

Завдання 12. Економічна задача. Попит p = −0,2q + 120, пропозиція p = 0,3q + 20. Знайти рівновагу, кут і пояснити зміст.

1–2. У точці рівноваги ціни попиту і пропозиції однакові. Прирівнюємо праві частини та розв’язуємо рівняння: −0,2q + 120 = 0,3q + 20, тобто 100 = 0,5q, звідки q = 200. Підставляємо: p = −0,2 · 200 + 120 = 80.

$$(q_*, p_*) = (200, 80)$$

3. Кутові коефіцієнти дорівнюють −0,2 та 0,3. Обчислюємо гострий кут між прямими:

$$\tan\varphi = \left|\frac{0.3-(-0.2)}{1+(-0.2)(0.3)}\right| = \frac{25}{47}$$

$$\varphi = \arctan\frac{25}{47} \approx 28.01^\circ$$

4. Точка перетину означає ринкову рівновагу: за обсягу 200 одиниць ціна, яку готові платити покупці, дорівнює ціні, за якою виробники готові продавати, — 80 грошових одиниць.

5. Від’ємний нахил прямої попиту відображає зменшення бажаної ціни зі збільшенням обсягу; додатний нахил пропозиції — зростання ціни пропозиції зі збільшенням обсягу.

Відповідь: q = 200; p = 80; гострий кут приблизно 28,01°.

Питання для самоперевірки

Поясніть: (1) випадки взаємного розташування прямих; (2) умови паралельності та перпендикулярності; (3) пошук точки перетину; (4) формулу кута; (5) складання паралельної і перпендикулярної прямої; (6) формулу відстані до прямої; (7) відстань між паралельними прямими; (8) рівняння висоти трикутника; (9) економічний зміст рівноваги попиту і пропозиції.

ДОПОВНЕННЯ ДО ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ № 9

Косинус кута між прямими, заданими загальними рівняннями

Нехай дві прямі задані рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Їхні нормальні вектори мають координати (A_1; B_1) та (A_2; B_2). Косинус меншого кута φ між прямими обчислюємо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Модуль у чисельнику забезпечує $0° \le \varphi \le 90°$. Якщо чисельник дорівнює нулю, прямі перпендикулярні.

Завдання 13. Знайти косинус і гострий кут між прямими 3x + 4y − 2 = 0 та 4x − 3y + 7 = 0.

Розв’язання. Маємо $A_1 = 3$, $B_1 = 4$, $A_2 = 4$, $B_2 = -3$. Підставляємо у формулу:

$$\cos\varphi = \frac{|3\cdot 4 + 4\cdot(-3)|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{0}{25} = 0$$

Відповідь: cos φ = 0, φ = 90°. Прямі перпендикулярні.

Завдання 14. Знайти косинус і менший кут між прямими x + y − 3 = 0 та x + 2y + 1 = 0.

Розв’язання. Маємо $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 2$. Тоді:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 2|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18.43^\circ$$

Відповідь: cos φ = 3/√10 ≈ 0,9487; φ ≈ 18,43°.