ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Математичний аналіз · I курс · Інженерія програмного забезпечення

1. Короткі теоретичні відомості

Якщо $f'(x) > 0$ на проміжку, функція зростає; якщо $f'(x) < 0$, то спадає. Критичними називають внутрішні точки області визначення, де похідна дорівнює нулю або не існує. Зміна знака першої похідної з «$+$» на «$-$» означає локальний максимум, а з «$-$» на «$+$» — локальний мінімум.

Найбільше і найменше значення неперервної функції на сегменті знаходять порівнянням значень у кінцях сегмента та внутрішніх критичних точках. Зміна знака $f''(x)$ може вказувати на точку перегину. Теореми Ролля та Лагранжа пов'язують похідні зі значеннями функції на кінцях сегмента. Правило Лопіталя застосовують до невизначеностей $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ за відповідних умов.

2. Неявне та параметричне диференціювання

А. Знайти похідну неявно заданої функції:

$$x^2 + xy + y^2 = 7.$$

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини рівності за x:

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0, \qquad (x + 2y)y' = -(2x + y).$$

Відповідь. $y' = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}, \quad x + 2y \neq 0.$

Б. Знайти похідну неявно заданої функції:

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Розв'язання. Диференціюємо за x:

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy', \qquad (y^2 - 2x)y' = 2y - x^2.$$

Відповідь. $y' = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}, \quad y^2 \neq 2x.$

В. Знайти похідну параметрично заданої функції:

$$x = t^2 - 1, \qquad y = t^3 + 2t.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні за параметром:

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2.$$

Тому при $t \neq 0$ маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+2}{2t}.$$

Відповідь. При $t = 0$ дотична до кривої вертикальна.

Г. Додатковий приклад. Нехай $x = \cos t$, $y = \sin t$. Тоді

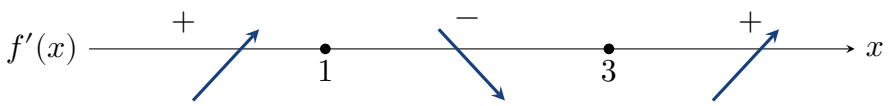
$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad \sin t \neq 0.$$

3. Основні завдання

Завдання 1. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ на монотонність.

Розв'язання. Знайдемо похідну та стаціонарні точки:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3), \qquad x = 1, \quad x = 3.$$

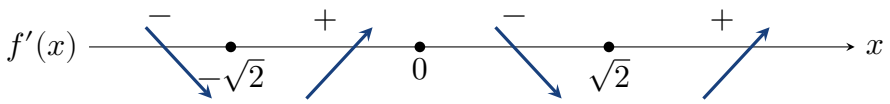


Відповідь. Функція зростає при $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ і спадає при $x \in (1; 3)$.

Завдання 2. Дослідити $f(x) = x^4 - 4x^2$ на монотонність.

Розв'язання. Маємо

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2), \qquad x = -\sqrt{2}, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{2}.$$

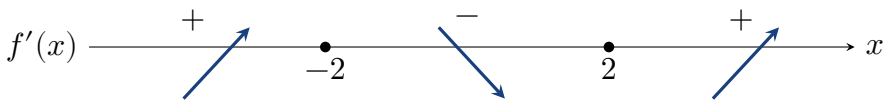


Відповідь. Функція спадає при $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$; зростає при $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Завдання 3. Знайти локальні екстремуми $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2), \qquad x = -2, \quad x = 2.$$



При $x = -2$ похідна змінює знак з «+» на «−», а при $x = 2$ — з «−» на «+».

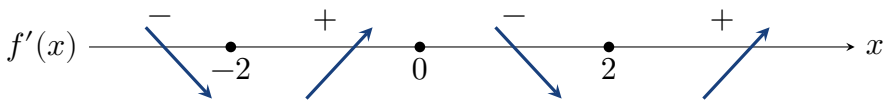
$$f(-2) = 21, \qquad f(2) = -11.$$

Відповідь. Локальний максимум $f(-2) = 21$; локальний мінімум $f(2) = -11$.

Завдання 4. Знайти локальні екстремуми $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 4x(x-2)(x+2), \qquad x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

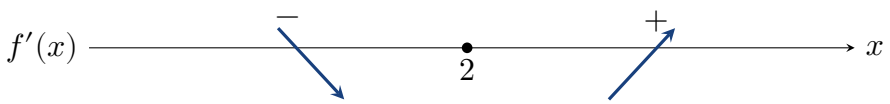


Відповідь. Локальні мінімуми $f(-2) = f(2) = -13$; локальний максимум $f(0) = 3$.

Завдання 5. Дослідити екстремуми $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x > 0$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}, \qquad x = 2.$$

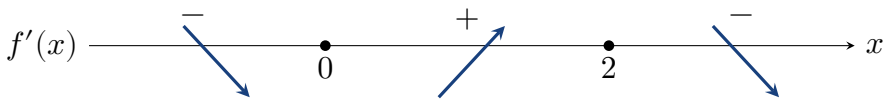


Відповідь. $\min\limits_{x>0} f(x) = f(2) = 4$. Максимуму немає.

Завдання 6. Дослідити екстремуми $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2-x), \qquad x = 0, \quad x = 2.$$



Відповідь. Локальний мінімум $f(0) = 0$; локальний максимум $f(2) = \frac{4}{e^2}$.

Завдання 7. Знайти найбільше і найменше значення $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на $[-1; 3]$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 3x(x-2), \qquad x = 0, \quad x = 2.$$

Порівнюємо значення у критичних точках і кінцях сегмента:

$$f(-1) = -3, \qquad f(0) = 1, \qquad f(2) = -3, \qquad f(3) = 1.$$

Відповідь.

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = f(-1) = f(2) = -3, \qquad \max_{x\in[-1;3]} f(x) = f(0) = f(3) = 1.$$

Завдання 8. Знайти найбільше і найменше значення $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на $[\frac{1}{2}; 4]$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff x = 1.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}, \qquad f(1) = 2, \qquad f(4) = \frac{17}{4}.$$

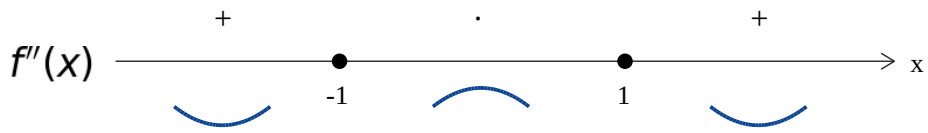
Відповідь.

$$\min_{x\in[\frac{1}{2};4]} f(x) = f(1) = 2, \qquad \max_{x\in[\frac{1}{2};4]} f(x) = f(4) = \frac{17}{4}.$$

Завдання 9. Дослідити опуклість та знайти точки перегину $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x, \qquad f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

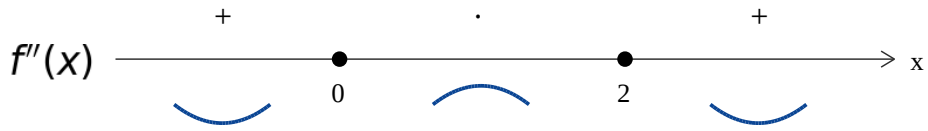


Тут знаки відповідають $f''(x)$: графік вгнутий (опуклий донизу) при $x \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ і опуклий догори при $x \in (-1;1)$. **Відповідь.** Точки перегину $(-1;-5)$ і $(1;-5)$.

Завдання 10. Знайти точки перегину $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Розв'язання.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \qquad f''(x) = 12x(x-2).$$



Знак $f''(x)$ змінюється в обох точках. **Відповідь.** Точки перегину $(0;0)$ і $(2;-16)$.

Завдання 11. Перевірити теорему Ролля для $f(x) = x^2 - 5x + 6$ на $[2;3]$.

Розв'язання. Функція неперервна на $[2;3]$ та диференційовна на $(2;3)$, причому $f(2) = f(3) = 0$. Отже, умови теореми Ролля виконано.

$$f'(x) = 2x - 5, \qquad f'(c) = 0 \iff c = \frac{5}{2} \in (2;3).$$

Відповідь. $c = \dfrac{5}{2}$.

Завдання 12. Для $f(x) = x^3$ на $[1;2]$ знайти точку c за теоремою Лагранжа.

Розв'язання.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{8 - 1}{1} = 7, \qquad 3c^2 = 7.$$

Відповідь. $c = \sqrt{\dfrac{7}{3}} \in (1;2)$.

Завдання 13. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$ за правилом Лопіталя.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, тому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{1} = 5.$$

Відповідь. 5.

Завдання 14. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ за правилом Лопіталя.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

Відповідь. 1.

Завдання 15. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$.

Розв'язання. Це невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. За правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Відповідь. 0.

Завдання 16. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ за правилом Лопіталя.

Розв'язання. Застосовуємо правило двічі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Завдання 17. Периметр прямокутника дорівнює 60. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі.

Розв'язання. Нехай сторони x і y. Тоді $2(x+y)=60$, звідки $y=30-x$ і $0<x<30$. Площа:

$$S(x)=x(30-x),\qquad S'(x)=30-2x=0\iff x=15.$$

Оскільки $S''(x)=-2<0$, площа найбільша при $x=15$. **Відповідь.** Квадрат зі стороною 15; найбільша площа 225.

Завдання 18. Знайти два додатні числа із сумою 20, добуток яких найбільший.

Розв'язання. Нехай числа x і $20-x$. Тоді

$$P(x)=x(20-x),\qquad P'(x)=20-2x=0\iff x=10,\qquad P''(x)=-2<0.$$

Відповідь. Числа 10 і 10; найбільший добуток 100.

Завдання 19. Мінімізувати $E(x)=x^2+\frac{16}{x}$, $x>0$ (колишнє завдання 23).

Розв'язання.

$$E'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=0\iff 2x^3=16\iff x=2.$$

$$E''(x)=2+\frac{32}{x^3}>0\quad(x>0),\qquad E(2)=4+8=12.$$

Відповідь. $\min\limits_{x>0}E(x)=E(2)=12$.

4. Додаткові завдання

Завдання 33. Довести нерівність $\ln x \le x - 1$ при $x > 0$.

Розв'язання. Розглянемо $h(x) = x - 1 - \ln x$. Тоді

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

При $0 < x < 1$ похідна від'ємна, а при $x > 1$ — додатна. Отже, h має глобальний мінімум у точці $x = 1$, де $h(1) = 0$. Тому $h(x) \ge 0$. **Відповідь.** $\ln x \le x - 1$; рівність лише при $x = 1$.

Завдання 34. Довести нерівність $e^x \ge 1 + x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай $h(x) = e^x - 1 - x$. Маємо

$$h'(x) = e^x - 1, \qquad h''(x) = e^x > 0.$$

Єдина стаціонарна точка $x = 0$ — точка глобального мінімуму, і $h(0) = 0$. **Відповідь.** $e^x \ge 1 + x$; рівність лише при $x = 0$.