Практична робота №4
Дискретні канали зв'язку

Мета роботи: Вивчити характеристики дискретних каналів зв'язку, опанувати програмні засоби їх розрахунку в MATLAB.

1.1. Теоретичні відомості

Дискретний канал зв'язку - це канал, у якого сигнали, що надходять на його вхід і які знімаються з його виходу, утворюють дискретні множини символів.

Властивості дискретного каналу визначено, якщо задані:

– алфавіти $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ і $\hat{A}=\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m\}$ вхідних та вихідних символів відповідно;

– середня швидкість передачі символів $\overline{V}$;

– або спільні ймовірності $p(a_i, \hat{a}_j)$ появи символів a_i і $\hat{a}_j$, або ймовірності $p(a_i)$ появи символів a_i і значення перехідних ймовірностей $p(\hat{a}_j|a_i)$ появи символу $\hat{a}_j$ після символу a_i, або, нарешті, ймовірності $p(\hat{a}_j)$ появи символів $\hat{a}_j$ та умовні апостеріорні| ймовірності $p(a_i|\hat{a}_j)$ передачі символу a_i при умові, що було прийнято символ $\hat{a}_j$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$.

У загальному випадку число вхідних символів m може відрізнятися від числа символів n на виході каналу.

Дискретний канал називається стаціонарним, якщо умовні ймовірності $p(\hat{a}_j|a_i)$ не залежать від часу.

Дискретний канал називається каналом без пам'яті, якщо перехідні ймовірності $p(\hat{a}_j|a_i)$ не залежить від того, які символи передавалися і приймалися раніше.

Дискретні стаціонарні канали без пам'яті часто називають просто дискретними без пам'яті.

Взаємна інформація $I(A,\hat{A})$ між вхідним та вихідним алфавітами A і $\hat{A}$ дискретного каналу без пам'яті - це середня кількість інформації, що міститься у прийнятому символі множини $\hat{A}$ відносно переданого символу множини A.

Вираз для визначення середньої взаємної інформації можна представити у двох еквівалентних формах.

Перша форма запису має вигляд

$$I(A,\hat{A}) = H(A) - H(A|\hat{A}) \qquad (5.1)$$

і включає наступні ентропії:

– ентропію джерела з алфавітом A

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\log p(a_i); \qquad (5.2)$$

– умовну ентропію, рівну середній кількості втраченої в каналі інформації, або ненадійність каналу

$$H(A|\hat{A}) = -\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j)\sum_{i=1}^{m} p(a_i|\hat{a}_j)\log p(a_i|\hat{a}_j). \qquad (5.3)$$

Друга форма запису визначається виразом

$$I(A,\hat{A}) = H(\hat{A}) - H(\hat{A}|A) \qquad (5.4)$$

до якого входять такі ентропії:

– ентропія множини вихідних символів $\hat{A}$

$$H(\hat{A}) = -\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j)\log p(\hat{a}_j); \qquad (5.5)$$

- умовна ентропія, рівна середній кількості марної частини інформації, що міститься в прийнятих символах через вплив перешкод, або ентропія шуму

$$H(\hat{A}|A) = -\sum_{i=1}^{m} p(a_i)\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j|a_i)\log p(\hat{a}_j|a_i). \qquad (5.6)$$

Залежності (5.1), (5.4) наочно ілюструються діаграмою, показаною на рис. 5.1.

Властивості взаємної інформації:

1. Взаємна інформація має властивість симетрії

$$I(A,\hat{A}) = I(\hat{A},A) \qquad (5.7)$$

тобто алфавіт $\hat{A}$ містить стільки ж інформації щодо A, як і алфавіт A щодо $\hat{A}$.

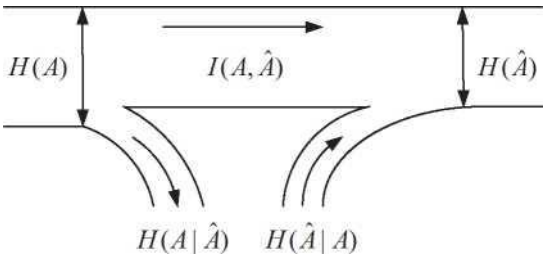


Рис. 5.1. Діаграма інформаційного потоку

2. Величина взаємної інформації обмежена нерівностями

$$0 \le I(A,\hat{A}) \le H(A). \qquad (5.8)$$

3. При обриві каналу, коли алфавіти A і $\hat{A}$ стають статистично незалежними, взаємна інформація перетворюється на нуль

$$I(A,\hat{A}) = 0, \qquad (5.9)$$

оскільки у формулах (5.1) і (5.4) умовні ентропії дорівнюють безумовним: $H(A|\hat{A}) = H(A)$, $H(\hat{A}|A) = H(\hat{A})$.

4. За відсутності перешкод взаємна інформація максимальна і дорівнює ентропії джерела

$$I(A,\hat{A}) = H(A), \qquad (5.10)$$

коли за реалізацією символу з алфавіту $\hat{A}$ можна однозначно відновити переданий символ з алфавіту A і в виразах (5.1) і (5.4) $H(A|\hat{A}) = H(\hat{A}|A) = 0$.

5. Ще однією еквівалентною формою запису для взаємної інформації є вираз

$$I(A,\hat{A}) = H(A) + H(\hat{A}) - H(A,\hat{A}), \qquad (5.11)$$

де

$$H(A,\hat{A}) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(a_i,\hat{a}_j)\log p(a_i,\hat{a}_j) \qquad (5.12)$$

– спільна ентропія алфавітів A і $\hat{A}$; $p(a_i,\hat{a}_j)$ – спільна ймовірність появи символів a_i і $\hat{a}_j$.

Вираз (5.11) легко отримати, якщо врахувати, що відповідно до рівності (2.13)

$$H(A,B) = H(B) + H(A|B)$$

спільна ентропія алфавітів A і $\hat{A}$ становить

$$H(A,\hat{A}) = H(\hat{A}) + H(A|\hat{A})$$

і, отже, умовна ентропія дорівнює

$$H(A|\hat{A}) = H(A,\hat{A}) - H(\hat{A}).$$

Підстановка у формулу (5.1) цього значення умовної ентропії дає вираз (5.11).

Розглянуті властивості зручно ілюструвати діаграмами Венна – Ейлера (рис. 5.2).

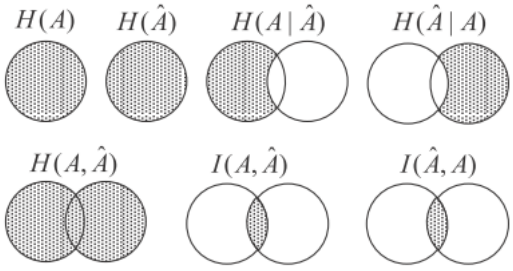


Рис. 2. Співвідношення між ентропіями

На цих діаграмах заштрихованими областями позначені ентропії $H(A)$ і $H(\hat{A})$ вхідного та вихідного алфавітів, умовні ентропії $H(A|\hat{A})$ і $H(\hat{A}|A)$, спільна ентропія $H(A,\hat{A})$, а також взаємна інформація $I(A,\hat{A})$ і $I(\hat{A},A)$.

Основні характеристики дискретного каналу без пам'яті:

1. Швидкість передачі по каналу зв'язку – це середня кількість інформації, одержувана на виході каналу в одиницю часу

$$I'(A,\hat{A}) = \frac{1}{\tau} I(A,\hat{A}) = \overline{V} I(A,\hat{A}), \tag{5.13}$$

де $I(A,\hat{A})$ – взаємна інформація між вхідним та вихідним алфавітами; $\overline{\tau}$, $\overline{V}$ – середня тривалість та швидкість передачі символів відповідно.

2. Пропускна здатність каналу зв'язку – це найбільша швидкість передачі інформації при заданих властивостях каналу

$$C = \max_{\mathbf{p}(A)} I'(A,\hat{A}) = \overline{V} \max_{\mathbf{p}(A)} I(A,\hat{A}), \tag{5.14}$$

взята за всіма можливими законами розподілу ймовірностей вхідних символів $\mathbf{p}(A) = \begin{pmatrix} p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_m) \end{pmatrix}$.

Швидкість передачі та пропускна здатність мають розмірність біт за секунду.

З математичної точки зору пошук пропускної здатності зводиться до пошуку розподілу ймовірності $\mathbf{p}(A)$ вхідних символів джерела, що забезпечує у виразі (5.14) максимум інформації

$$I_{\max} = \max_{\mathbf{p}(A)} I(A,\hat{A}), \tag{5.15}$$

при заданій матриці умовних перехідних ймовірностей

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1|a_1) & p(\hat{a}_2|a_1) & \cdots & p(\hat{a}_n|a_1) \\ p(\hat{a}_1|a_2) & p(\hat{a}_2|a_2) & \cdots & p(\hat{a}_n|a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(\hat{a}_1|a_m) & p(\hat{a}_2|a_m) & \cdots & p(\hat{a}_n|a_m) \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

та природних обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} p(a_i) = 1 \tag{5.17}$$

і

$$p(a_i) \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{5.18}$$

У загальному випадку для вирішення оптимізаційної задачі (5.15)—(5.18) необхідно використовувати чисельні методи. При цьому, оскільки цільова функція (5.15) є опуклою функцією як вхідного, так і вихідного розподілів ймовірностей, гарантується досягнення глобального максимуму.

Однак можливе і аналітичне обчислення пропускної здатності у випадках, коли матриця (5.16) має деякі специфічні властивості, що визначають модель дискретного каналу без пам'яті.

Дискретний канал називається симетричним по входу, якщо всі рядки матриці (5.16) є перестановками однієї і тієї ж множини ймовірностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. З цієї властивості випливає, що приватні умовні ентропії

$$H(\hat{A}|a_i) = -\sum_{j=1}^{n} p(\hat{a}_j|a_i) \log p(\hat{a}_j|a_i) = -\sum_{j=1}^{n} \pi_j \log \pi_j \qquad (5.19)$$

мають однакове значення для всіх вхідних символів a_i і, отже, шум в каналі однаковою мірою порушує передачу кожного з можливих вхідних символів.

Дискретний канал називається симетричним по виходу, коли всі стовпці матриці (5.16) є перестановками однієї й тієї ж безлічі ймовірностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. Звідси випливає, що для будь-якого симетричного по виходу каналу рівномірний розподіл $p(a_i) = \frac{1}{m}\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ на вході, як випливає із співвідношення $p(\hat{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} p(a_i) p(\hat{a}_j|a_i)$, призводить також до рівномірного розподілу ймовірностей на виході каналу $p(\hat{a}_j) = \frac{1}{n}\ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Доведено, що пропускна здатність дискретного симетричного по входу каналу без пам'яті задовольняє нерівності

$$C \le \overline{V}\left[\log n + \sum_{j=1}^{n} \pi_j \log \pi_j\right], \qquad (5.20)$$

де $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ – елементи кожного рядка матриці (5.16). В цьому випадку для матриць **П** певного виду при рівномірному розподілі ймовірностей символів на вході знак нерівності (5.20) може переходити на знак рівності.

Дискретний канал називається $m-$ічним ($m-$арним, $m-$позиційним) каналом без пам'яті, якщо число символів на його вході дорівнює числу вихідних символів і $m = n$. Для такого каналу матриця (5.16) є квадратною матрицею $m-$го порядку.

Дискретний $m-$ічний канал без пам'яті називається симетричним, якщо він симетричний як по входу, так і по виходу і, отже, елементи всіх рядків і стовпців матриці (5.16) є перестановками одної і тож самої множини ймовірностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$. Доведено, що пропускна спроможність такого каналу визначається виразом

$$C = \overline{V}\left[\log m + \sum_{i=1}^{m} \pi_i \log \pi_i\right] \qquad (5.21)$$

і досягається, коли розподіл ймовірностей на вході та виході каналу рівномірний

$$p(a_i) = p(\hat{a}_i) = \frac{1}{m}\ (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (5.22)$$

Розглянуті типи каналів без пам'яті мають такі важливі окремі випадки.

1. Симетричний $m-$ічний канал без пам'яті. У такого каналу $m = n$ і квадратна матриця перехідних ймовірностей

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1|a_1) & p(\hat{a}_2|a_1) & \cdots & p(\hat{a}_m|a_1) \\ p(\hat{a}_1|a_2) & p(\hat{a}_2|a_2) & \cdots & p(\hat{a}_m|a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p(\hat{a}_1|a_m) & p(\hat{a}_2|a_m) & \cdots & p(\hat{a}_m|a_m) \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-p & p/(m-1) & \cdots & p/(m-1) \\ p/(m-1) & 1-p & \cdots & p/(m-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p/(m-1) & p/(m-1) & \cdots & 1-p \end{pmatrix}, \qquad (5.23)$$

де p — ймовірність помилки прийому $m-$ічного символу.

Пропускна здатність такого каналу згідно (5.21) визначається виразом

$$C = \overline{V}\left[\log m + (1-p)\log(1-p) + p\log\frac{p}{m-1}\right] \qquad (5.24)$$

і досягається при рівномірному розподілі ймовірностей символів на вході та виході каналу (5.22).

Властивості пропускної спроможності (5.24):

– пропускна спроможність обмежена нерівностями

$$0 \le C \le \overline{V}\log m; \qquad (5.25)$$

– при $p = 0$, коли перешкоди у каналі відсутні, пропускна здатність дорівнює найбільшій продуктивності джерела інформації

$$C = \overline{V}\log m. \qquad (5.26)$$

Такий канал часто називають симетричним каналом без перешкод;

– при $p = \frac{m-1}{m}$, коли в (5.23) $p(\hat{a}_j|a_i) = \frac{1}{m}$, відбувається обрив каналу і $C = 0$.

2. Двійковий симетричний канал без пам'яті. Даний канал є окремим випадком $m-$ічного симетричного каналу при $m = 2$, коли матриця перехідних ймовірностей (5.23) має особливо простий вигляд

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1|a_1) & p(\hat{a}_2|a_1) \\ p(\hat{a}_1|a_2) & p(\hat{a}_2|a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad (5.27)$$

де p – ймовірність помилки прийомі одного двійкового символу (ймовірність помилки на біт інформації).

Для ілюстрації процесу передачі двійкових символів по такому каналу зазвичай використовується діаграма перехідних ймовірностей, показана на рис. 5.3.

Формула для пропускної здатності випливає з виразу (5.24) при $m = 2$ і має вигляд

$$C = \overline{V}\left[1 + (1-p)\log(1-p) + p\log p\right]. \qquad (5.28)$$

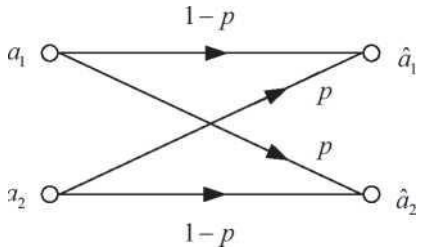


Рис. 5.3. Діаграма перехідних ймовірностей двійкового симетричного каналу без пам'яті

Пропускна здатність (5.28) досягається при $p(a_i) = p(\hat{a}_i) = 1/2$ $(i = 1,2)$ і має такі властивості:

– пропускна спроможність обмежена нерівностями

$$0 \le C \le \overline{V}; \qquad (5.29)$$

– за відсутності перешкод, коли $p = 0$, пропускна здатність дорівнює середій швидкості модуляції

$$C = \overline{V}; \qquad (5.30)$$

–- при обриві каналу, коли $p = 1/2$, пропускна здатність дорівнює нулю $C = 0$.

3. Двійковий симетричний канал зі стиранням. Цей канал є симетричним по входу, але несиметричним по виходу і має розмірності $m = 2$ і $n = 3$. Він відрізняється від двійкового симетричного каналу без пам'яті наявністю додаткового вихідного символу $\hat{a}_3$ (символу стирання), який з ймовірністю q може з'явитися під час передачі кожного з двох вхідних символів. Матриця перехідних ймовірностей (5.16) має вигляд

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1|a_1) & p(\hat{a}_2|a_1) & p(\hat{a}_3|a_1) \\ p(\hat{a}_1|a_2) & p(\hat{a}_2|a_2) & p(\hat{a}_3|a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p-q & p & q) \\ p & 1-p-q & q \end{pmatrix}, \qquad (5.31)$$

де p – можливість помилкового прийому двійкового символу, q – можливість стирання символу.

З матриці (5.31) видно, що поряд з рішеннями про переданий символ a_1 або a_2, тут іноді приймається рішення про стирання прийнятого символу. Стирання відбувається у разі, коли переданий символ спотворений так, що не може бути упізнаний і вхідними подіями можуть бути символи a_1 або a_2 з рівними ймовірностями.

Діаграма перехідних ймовірностей показана на рис. 5.4.

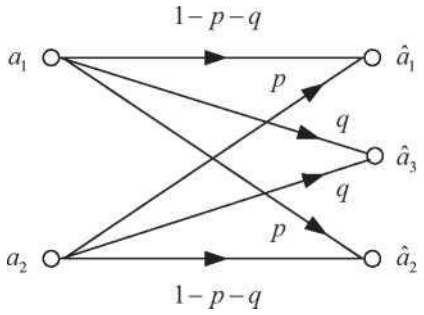


Рис. 5.4. Діаграма перехідних ймовірностей двійкового симетричного каналу зі стирання

Пропускна здатність визначається виразом

$$C = \overline{V}\{(1-q)[1-\log(1-q)] + (1-p-q)\log(1-p-q) + p\log p] \qquad (5.32)$$

і досягається при $p(a_i) = 1/2\,(i = 1,2)$, коли розподіл вихідних символів $p(\hat{a}_1) = p(\hat{a}_2) = 1/2(1-q)$, $p(\hat{a}_3) = q$.

Властивості пропускної спроможності (5.32):

– пропускна спроможність обмежена нерівностями

$$0 \le C \le \overline{V}(1-q); \qquad (5.33)$$

– при $p = 0$, коли перешкоди у каналі відсутні, пропускна здатність дорівнює

$$C = \overline{V}(1-q); \qquad (5.34)$$

– при обриві каналу, коли умовні перехідні ймовірності $p(\hat{a}_j|a_i)$ $p(\hat{a}_1|a_i) = p(\hat{a}_2|a_i)\,(i = 1,2)$ і $p = (1-q)/2$, пропускна здатність дорівнює нулю $C = 0$.

При $q = 0$ формула (5.32) перетворюється на вираз (5.28) для пропускної спроможності двійкового симетричного каналу.

1.2. Розрахункові завдання

Завдання 6.1.

Ймовірності появи символів джерела з алфавітом A становлять: $p(a_1) = 0{,}7$; $p(a_2) = 0{,}2$; $p(a_3) = 0{,}1$. Матриця умовних перехідних ймовірностей дискретного каналу без пам'яті має вигляд

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1|a_1) & p(\hat{a}_2|a_1) & p(\hat{a}_3|a_1) \\ p(\hat{a}_1|a_2) & p(\hat{a}_2|a_2) & p(\hat{a}_3|a_2) \\ p(\hat{a}_1|a_3) & p(\hat{a}_2|a_3) & p(\hat{a}_3|a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропію вхідних символів $H(A)$ та ентропію шуму $H(\hat{A}|A)$; ентропію вихідних символів $H(\hat{A})$ і ненадійність каналу $H(A|\hat{A})$; спільну ентропію $H(A,\hat{A})$ та середню взаємну інформацію $I(A,\hat{A})$ трьома способами за формулами (5.1), (5.4) та (5.11).

```
%Script_5_1
%Розрахунок взаємної інформації дискретного каналу без пам'яті
%при заданому векторі ймовірностей символів вхідного алфавіту
%і матриці умовних перехідних ймовірностей П
clear all; close all; clc
%Завдання анонімної функції
%-------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%-------------------------
%Завдання ймовірностей символів вхідного алфавіту
p_in=[.7 .2 .1];
disp('Ймовірності символів вхідного алфавіту:')
disp(p_in)
%Завдання умовних перехідних ймовірностей
PI=[.98 .01 .01; .1 .75 .15; .2 .3 .5];
disp('Матриця умовних перехідних ймовірностей П):')
disp(PI)
%Визначення об'єму алфавіту
[m, n]=size(PI);
%Перевірка рівності m = n
if m~=n
disp('Матриця має бути квадратною!')
end
disp('Обсяг алфавіту:')
disp(m)
%Розрахунок ентропії вхідного алфавіту
H_in=sum(fun(p_in));
disp('Ентропія вхідного алфавіту, біт/символ:')
disp(H_in)
%Розрахунок ентропії шуму
H_noise=sum(p_in'.*sum(fun(PI),2));
disp('Ентропія шуму, біт/символ:')
disp(H_noise)
%Розрахунок елементів матриці спільних ймовірностей
P_joint=bsxfun(@times,PI,p_in(:));
```

```
    disp('Матриця спільних ймовірностей символів:')
    disp(P_joint)
    %Розрахунок ймовірностей символів вихідного
алфавіту
    P_out=sum(P_joint,1);
    disp('Ймовірності символів вихідного алфавіту:')
    disp(p_out)
    %Розрахунок ентропії вихідного алфавіту
    H_out=sum(fun(p_out));
    disp('Ентропія вихідного алфавіту, біт/символ:')
    disp(H_out)
    %Розрахунок елементів матриці умовних апостеріорних
ймовірностей
    P_ap=bsxfun(@rdivide,P_joint,p_out(:)');
    disp('Матриця умовних апостеріорних ймовірностей:')
    disp(P_ap)
    %Розрахунок ненадійності каналу
    H_insec=sum(p_out.*sum fun(P_ap),1));
    disp('Ненадійність каналу, біт/символ:');
    disp(H_insec)
    %Розрахунок взаємної інформації
    I=H_in-H_insec;
    disp('Взаємна інформація, біт/символ - перша
форма:')
    disp(I)
    I=H_out-H_noise;
    disp('Взаємна інформація, біт/символ - друга
форма:')
    disp(I)
    %Розрахунок спільної ентропії
    H_joint=sum(sum(fun(P_joint)));
    disp('Спільна ентропія вхідного та вихідного
алфавітів, біт/символ:')
    disp(H_joint)
    I=H_in+H_out-H_joint;
    disp('Взаємна інформація, біт/символ - загальна
формула:')
    disp(I)
```

Завдання 5.2. Ймовірності появи символів джерела з алфавітом A становлять: $p(a_1) = 0{,}5$; $p(a_2) = 0{,}3$; $p(a_3) = 0{,}2$. Матриця умовних перехідних ймовірностей дискретного каналу без пам'яті має вигляд

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}15 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропію вхідних символів $H(A)$ та ентропію шуму $H(\hat{A}|A)$; ентропію вихідних символів $H(\hat{A})$ і ненадійність каналу $H(A|\hat{A})$; спільну ентропію $H(A,\hat{A})$; середню взаємну інформацію $I(A,\hat{A})$ трьома способами.

Вказівка: використовувати `Script_5_1`.

Завдання 5.3. Ймовірності появи символів джерела з алфавітом A становлять: $p(a_1) = 0{,}9$; $p(a_2) = 0{,}1$. Матриця умовних перехідних ймовірностей дискретного каналу без пам'яті має вигляд

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p(\hat{a}_1|a_1) & p(\hat{a}_2|a_1) \\ p(\hat{a}_1|a_2) & p(\hat{a}_2|a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}84 & 0{,}16 \\ 0{,}04 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропію вхідних символів $H(A)$, ненадійність каналу $H(A|\hat{A})$; і середню взаємну інформацію $I(A,\hat{A})$ по формулі (5.1).

Обчислити максимальне значення $I_{\max}$ взаємної інформації за формулою (5.15) з урахуванням обмежень (5.17), (5.18) та знайти розподіл ймовірностей вхідного алфавіту, що забезпечує його досягнення.

Вказівка: файл зовнішньої функції `fun_H_insec` зберегти до його використання в основній програмі.

```
%Script_5_3
%Розрахунок взаємної інформації дискретного каналу
без пам'яті
%при заданому векторі ймовірностей символів
вхідного алфавіту
%і матриці умовних перехідних ймовірностей П
%Визначення максимального значення взаємної
інформації
% та розподілу ймовірностей вхідного алфавіту, що
забезпечує
%досягнення максимуму
%Використовується зовнішня функція fun_H_insec
clear all; close all; clc
%Завдання анонімної функції
%--------------------------
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%--------------------------
```

```
%Завдання ймовірностей символів вхідного алфавіту
p_in=[.9 .1];
disp('Ймовірності символів вхідного алфавіту:')
disp(p_in)
%Завдання умовних перехідних ймовірностей
PI=[.84 .16;.04 .96];
disp('Матриця умовних ймовірностей П:')
disp(PI)
%Визначення обсягу алфавіту
m=length(p_in);
disp('Обсяг алфавіту:')
disp(m)
%Розрахунок ентропії вхідного алфавіту
H_in=sum(fun(p_in));
disp('Ентропія вхідного алфавіту, біт/символ:')
disp(H_in)
%Розрахунок елементів матриці спільних ймовірностей
P_joint=bsxfun(@times,PI,p_in(:));
disp('Матриця спільних ймовірностей символів:')
disp(P_joint)
%Розрахунок ймовірностей символів вихідного
алфавіту
P_out=sum(P_joint,1);
disp('Ймовірності символів вихідного алфавіту:')
disp(p__ut)
%Розрахунок елементів матриці умовних апостеріорних
ймовірностей
P_ap=bsxfun(@rdivide,P_joint,p_out(:)');
disp('Матриця умовних апостеріорних ймовірностей:')
disp(P_ap)
%Розрахунок ненадійності каналу
H_insec=sum(p_out.* sum(fun(P_ap),1));
disp('Ненадійність каналу, біт/символ:');
disp(H_insec)
%Розрахунок взаємної інформації
I=H_in-H_insec;
disp('Взаємна інформація, біт/символ:')
disp(I)
%Завдання цільової функції
fun_I_max=@(p_in)-(sum(fun(p_in))-
fun_H_insec(p_in,PI));
%Завдання лінійних обмежень-рівностей
disp('Обмеження цільової функції:')
A=-eye(m);
```

```
    disp('Матриця лінійних обмежень-рівностей:')
    disp(A)
    b=zeros(m,1);
    disp('Вектор лінійних обмежень-рівностей:')
    disp(b)
    %Завдання лінійних обмежень-нерівностей
    Aeq=ones(1,m);
    disp('Матриця лінійних обмежень-нерівностей:')
    disp(Aeq)
    beq=1;
    disp('Вектор лінійних обмежень-нерівностей:')
    disp(beq)
    %Обчислення екстремуму
    options=optimoptions(@fmincon);
    [p,I_max]=fmincon(fun_I_max,p_in,A,b,Aeq,beq);
    disp('Максимальне значення взаємної
інформації,біт/символ: ')
    disp(I_max)
    disp ('Оптимальний розподіл ймовірностей вхідних
символів:')
    disp(p)


    function y=fun_H_insec(p,PI)
    %Розрахунок ненадійності дискретного каналу H_insec
    %p - вектор ймовірностей символів
    %PI - матриця перехідних ймовірностей П
    %Завдання анонімної функції
    %-------------------------
    fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
    %-------------------------
    P=bsxfun(@times,PI,p(:));
    pa=sum(P,1);
    PA=bsxfun(@rdivide,P,pa(:)');
    y=sum(pa.*sum(fun(PA), 1));
```

Завдання 5.4. Ймовірності появи символів джерела з алфавітом A становлять: $p(a_1)=0{,}8$; $p(a_2)=0{,}2$. Матриця умовних перехідних ймовірностей дискретного каналу без пам'яті має вигляд

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix}0{,}625 & 0{,}375\\ 0{,}125 & 0{,}875\end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропію вхідних символів, ненадійність каналу $H(A|\hat{A})$; і середню взаємну інформацію $I(A,\hat{A})$ по формулі (5.1).

Обчислити максимальне значення $I_{\max}$ взаємної інформації за формулою (5.15) з урахуванням обмежень (5.17), (5.18) та знайти розподіл ймовірностей вхідного алфавіту, що забезпечує його досягнення.

Вказівка: файл зовнішньої функції `fun_H_insec` зберегти до його використання в основній програмі.

Вказівка: використовувати `Script_5_3`.

Завдання 5.5. За формулою (5.24) побудувати графіки залежності нормованої пропускної здатності $C/\overline{V}$ симетричного каналу без пам'яті від ймовірності помилки p при значеннях обсягу алфавіту $m = 2, 4, 8, 16$. Розрахувати значення ймовірності помилки при обриві каналу.

```
%Script_5_5
%Розрахунок пропускної спроможності m-ічного симетричного каналу без пам'яті
%при різних значеннях m
clear all; close all; clc
%Завдання значень ймовірності помилки
p=0:.001:1;
%Визначення довжини вектора
np=length(p);
%Завдання значень m
vm=[2 4 8 16];
%Визначення довжини вектора
nm=length(vm);
%Завдання розмірностей масивів
pe=zeros(1,nm);
c=zeros(nm,np);
str=cell(1,nm);
%Розрахунок пропускної спроможності
for k=1:nm m=vm(k);
pe(k)=(m-1)/m;
c(k,:)=log2(m)+(1-p).*log2(1-p)+p.*log2(p/(m-1));
str{k}=['m = ',num2str(m)];
end
%Побудова графіків
plot(p,c)
grid
hold on
plot(pe,0,'r.')
```

```
    xlabel('Ймовірність помилки p')
    ylabel('Пропускна здатність C/V, біт/символ')
    title('Пропускна здатність m-ічного симетричного
каналу без пам'яті')
    legend(str)
    %Виведення значень ймовірності помилки при обриві
каналу
    disp('Ймовірності помилки при обриві каналу:')
    A=[vm;pe];
    fprintf('%3s %4s\n','m','p');
    fprintf('%3i %5.4f\n',A);
```

Завдання 5.6. За формулою (5.28) побудувати графік залежності нормованої пропускної спроможності $C/\overline{V}$ двійкового симетричного каналу без пам'яті від ймовірності помилки p.

```
    %Script_5_6
    %Розрахунок пропускної спроможності двійкового
симетричного каналу без пам'яті
    clear all; close all; clc
    %Завдання значень ймовірності помилки
    p=0:.001:1;
    %Розрахунок пропускної спроможності
    c=1+(1-p).*log2(1-p)+p.*log2(p);
    %Побудова графіка
    plot(p,c)
    grid
    xlabel('Ймовірність помилки p')
    ylabel('Пропускна здатність C/V')
    title('Пропускна здатність двійкового симетричного
каналу без пам'яті')
```

Завдання 5.7. За формулою (5.32) побудувати графіки залежності нормованої пропускної спроможності $C/\overline{V}$ двійкового симетричного каналу зі стиранням від ймовірності помилки p $0 \le p \le 1/2$ ($0 < p < 1/2$) при значеннях ймовірності стирання прийнятого символу $q = 0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}5$. Розрахувати значення ймовірності помилки під час обриву каналу.

```
    %Script_5_7
    %Розрахунок пропускної спроможності двійкового
симетричного каналу зі стираннями
    clear all; close all; clc
    %Завдання ймовірності помилки
```

```
    p=0:.001:1/2;
    %Визначення довжини вектора
    np=length(p);
    %Завдання значень q
    vq=[0 .2 .4 .5];
    %Визначення довжини вектора
    nq=length(vq);
    %Завдання розмірностей масивів
    pe=zeros(1,nq);
    c=zeros(nq,np);
    str=cell(1,nq);
    %Розрахунок пропускної спроможності
    for k=1:nq
    q=vq(k);
    pe(k)=(1-q)/2;
    c(k,:)=(1-q)*(1-log2(1-q))+(1-p-q).*log2(1-p-
q)+p.*log2(p);
    str{k}=['q = ',num2str(q)];
    end
    %Побудова графіків
    plot(p,c)
    grid
    hold on
    plot(pe,0,'r.')
    xlabel('Ймовірність помилки p')
    ylabel('Пропускна здатність C/V')
    title('Пропускна здатність двійкового симетричного
каналу зі стиранням')
    legend(str)
    ylim([0 1])
    %Виведення значень ймовірності помилки при обриві
каналу
    disp('Ймовірності помилки при обриві каналу:')
    A=[vq;pe];
    fprintf('%3s%6s\n','q','p');
    fprintf('%5.4f %5.4f\n',A);
```

1.3. Звіт та контрольні питання

Звіт з лабораторної роботи оформляється у вигляді документа MS Word і повинен містити:

1. Назва лабораторної роботи (шрифт Times New Roman).

2. Результати виконання всіх розрахункових завдань, включаючи лістинги m-файлів, що копіюються з вікна **Editor**, результати їх виконання,

що копіюються з вікна **Command Window** (шрифт Courier New), а також отримані графіки, що копіюються з вікна **Figure** за командою **Edit | Copy Figure**.

Захист лабораторної роботи проводиться на основі поданого звіту та відповідей на контрольні питання з наступного списку:

1. Дайте визначення дискретного каналу зв'язку.
2. Перерахуйте, які параметри визначають властивості дискретного каналу зв'язку.
3. Який дискретний канал називається стаціонарним?
4. Що таке дискретний канал без пам'яті?
5. Дайте визначення взаємної інформації $I(A,\hat{A})$ між вхідним та вихідним алфавітами A і $\hat{A}$ дискретного каналу без пам'яті.
6. Наведіть першу форму запису для взаємної інформації.
7. Наведіть другу форму запису для взаємної інформації.
8. Перерахуйте основні властивості взаємної інформації.
9. Чому дорівнює взаємна інформація при час обриві каналу?
10. Чому дорівнює взаємна інформація за відсутності перешкод?
11. Зобразіть діаграму інформаційного потоку.
12. Зобразіть діаграми Венна - Ейлера, що пояснюють співвідношення між ентропіями вхідного і вихідного алфавітів каналу A і $\hat{A}$.
13. Наведіть третю форму запису для взаємної інформації.
14. Що таке швидкість передачі інформації по дискретному каналу зв'язку?
15. Дайте визначення пропускної спроможності дискретного каналу зв'язку.
16. Сформулюйте оптимізаційну задачу пошуку пропускної спроможності дискретного каналу зв'язку.
17. Дайте визначення симетричного по входу та виходу каналу.
18. Дайте визначення $m-$ічного та $m-$ічного симетричного каналу.
19. Запишіть загальний вираз для пропускної здатності $m-$ічного симетричного каналу. При якому розподілі ймовірностей символів на вході і виході каналу вона досягається?
20. Який вид має матриця перехідних ймовірностей симетричного каналу без пам'яті при заданій ймовірності помилкового прийому символу p ?
21. Запишіть вираз для пропускної здатності симетричного $m-$ічного каналу без пам'яті при відомої ймовірності помилки p.
22. Перерахуйте властивості пропускної спроможності симетричного $m-$ічного каналу без пам'яті.

23. Який вид має матриця перехідних ймовірностей двійкового симетричного каналу без пам'яті при заданій ймовірності помилкового прийому двійкового символу p?

24. Зобразіть діаграму перехідних ймовірностей двійкового симетричного каналу без пам'яті.

25. Запишіть вираз для пропускної здатності двійкового симетричного каналу без пам'яті при відомої ймовірності помилки p.

26. Перерахуйте властивості пропускної спроможності двійкового симетричного каналу без пам'яті.

27. Який вид має матриця перехідних ймовірностей двійкового симетричного каналу зі стираннями при заданій битовій ймовірності помилки p і ймовірності стирання символу q?

28. Зобразіть діаграму перехідних ймовірностей двійкового симетричного каналу зі стиранням.

29. Запишіть вираз для пропускної спроможності двійкового симетричного каналу зі стираннями при відомій ймовірності помилки p і ймовірності стирання символу q.

30. Перерахуйте властивості пропускної спроможності двійкового симетричного каналу зі стиранням.