Практичне заняття. Метод Крамера

Повний конспект для онлайн-заняття

Мета: навчитися розв'язувати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера, обчислювати допоміжні визначники та розпізнавати випадок $\Delta = 0$.

Короткі теоретичні відомості

Для квадратної системи $AX = b$ позначимо $\Delta = \det A$. Визначник Δ_j утворюємо, замінюючи j-й стовпець матриці коефіцієнтів стовпцем вільних членів. Якщо $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j = 1, \dots, n.}$$

Якщо $\Delta = 0$, формули Крамера застосовувати не можна: потрібно окремо дослідити сумісність системи. Для визначників третього порядку застосовуємо правило Саррюса, четвертого — розклад за першим рядком.

Аудиторні вправи

Вправа 1.97

Умова. Розв'язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3y - 4x = 1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(4) - (3)\cdot(3) = -25.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = (1)\cdot(4) - (3)\cdot(18) = -50.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(18) - (1)\cdot(3) = -75.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x = \frac{-50}{-25} = 2, \qquad y = \frac{-75}{-25} = 3.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$(-4)\cdot(2)+(3)\cdot(3)=1$$
$$(3)\cdot(2)+(4)\cdot(3)=18.$$

Відповідь: $(2;\ 3)$.

Вправа 1.100

Умова. Розв'язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 8\end{pmatrix}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=(1)(-5)(-1)+(2)(3)(2)+(1)(3)(7)-(1)(-5)(2)-(2)(3)(-1)-(1)(3)(7)=33.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}=(4)(-5)(-1)+(2)(3)(8)+(1)(1)(7)-(1)(-5)(8)-(2)(1)(-1)-(4)(3)(7)=33.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}=(1)(1)(-1)+(4)(3)(2)+(1)(3)(8)-(1)(1)(2)-(4)(3)(-1)-(1)(3)(8)=33.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}=(1)(-5)(8)+(2)(1)(2)+(4)(3)(7)-(4)(-5)(2)-(2)(3)(8)-(1)(1)(7)=33.$$

Отже, $\Delta\neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x=\frac{33}{33}=1,\qquad y=\frac{33}{33}=1,\qquad z=\frac{33}{33}=1.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$(1)\cdot(1)+(2)\cdot(1)+(1)\cdot(1)=4$$
$$(3)\cdot(1)+(-5)\cdot(1)+(3)\cdot(1)=1$$
$$(2)\cdot(1)+(7)\cdot(1)+(-1)\cdot(1)=8.$$

Відповідь: $(1;\ 1;\ 1)$.

Вправа 1.102

Умова. Розв’язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

Розв’язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (2)(0)(-1) + (1)(3)(0) + (0)(1)(5) - (0)(0)(0) - (1)(1)(-1) - (2)(3)(5) = -29.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (5)(0)(-1)+(1)(3)(10)+(0)(16)(5)-(0)(0)(10)-(1)(16)(-1)-(5)(3)(5) = -29.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = (2)(16)(-1)+(5)(3)(0)+(0)(1)(10)-(0)(16)(0)-(5)(1)(-1)-(2)(3)(10) = -87.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = (2)(0)(10)+(1)(16)(0)+(5)(1)(5)-(5)(0)(0)-(1)(1)(10)-(2)(16)(5) = -145.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x = \frac{-29}{-29} = 1, \qquad y = \frac{-87}{-29} = 3, \qquad z = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$\begin{gathered} (2)\cdot(1) + (1)\cdot(3) + (0)\cdot(5) = 5 \\ (1)\cdot(1) + (0)\cdot(3) + (3)\cdot(5) = 16 \\ (0)\cdot(1) + (5)\cdot(3) + (-1)\cdot(5) = 10. \end{gathered}$$

Відповідь: $(1;\ 3;\ 5)$.

Вправа 1.105

Умова. Розв'язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв'язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4)(4)+(-1)(-2)(3)+(-1)(3)(-2)-(-1)(4)(3)-(-1)(3)(4)-(2)(-2)(-2) = 60.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (4)(4)(4)+(-1)(-2)(11)+(-1)(11)(-2)-(-1)(4)(11)-(-1)(11)(4)-(4)(-2)(-2) =$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = (2)(11)(4)+(4)(-2)(3)+(-1)(3)(11)-(-1)(11)(3)-(4)(3)(4)-(2)(-2)(11) = 60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = (2)(4)(11)+(-1)(11)(3)+(4)(3)(-2)-(4)(4)(3)-(-1)(3)(11)-(2)(11)(-2) = 60.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{180}{60} = 3, \qquad x_2 = \frac{60}{60} = 1, \qquad x_3 = \frac{60}{60} = 1.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$\begin{aligned} (2)\cdot(3) + (-1)\cdot(1) + (-1)\cdot(1) &= 4 \\ (3)\cdot(3) + (4)\cdot(1) + (-2)\cdot(1) &= 11 \\ (3)\cdot(3) + (-2)\cdot(1) + (4)\cdot(1) &= 11. \end{aligned}$$

Відповідь: $(3;\ 1;\ 1)$.

Домашні вправи (з повними розв’язаннями)

Вправа 1.98

Умова. Розв’язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 5. \end{cases}$$

Розв’язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (2)\cdot(-6) - (-3)\cdot(4) = 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (6)\cdot(-6) - (-3)\cdot(5) = -21.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (2)\cdot(5) - (6)\cdot(4) = -14.$$

Оскільки $\Delta = 0$, формули Крамера не дають єдиного розв’язку. При цьому $\Delta_1 \neq 0$, отже система несумісна. Це також видно з рівнянь: помноживши перше на 2, дістанемо $4x - 6y = 12$, тоді як друге вимагає $4x - 6y = 5$.

Відповідь: розв’язків немає.

Вправа 1.106

Умова. Розв’язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв’язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)(-1)(4) + (1)(2)(4) + (2)(2)(1) - (2)(-1)(4) - (1)(2)(4) - (1)(2)(1) = 6.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(4)+(1)(2)(-2)+(2)(-4)(1)-(2)(-1)(-2)-(1)(-4)(4)-(-1)(2)(1) = 6.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(-4)(4)+(-1)(2)(4)+(2)(2)(-2)-(2)(-4)(4)-(-1)(2)(4)-(1)(2)(-2) = 12.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-2)+(1)(-4)(4)+(-1)(2)(1)-(-1)(-1)(4)-(1)(2)(-2)-(1)(-4)(1) = -12.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{12}{6} = 2, \qquad x_3 = \frac{-12}{6} = -2.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$\begin{aligned} (1)\cdot(1) + (1)\cdot(2) + (2)\cdot(-2) &= -1 \\ (2)\cdot(1) + (-1)\cdot(2) + (2)\cdot(-2) &= -4 \\ (4)\cdot(1) + (1)\cdot(2) + (4)\cdot(-2) &= -2. \end{aligned}$$

Відповідь: $(1;\ 2;\ -2)$.

Вправа 1.107

Умова. Розв’язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв’язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3)(3) + (2)(1)(2) + (1)(2)(1) - (1)(3)(2) - (2)(2)(3) - (3)(1)(1) = 12.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3)(3) + (2)(1)(11) + (1)(1)(1) - (1)(3)(11) - (2)(1)(3) - (5)(1)(1) = 24.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = (3)(1)(3) + (5)(1)(2) + (1)(2)(11) - (1)(1)(2) - (5)(2)(3) - (3)(1)(11) = -24.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = (3)(3)(11) + (2)(1)(2) + (5)(2)(1) - (5)(3)(2) - (2)(2)(11) - (3)(1)(1) = 36.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{24}{12} = 2, \qquad x_2 = \frac{-24}{12} = -2, \qquad x_3 = \frac{36}{12} = 3.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$\begin{aligned} (3)\cdot(2) + (2)\cdot(-2) + (1)\cdot(3) &= 5 \\ (2)\cdot(2) + (3)\cdot(-2) + (1)\cdot(3) &= 1 \\ (2)\cdot(2) + (1)\cdot(-2) + (3)\cdot(3) &= 11. \end{aligned}$$

Відповідь: $(2;\ -2;\ 3)$.

Вправа 1.109*

Умова. Розв’язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Розв’язання. Матриця коефіцієнтів і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)\cdot(-27) - (1)\cdot(-3) + (2)\cdot(-6) - (3)\cdot(39) = -153.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)\cdot(-27) - (1)\cdot(30) + (2)\cdot(6) - (3)\cdot(-66) = 153.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)\cdot(30) - (1)\cdot(-3) + (2)\cdot(6) - (3)\cdot(-36) = 153.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (1)\cdot(-6) - (1)\cdot(6) + (1)\cdot(-6) - (3)\cdot(-6) = 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (1)\cdot(-66) - (1)\cdot(36) + (2)\cdot(-6) - (1)\cdot(39) = -153.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, тому за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{153}{-153} = -1, \qquad x_2 = \frac{153}{-153} = -1, \qquad x_3 = \frac{0}{-153} = 0, \qquad x_4 = \frac{-153}{-153} = 1.$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення у вихідну систему:

$$\begin{aligned} (1)\cdot(-1) + (1)\cdot(-1) + (2)\cdot(0) + (3)\cdot(1) &= 1 \\ (3)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(0) + (-2)\cdot(1) &= -4 \\ (2)\cdot(-1) + (3)\cdot(-1) + (-1)\cdot(0) + (-1)\cdot(1) &= -6 \\ (1)\cdot(-1) + (2)\cdot(-1) + (3)\cdot(0) + (-1)\cdot(1) &= -4. \end{aligned}$$

Відповідь: $(-1;\ -1;\ 0;\ 1)$.

Підсумок

Для кожної системи: (1) правильно виписати матрицю коефіцієнтів; (2) знайти Δ; (3) за $\Delta \neq 0$ обчислити Δ_j і x_j; (4) перевірити підстановкою. Якщо $\Delta = 0$, дослідити систему окремо.