ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

Рівняння прямої на площині

Конспект із повними розв'язаннями для онлайн-заняття

Мета: складати рівняння прямої за точкою, напрямним або нормальним вектором, двома точками, кутовим коефіцієнтом; переходити між формами рівнянь і розв'язувати прикладні задачі.

Основні формули. Загальне рівняння: $Ax+By+C=0$, $(A,B)\neq(0,0)$; нормальний вектор $\vec{n}=(A,B)$, напрямний $\vec{s}=(-B,A)$. За точкою (x_0,y_0) і нормаллю (A,B): $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. За напрямним вектором (m,n): $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ (за $mn\neq 0$). За кутовим коефіцієнтом: $y-y_0=k(x-x_0)$. Через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (коли знаменники ненульові). У відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Завдання 1. Для прямої $3x-2y+6=0$ вказати нормальний вектор; записати $y=kx+b$; знайти k і точки перетину з осями.

Розв'язання. Нормальний вектор $\vec{n}=(3,-2)$. Переносимо доданки:

$$3x-2y+6=0 \iff 2y=3x+6 \iff \boxed{y=\frac{3}{2}x+3}.$$

Отже, $k=\frac{3}{2}$. Для перетину з Ox покладаємо $y=0$: $3x+6=0$, $x=-2$, тобто $(-2,0)$. Для Oy покладаємо $x=0$: $-2y+6=0$, $y=3$, тобто $(0,3)$.

Завдання 2. Через точку $M(2,-1)$ провести пряму з напрямним вектором $\vec{s}=(3,2)$. Записати канонічне й загальне рівняння.

Розв'язання. Канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}}.$$

Множимо навхрест: $2(x-2)=3(y+1)$, тобто $2x-4=3y+3$. Отже, $\boxed{2x-3y-7=0}$. Перевірка: $2\cdot 2-3(-1)-7=0$.

Завдання 3. Через $A(1,3)$ провести пряму з нормальним вектором $\vec{n}=(2,-5)$. Записати $Ax+By+C=0$.

Розв'язання. За формулою прямої через точку з заданою нормаллю:

$$2(x-1)-5(y-3)=0 \iff 2x-2-5y+15=0.$$

Тому $\boxed{2x-5y+13=0}$. Перевірка: $2-15+13=0$.

Завдання 4. Скласти рівняння прямої через $A(-1,2)$, $B(3,6)$: через дві точки, загальне і $y=kx+b$.

Розв'язання. Різниці координат: $x_B-x_A=3-(-1)=4$, $y_B-y_A=6-2=4$. Тоді

$$\boxed{\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{4}} \iff x+1=y-2 \iff \boxed{x-y+3=0}.$$

Звідси $\boxed{y=x+3}$, тому $k=1$. Перевірка: для A маємо $2=-1+3$, для B маємо $6=3+3$.

Завдання 5. Через $M(4,-2)$ провести пряму з кутовим коефіцієнтом $k=3$; знайти перетин з Oy.

Розв'язання. Використовуємо $y-y_0=k(x-x_0)$:

$$y+2=3(x-4)=3x-12 \iff \boxed{y=3x-14}.$$

При $x=0$ маємо $y=-14$. Точка перетину з Oy: $\boxed{(0,-14)}$.

Завдання 6. Пряма відтинає на осях відрізки $a=4$, $b=6$. Скласти рівняння у відрізках, загальне і знайти k.

Розв'язання. Підставляємо у формулу:

$$\boxed{\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1}.$$

Помноживши на 12, дістаємо $3x+2y=12$, отже, $\boxed{3x+2y-12=0}$. Виражаємо y:

$$2y=-3x+12 \iff y=-\frac{3}{2}x+6, \qquad \boxed{k=-\frac{3}{2}}.$$

Завдання 7. Перевірити, які точки $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(-1,3)$ належать прямій $x+2y-5=0$.

Розв'язання. Точка належить прямій тоді й тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння.

$$A:\quad 1+2\cdot 2-5=0; \qquad B:\quad 3+2\cdot 1-5=0;$$

$$C:\quad -1+2\cdot 3-5=0.$$

Відповідь: усі три точки A, B, C належать заданій прямій.

Завдання 8. Знайти m, за якого точка $M(2,m)$ належить прямій $3x-2y+4=0$.

Розв'язання. Підставляємо $x=2$, $y=m$:

$$3\cdot 2-2m+4=0 \iff 10-2m=0 \iff \boxed{m=5}.$$

Перевірка: $6-10+4=0$.

Завдання 9. Знайти перетин прямих $2x+y-7=0$ і $x-y-2=0$.

Розв'язання. Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Додаємо рівняння: $3x=9$, тому $x=3$. З другого: $3-y=2$, звідси $y=1$. Отже, $\boxed{(3,1)}$. Перевірка: $2\cdot 3+1-7=0$ і $3-1-2=0$.

Завдання 10. Скласти рівняння медіани AM трикутника $A(1,5)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$.

Розв'язання. Середина BC має координати

$$M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \boxed{(1,2)}.$$

Точки $A(1,5)$ і $M(1,2)$ мають однакову абсцису. Отже, медіана вертикальна, її рівняння $\boxed{x=1}$, або $\boxed{x-1=0}$. Тут не можна використовувати формулу $y = kx + b$, бо вертикальна пряма не має скінченного кутового коефіцієнта.

Завдання 11. Скласти рівняння прямої через точку перетину $x + y - 5 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ та точку $M(0,4)$.

Розв'язання. Спершу знаходимо точку перетину:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 3x = 6 \Longrightarrow x = 2, \quad y = 3.$$

Отже, $P(2,3)$. Пряма через $P(2,3)$ і $M(0,4)$ має напрямний вектор $(-2,1)$, тому

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} \iff x - 2 = -2y + 6 \iff \boxed{x + 2y - 8 = 0}.$$

Перевірка: $2 + 2 \cdot 3 - 8 = 0$; $0 + 2 \cdot 4 - 8 = 0$.

Завдання 12. Економічна задача. За ціни 100 грн попит 500 од., за ціни 140 грн попит 300 од. Вважати залежність ціни p від обсягу попиту q лінійною. Знайти рівняння прямої через $A(500,100)$ і $B(300,140)$; записати $p = kq + b$; обчислити ціну для $q = 400$ та попит за $p = 120$; пояснити знак k.

Розв'язання. Шукаємо $p = kq + b$. За двома точками

$$k = \frac{p_B - p_A}{q_B - q_A} = \frac{140 - 100}{300 - 500} = \frac{40}{-200} = \boxed{-\frac{1}{5}}.$$

Знайдемо b з координат A:

$$100 = -\frac{1}{5} \cdot 500 + b = -100 + b \Longrightarrow b = 200.$$

Отже, $\boxed{p = -\frac{1}{5}q + 200}$, або загальне рівняння $\boxed{q + 5p - 1000 = 0}$. При $q = 400$:

$$p = -\frac{1}{5} \cdot 400 + 200 = -80 + 200 = \boxed{120 \text{ грн}}.$$

При $p = 120$:

$$120 = -\frac{1}{5}q + 200 \iff \frac{1}{5}q = 80 \iff \boxed{q = 400 \text{ од.}}.$$

Від'ємний кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{5}$ означає обернену залежність: за збільшення попиту на одну одиницю модельна ціна зменшується на $0{,}2$ грн; або, еквівалентно, за збільшення ціни на 1 грн модельний обсяг попиту зменшується на 5 одиниць. Це лінійна модель у межах прийнятого припущення.

Підсумок заняття. У задачах 1–6 складено різні форми рівнянь прямої; у задачах 7–9 перевірено належність і знайдено перетин; у задачах 10–11 застосовано геометричні побудови; у задачі 12 побудовано лінійну модель попиту.