ЛЕКЦІЯ. ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Вища математика · I курс економічних спеціальностей

План: 1. Функція та область визначення. 2. Основні властивості. 3. Класи функцій. 4. Числові послідовності та їхні границі. 5. Границя функції та методи обчислення. 6. Перша і друга визначні границі. 7. Еквівалентні нескінченно малі. 8. Неперервність.

1. Функція однієї змінної та область визначення

Означення. Функцією f однієї дійсної змінної називають правило, яке кожному x із множини $D(f) \subset \mathbb{R}$ ставить у відповідність єдине число $y = f(x)$. Множина $D(f)$ — **область визначення**, множина $E(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$ — **множина значень**.

Способи задання: аналітичний (формула), табличний, графічний, словесний. Якщо область не задано, шукаємо найбільшу множину дійсних x, для яких формула має зміст.

Типові обмеження:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\ Q(x)\neq 0; \qquad \sqrt{g(x)}:\ g(x)\geq 0; \qquad \ln g(x):\ g(x)>0;$$

$$\arcsin g(x), \arccos g(x):\ -1\leq g(x)\leq 1.$$

Приклад 1. Область визначення раціональної функції

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-5x+6}.$$

Знаменник $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ не повинен дорівнювати нулю. Тому

$$x\neq 2,\quad x\neq 3, \qquad \boxed{D(f)=\mathbb{R}\setminus\{2,3\}.}$$

Приклад 2. Корінь і логарифм

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-4}}{\ln(7-x)}.$$

Послідовно записуємо обмеження:

$$2x-4\geq 0 \iff x\geq 2; \qquad 7-x>0 \iff x<7;$$

$$\ln(7-x)\neq 0 \iff 7-x\neq 1 \iff x\neq 6.$$

Отже, $\boxed{D(f)=[2,6)\cup(6,7)}$.

Приклад 3. Економічна інтерпретація

Нехай витрати підприємства $C(q) = 1000 + 25q$, де $q \geq 0$ — кількість одиниць продукції. Середні витрати на одиницю:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1000}{q} + 25, \qquad \boxed{q > 0}.$$

Тут математична область $q \neq 0$ звужується економічним змістом до $q > 0$ (якщо q — кількість цілих виробів, то $q \in \mathbb{N}$).

2. Основні властивості функцій

Парність. Якщо $D(f)$ симетрична відносно нуля, то f парна, коли $f(-x) = f(x)$, і непарна, коли $f(-x) = -f(x)$.

$$f(x) = x^2 + 3:\ f(-x) = f(x); \qquad g(x) = x^3 - x:\ g(-x) = -g(x).$$

Монотонність. Функція зростає на проміжку I, якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; спадає, якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

$$f(x) = 2x + 1 \text{ зростає на } \mathbb{R}; \qquad g(x) = -3x + 4 \text{ спадає на } \mathbb{R}.$$

Обмеженість. Функція обмежена на D, якщо $\exists M > 0:\ |f(x)| \leq M$ для всіх $x \in D$. Наприклад, $|\sin x| \leq 1$; x^2 на $\mathbb{R}$ не обмежена зверху.

Періодичність. $T > 0$ — період, якщо $f(x + T) = f(x)$ для всіх допустимих x. Для $\sin(2x)$ найменший додатний період $T = \pi$.

Нулі та знак. Нулі — розв'язки $f(x) = 0$. Для $f(x) = (x - 1)(x - 4)$ нулі 1 і 4; $f(x) > 0$ на $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ та $f(x) < 0$ на $(1, 4)$.

Обернена функція. Якщо функція взаємно однозначна на вибраному проміжку, існує f^{-1}. Наприклад, $y = 2x + 5$ дає $x = (y - 5)/2$, отже $f^{-1}(x) = (x - 5)/2$.

Приклад 4. Властивості функції попиту

$$q(p) = 120 - 4p, \qquad 0 \leq p \leq 30.$$

При $p_1 < p_2$ маємо $q(p_1) - q(p_2) = 4(p_2 - p_1) > 0$, тому попит **спадає** за ціною. $q(0) = 120$, $q(30) = 0$; множина значень $[0, 120]$. Обернена залежність: $p(q) = 30 - q/4$.

3. Основні класи функцій

Алгебраїчні функції: многочлени $x^2 - 3x + 2$; раціональні $\frac{x+1}{x-2}$; ірраціональні $\sqrt{x + 3}$.

Трансцендентні функції: показникові a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), логарифмічні $\log_a x$ ($x > 0$), тригонометричні $\sin x, \cos x, \tan x$, обернені тригонометричні $\arcsin x, \arctan x$.

Елементарні функції утворюють із основних елементарних функцій скінченною кількістю арифметичних операцій та композицій. Наприклад, $f(x) = \ln(1 + x^2) + e^{-x}$.

Складена функція: $y = f(g(x))$. Наприклад,

$$g(x) = 3x - 1, \quad f(t) = \sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) = \sqrt{3x-1}, \quad x \geq \tfrac{1}{3}.$$

Кусково задана функція:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 2x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 5. Економічні моделі різних класів

Лінійна модель витрат: $C(q) = F + cq$. Квадратична модель доходу: $R(q) = aq - bq^2$ ($a, b > 0$). Експоненційне зростання капіталу за неперервного нарахування: $K(t) = K_0 e^{rt}$. Логарифмічна функція корисності: $U(x) = \ln x$ ($x > 0$).

4. Числові послідовності та їхні границі

Означення. Послідовність — функція $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, її значення позначають a_n. Число a є границею a_n, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує N таке, що $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a.}$$

Основні факти: границя, якщо існує, єдина; збіжна послідовність обмежена; сума, добуток і частка (за ненульової границі знаменника) мають звичайні правила границь.

Приклад 6. Границя раціонального виразу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{5n^2 + n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

Приклад 7. Послідовність, що прямує до нуля

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad |a_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Отже, за теоремою про стискання $\boxed{\lim_{n\to\infty} (-1)^n/n = 0}$, хоча знаки членів чергуються.

Приклад 8. Геометрична прогресія

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{при } |q| < 1.$$

Зокрема, $\lim_{n\to\infty} (0{,}8)^n = 0$. При $q > 1$ послідовність q^n необмежено зростає.

5. Границя функції

Означення (за Гейне). $\lim_{x\to a} f(x) = L$, якщо для кожної послідовності $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D(f)$ виконується $f(x_n) \to L$.

Односторонні границі: $\lim_{x\to a-} f(x)$ і $\lim_{x\to a+} f(x)$. Скінченна двостороння границя існує тоді й лише тоді, коли обидві односторонні границі існують і рівні.

Невизначеності: $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Це *не відповіді*, а сигнали до перетворення виразу.

Приклад 9. Розкладання на множники ($0/0$)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \boxed{4}.$$

Скорочення виконуємо для $x \neq 2$, що допустимо при обчисленні границі.

Приклад 10. Позбавлення ірраціональності

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}{x(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(\sqrt{1+3x}+1)} = \frac{3}{1+1} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Приклад 11. Нескінченність / нескінченність

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+5x^2-7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3}} = \boxed{2}.$$

Приклад 12. Односторонні границі

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0.$$

Для $x<0$ маємо $f(x) = -1$, для $x>0$ маємо $f(x) = 1$. Отже,

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 1.$$

Оскільки ці числа різні, $\lim_{x\to 0} f(x)$ **не існує**.

6. Перша визначна границя

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$ (кут x вимірюють у радіанах).

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \quad (a\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

Приклад 13. Заміна аргументу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{3x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=\frac{5}{3}\cdot 1=\boxed{\frac{5}{3}}.$$

Приклад 14. Використання тотожності

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\boxed{2}.$$

Приклад 15. Добуток двох стандартних відношень

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\tan(2x)}{x^2}=6\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{\tan(2x)}{2x}=\boxed{6}.$$

7. Друга визначна границя

Для числової послідовності:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}718281828\ldots}$$

Для функції:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e} \quad (1+x>0),$$

еквівалентно

$$\boxed{\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e}$$

(за допустимих значень t).

Узагальнення. Якщо $u(x)\to 0$ і $u(x)\neq 0$, то $(1+u(x))^{1/u(x)}\to e$. Якщо $u(x)\to 0$ і $v(x)u(x)\to L$, то за додатної основи

$$(1+u(x))^{v(x)}=\left[(1+u(x))^{1/u(x)}\right]^{u(x)v(x)}\longrightarrow e^L.$$

Приклад 16. Границя послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n/3}\right]^6=\boxed{e^6}.$$

Приклад 17. Границя функції

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{3/x} = \lim_{x\to 0}\left[(1+4x)^{1/(4x)}\right]^{12} = \boxed{e^{12}}.$$

Приклад 18. Границя з раціональною основою

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{(x-1)/3}\right]^{3x/(x-1)} = \boxed{e^{3}}.$$

Приклад 19. Економічний зміст числа e

За номінальної річної ставки r і нарахування відсотків m разів на рік сума через t років:

$$K_m(t) = K_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

При $m\to\infty$:

$$\lim_{m\to\infty} K_m(t) = K_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt}$$
$$= \boxed{K_0 e^{rt}} \qquad (r>0).$$

8. Основні еквівалентні нескінченно малі

Означення. Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є еквівалентними при $x\to a$, якщо

$$\alpha(x)\sim\beta(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

(у проколотому околі, де відношення визначене).

Основні еквівалентності при $t\to 0$:

$$\begin{array}{lll} \sin t\sim t, & \tan t\sim t, & \arcsin t\sim t,\\ \arctan t\sim t, & 1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2}, & \ln(1+t)\sim t,\\ e^t-1\sim t, & a^t-1\sim t\ln a, & (1+t)^{\alpha}-1\sim\alpha t. \end{array}$$

Тут $a>0$, $a\neq 1$; в останній формулі $\alpha\neq 0$ — стала. Також $\sqrt{1+t}-1\sim t/2$.

Важливо. Еквівалентні нескінченно малі можна замінювати в *добутках і частках*, але *не можна без додаткового обґрунтування* замінювати окремі доданки в різниці: можливе скорочення головних членів.

Приклад 20. Границя через еквівалентності

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x\,[\ln(1+5x)/(5x)]}{2x\,[\sin(2x)/(2x)]} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1} = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

Приклад 21. Квадратичні еквівалентності

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x\tan(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}\,[\frac{1-\cos(3x)}{9x^2/2}]}{2x^2\,[\frac{\tan(2x)}{2x}]} = \boxed{\frac{9}{4}}.$$

Приклад 22. Чому не можна замінювати в різниці

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Проста заміна $\sin x \sim x$ дала б хибний нуль. Тут потрібне точніше розвинення $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$; отже

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-x^3/6 + o(x^3)}{x^3} \to -\frac{1}{6}.$$

9. Поняття неперервності функції

Означення. f неперервна в точці $a \in D(f)$, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}.$$

Еквівалентно: якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) \to 0$. Сума, добуток, частка (за ненульового знаменника) і композиція неперервних функцій неперервні там, де визначені.

Типи розривів: усувний (границя існує, але значення відсутнє або не збігається з нею); стрибок (скінченні різні односторонні границі); розрив другого роду (хоч одна одностороння границя не існує або нескінченна).

Приклад 23. Усувний розрив

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 5, & x = 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1) = 5.$$

Функція розривна в $x = 1$, але якщо покласти $f(1) = 2$, розрив буде усунено.

Приклад 24. Неперервність кусково заданої функції

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<2,\\ x^2-1, & x\ge 2.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=2\cdot 2+1=5, \qquad \lim_{x\to 2+} f(x)=2^2-1=3=f(2).$$

Односторонні границі різні: f має **стрибок** у точці $x=2$.

Приклад 25. Економічний приклад неперервності

Ціна послуги з фіксованим тарифом до певного обсягу може задаватися кусково:

$$P(q)=\begin{cases}10q, & 0\le q\le 100,\\ 1000+8(q-100), & q>100.\end{cases}$$

У точці $q=100$ маємо $P(100)=1000$, $\lim_{q\to 100-} P(q)=1000$, $\lim_{q\to 100+} P(q)=1000$. Отже, P **неперервна** в $q=100$, хоча формула змінюється.

Підсумок лекції та завдання для самоперевірки

Запам'ятати: область визначення знаходять до обчислень; при невизначеності $0/0$ перетворюють вираз; перша визначна границя працює для радіанів; друга визначна границя пов'язана з числом e; еквівалентності застосовують обережно; неперервність вимагає рівності границі та значення функції.

Самостійно обчислити:

1. $D\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-4}\right)$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-3n}{2n^2+5}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+2x)}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{3n}$.
6. Чи неперервна в нулі $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 2x+1, & x\ge 0?\end{cases}$

Відповіді: 1) $[1,4)\cup(4,+\infty)$; 2) $7/2$; 3) $7/2$; 4) 2; 5) e^{15}; 6) так.