Практичне заняття № 5

Знаходження обернених матриць

Покроковий конспект для онлайн-заняття

Теоретичні відомості. Для квадратної матриці A обернена матриця існує тоді й лише тоді, коли $\det A \neq 0$. У цьому разі

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A, \qquad \operatorname{adj} A = (A_{ij})^T, \qquad AA^{-1} = E.$$

Нижче наведено всі вправи на безпосереднє знаходження оберненої матриці з надісланого аркуша. Завдання на системи рівнянь і матричні рівняння не включено.

Завдання для роботи в аудиторії

Вправа № 1.59

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A = 1 \cdot (4) - (2) \cdot (3) = -2 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Вправа № 1.64

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = +(1) \cdot (-2) - (2) \cdot (-7) + (-1) \cdot (-1) = 13 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} — відповідний мінор.

$$A_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 7$$

$$A_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -5$$

$$A_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{adj}\, A = A^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{7}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{7}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Вправа № 1.65

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = +(1) \cdot (2) - (-1) \cdot (3) + (1) \cdot (1) = 6 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} — відповідний мінор.

$$A_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{adj}\, A = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Вправа № 1.74*

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = +(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(4) + (1)\cdot(-4) - (1)\cdot(4) = -16 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} — відповідний мінор.

$$A_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{14} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{24} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{34} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{41} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{42} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{43} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{44} = (-1)^8 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{adj } A = A^T = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4.$$

Домашнє завдання

Вправа № 1.60

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A = 3 \cdot (7) - (4) \cdot (5) = 1 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Вправа № 1.66

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = +(1) \cdot (4) - (2) \cdot (-10) + (3) \cdot (-11) = -9 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} — відповідний мінор.

$$A_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 10$$

$$A_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -11$$

$$A_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$A_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 6$$

$$A_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -11 \\ -1 & -7 & 5 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj} A = A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ -11 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ -11 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{11}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{11}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Вправа № 1.67

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = +(1)\cdot(-1) - (0)\cdot(-2) + (2)\cdot(-4) = -9 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, де M_{ij} — відповідний мінор.

$$A_{11} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{32} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj} A = A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Вправа № 1.75*

Умова. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = +(1) \cdot (-22) - (2) \cdot (-17) + (3) \cdot (1) - (4) \cdot (4) = -1 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} — відповідний мінор.

$$A_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} = -22$$

$$A_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = 17$$

$$A_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{14} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{24} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} = 26$$

$$A_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = -20$$

$$A_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_{34} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A_{41} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -17$$

$$A_{42} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 13$$

$$A_{43} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{44} = (-1)^8 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} -22 & 17 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 1 \\ 26 & -20 & -2 & 5 \\ -17 & 13 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj} A = A^T = \begin{pmatrix} -22 & 6 & 26 & -17 \\ 17 & -5 & -20 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -22 & 6 & 26 & -17 \\ 17 & -5 & -20 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4.$$