Практичне заняття № 2

Матриці та дії над матрицями

Повний конспект із розв'язаннями для онлайн-заняття

Основні правила. Матриці однакового розміру додають поелементно; при множенні матриці на число множать кожен її елемент. Для добутку $C = AB$ елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка A на відповідні елементи j-го стовпця B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Завдання для роботи в аудиторії

Вправа 1.79

Умова. Обчислити:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Позначимо добуток через $C = AB = (c_{ij})$. За правилом множення матриць:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (3)\cdot(3) + (-2)\cdot(2) = 5 \\ c_{12} &= (3)\cdot(4) + (-2)\cdot(5) = 2 \\ c_{21} &= (5)\cdot(3) + (-4)\cdot(2) = 7 \\ c_{22} &= (5)\cdot(4) + (-4)\cdot(5) = 0 \end{aligned}$$

Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вправа 1.81

Умова. Обчислити:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Позначимо добуток через $C = AB = (c_{ij})$. За правилом множення матриць:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (1)\cdot(2) + (-3)\cdot(1) + (2)\cdot(1) = 1 \\ c_{12} &= (1)\cdot(5) + (-3)\cdot(2) + (2)\cdot(3) = 5 \\ c_{13} &= (1)\cdot(6) + (-3)\cdot(5) + (2)\cdot(2) = -5 \\ c_{21} &= (3)\cdot(2) + (-4)\cdot(1) + (1)\cdot(1) = 3 \\ c_{22} &= (3)\cdot(5) + (-4)\cdot(2) + (1)\cdot(3) = 10 \\ c_{23} &= (3)\cdot(6) + (-4)\cdot(5) + (1)\cdot(2) = 0 \\ c_{31} &= (2)\cdot(2) + (-5)\cdot(1) + (3)\cdot(1) = 2 \\ c_{32} &= (2)\cdot(5) + (-5)\cdot(2) + (3)\cdot(3) = 9 \\ c_{33} &= (2)\cdot(6) + (-5)\cdot(5) + (3)\cdot(2) = -7 \end{aligned}$$

Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вправа 1.85

Умова. Обчислити:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо $T = AB = (t_{ij})$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (0) \cdot (70) + (2) \cdot (52) + (-1) \cdot (101) = 3 \\ c_{12} &= (0) \cdot (34) + (2) \cdot (26) + (-1) \cdot (50) = 2 \\ c_{13} &= (0) \cdot (-107) + (2) \cdot (-68) + (-1) \cdot (-140) = 4 \\ c_{21} &= (-2) \cdot (70) + (-1) \cdot (52) + (2) \cdot (101) = 10 \\ c_{22} &= (-2) \cdot (34) + (-1) \cdot (26) + (2) \cdot (50) = 6 \\ c_{23} &= (-2) \cdot (-107) + (-1) \cdot (-68) + (2) \cdot (-140) = 2 \\ c_{31} &= (3) \cdot (70) + (-2) \cdot (52) + (-1) \cdot (101) = 5 \\ c_{32} &= (3) \cdot (34) + (-2) \cdot (26) + (-1) \cdot (50) = 0 \\ c_{33} &= (3) \cdot (-107) + (-2) \cdot (-68) + (-1) \cdot (-140) = -45 \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & -45 \end{pmatrix} .$$

Тепер обчислимо $C = TG = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (3) \cdot (27) + (2) \cdot (-46) + (4) \cdot (3) = 1 \\ c_{12} &= (3) \cdot (-18) + (2) \cdot (31) + (4) \cdot (2) = 16 \\ c_{13} &= (3) \cdot (10) + (2) \cdot (-17) + (4) \cdot (1) = 0 \\ c_{21} &= (10) \cdot (27) + (6) \cdot (-46) + (2) \cdot (3) = 0 \\ c_{22} &= (10) \cdot (-18) + (6) \cdot (31) + (2) \cdot (2) = 10 \\ c_{23} &= (10) \cdot (10) + (6) \cdot (-17) + (2) \cdot (1) = 0 \\ c_{31} &= (5) \cdot (27) + (0) \cdot (-46) + (-45) \cdot (3) = 0 \\ c_{32} &= (5) \cdot (-18) + (0) \cdot (31) + (-45) \cdot (2) = -180 \\ c_{33} &= (5) \cdot (10) + (0) \cdot (-17) + (-45) \cdot (1) = 5 \end{aligned}$$

Отже,

$$ABG = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & -180 & 5 \end{pmatrix} .$$

Примітка. За числами, надрукованими в умові, отримуємо наведений результат. Він не збігається з відповіддю в оригінальному збірнику; ймовірно, у вихідному завданні є друкарська помилка.

Домашнє завдання

Вправа 1.78

Умова. Обчислити:

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Спочатку множимо кожну матрицю на відповідний коефіцієнт:

$$4A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$
$$3B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$
$$-2C = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Додаємо відповідні елементи матриць. Нехай $R = (r_{ij}) = 4A + 3B - 2C$:

$$r_{11} = 4 \cdot (1) + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (2) = -3$$
$$r_{12} = 4 \cdot (2) + 3 \cdot (3) - 2 \cdot (4) = 9$$
$$r_{13} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (1) - 2 \cdot (1) = -3$$
$$r_{21} = 4 \cdot (2) + 3 \cdot (2) - 2 \cdot (-1) = 16$$
$$r_{22} = 4 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - 2 \cdot (3) = 1$$
$$r_{23} = 4 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - 2 \cdot (2) = 6$$

Отже,

$$4A + 3B - 2C = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вправа 1.82

Умова. Обчислити:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Позначимо добуток через $C = AB = (c_{ij})$. За правилом множення матриць:

$$c_{11} = (5) \cdot (3) + (8) \cdot (4) + (-4) \cdot (9) = 11$$
$$c_{12} = (5) \cdot (2) + (8) \cdot (-1) + (-4) \cdot (6) = -22$$
$$c_{13} = (5) \cdot (5) + (8) \cdot (3) + (-4) \cdot (5) = 29$$
$$c_{21} = (6) \cdot (3) + (9) \cdot (4) + (-5) \cdot (9) = 9$$
$$c_{22} = (6) \cdot (2) + (9) \cdot (-1) + (-5) \cdot (6) = -27$$
$$c_{23} = (6) \cdot (5) + (9) \cdot (3) + (-5) \cdot (5) = 32$$
$$c_{31} = (4) \cdot (3) + (7) \cdot (4) + (-3) \cdot (9) = 13$$
$$c_{32} = (4) \cdot (2) + (7) \cdot (-1) + (-3) \cdot (6) = -17$$
$$c_{33} = (4) \cdot (5) + (7) \cdot (3) + (-3) \cdot (5) = 26$$

Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$$

Вправа 1.84

Умова. Обчислити:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо $T = AB = (t_{ij})$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (4) \cdot (-28) + (3) \cdot (38) = 2 \\ c_{12} &= (4) \cdot (93) + (3) \cdot (-126) = -6 \\ c_{21} &= (7) \cdot (-28) + (5) \cdot (38) = -6 \\ c_{22} &= (7) \cdot (93) + (5) \cdot (-126) = 21 \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} .$$

Тепер обчислимо $C = TO = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (2) \cdot (7) + (-6) \cdot (2) = 2 \\ c_{12} &= (2) \cdot (3) + (-6) \cdot (1) = 0 \\ c_{21} &= (-6) \cdot (7) + (21) \cdot (2) = 0 \\ c_{22} &= (-6) \cdot (3) + (21) \cdot (1) = 3 \end{aligned}$$

Отже,

$$ABO = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$