ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Обчислення детермінантів (визначників)

Лінійна алгебра та аналітична геометрія
І курс · Інженерія програмного забезпечення
Конспект із повними розв’язаннями для онлайн-заняття

Короткі правила для роботи

Для визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Для третього порядку розклад за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

Розклад за елементами рядка або стовпця:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} — визначник, отриманий викресленням i-го рядка та j-го стовпця. Додавання до рядка іншого рядка, помноженого на число, **не змінює** визначник; перестановка двох рядків змінює знак.

Завдання для роботи в аудиторії

Завдання 1.4. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$$

За формулою $ad - bc$ маємо:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot (12) - (9) \cdot (8) = 0.$$

Завдання 1.13. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Розкладаємо за першим рядком (знаки $+, -, +$):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначники другого порядку:

$$= (2)\cdot(3\cdot(3)-(2)\cdot(4)) + (-1)\cdot(4\cdot(3)-(2)\cdot(1)) + (3)\cdot(4\cdot(4)-(3)\cdot(1)) = 31.$$

Завдання 1.40. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Використаємо перетворення стовпців $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ та $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$; вони не змінюють визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо за 1-м рядком:

$$\det A = (2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначники третього порядку (розклад за першим рядком):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)\cdot(-6) + (1)\cdot(-6) + (7)\cdot(-3) = -33.$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-6) + (1)\cdot(-18) + (7)\cdot(-3) = -21.$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-6) + (-1)\cdot(-18) + (7)\cdot(6) = 78.$$

Тому $\det A = (2)\cdot(-33) + (1)\cdot(-21) + (1)\cdot(78) = \boxed{-9}$.

Завдання для самостійної роботи (із розв’язаннями)

Завдання 1.5. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

За формулою $ad - bc$ маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(5) - (-4)\cdot(-1) = 6.$$

Завдання 1.6. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

За формулою $ad - bc$ маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (5) - (-3) \cdot (-1) = 7.$$

Завдання 1.14. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Розкладаємо за першим рядком (знаки $+, -, +$):

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначники другого порядку:

$$= (5) \cdot (6 \cdot (1) - (5) \cdot (5)) + (-1) \cdot (1 \cdot (1) - (5) \cdot (6)) + (6) \cdot (1 \cdot (5) - (6) \cdot (6)) = -252.$$

Завдання 1.15. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Розкладаємо за першим рядком (знаки $+, -, +$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначники другого порядку:

$$= (1) \cdot (5 \cdot (9) - (6) \cdot (8)) + (-2) \cdot (4 \cdot (9) - (6) \cdot (3)) + (3) \cdot (4 \cdot (8) - (5) \cdot (3)) = 12.$$

Завдання 1.32. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

У четвертому рядку лише один ненульовий елемент $a_{41} = 5$. Розкладаємо за цим рядком; знак $(-1)^{4+1} = -1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо за першим рядком (знаки $+, -, +$):

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначники другого порядку:

$$= (0) \cdot (2 \cdot (5) - (0) \cdot (4)) + (-2) \cdot (0 \cdot (5) - (0) \cdot (3)) + (3) \cdot (0 \cdot (4) - (2) \cdot (3)) = -18.$$

Отже, $\det A = -5 \cdot (-18) = \boxed{90}$. У вихідному аркуші відповідей наведено 30, але для записаної матриці правильний результат — 90.

Завдання 1.33. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

Віднімаємо від третього стовпця перший, а від четвертого — перший: $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$. Далі зручно розкласти за першим рядком.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 12 \\ 8 & 1 & 19 & 56 \end{vmatrix}.$$

У першому рядку отримали $(1, 1, 0, 0)$. Розклад дає:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 12 \\ 1 & 19 & 56 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \\ 8 & 19 & 56 \end{vmatrix}.$$

Обидва визначники третього порядку обчислюємо за формулою розкладу за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 12 \\ 1 & 19 & 56 \end{vmatrix} = +(1) \cdot (52)(-1) \cdot (44)(2) \cdot (14) = 36.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \\ 8 & 19 & 56 \end{vmatrix} = +(2) \cdot (52)(-1) \cdot (128)(2) \cdot (36) = 48.$$

Отже, $\det A = 36 - (48) = \boxed{-12}$.

Завдання 1.41. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Для спрощення обчислень виконуємо перетворення рядків $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ та $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$ (визначник не змінюється).

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо за 3-м рядком:

$$\det A = (1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & -4 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 7 & -8 & -4 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначники третього порядку (розклад за першим рядком):

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = (9) \cdot (9) + (-3) \cdot (13) + (6) \cdot (-4) = 18.$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & -4 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (9) + (-3) \cdot (3) + (6) \cdot (15) = 54.$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 7 & -8 & -4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-4) + (-9) \cdot (15) + (3) \cdot (23) = -54.$$

Тому $\det A = (1) \cdot (18) + (-4) \cdot (54) + (-4) \cdot (-54) = \boxed{18}$.