ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

Похідна функції

Математичний аналіз · Для студентів-програмістів

Конспект із покроковими розв'язаннями для онлайн-заняття

1. Короткі теоретичні відомості

Означення похідної: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Геометричний зміст: $f'(x_0)$ — кутовий коефіцієнт дотичної; $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Фізичний зміст: $v(t) = s'(t)$, $a(t) = s''(t)$.

Правила диференціювання:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Таблиця похідних:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Логарифмічне диференціювання: для $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x) > 0$, маємо $\ln y = v(x) \ln u(x)$.

2. Розібрані приклади з вихідного конспекту

Приклад 1. За означенням: $f(x) = x^2$**.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = \boxed{2x}.$$

Приклад 2. $y = 4x^5 - 3x^3 + 7x - 2$**.**

$$y' = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 + 7 = \boxed{20x^4 - 9x^2 + 7}.$$

Приклад 3. $y = (x^2+1)(x^3 - 2x)$**.**

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'(x^3-2x) + (x^2+1)(x^3-2x)' \\ &= 2x(x^3-2x) + (x^2+1)(3x^2-2) = \boxed{5x^4 - 3x^2 - 2}. \end{aligned}$$

Приклад 4. $y = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$**.**

$$y' = \frac{2(x^2+1) - (2x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}}.$$

Приклад 5. $y = \sin(3x^2+1)$**.**

$$y' = \cos(3x^2+1)(3x^2+1)' = \boxed{6x\cos(3x^2+1)}.$$

Приклад 6. $y = e^{2x-x^2}$**.**

$$y' = e^{2x-x^2}(2x-x^2)' = \boxed{(2-2x)e^{2x-x^2}}.$$

Приклад 7. $y = \ln(x^2+4x+5)$**.**

$$y' = \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} = \boxed{\frac{2x+4}{x^2+4x+5}}.$$

Приклад 8. $y = \sqrt{1+x^2}$**.**

$$y' = \left((1+x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Приклад 9. $y = x^x$**,** $x > 0$**.**

$$\ln y = x\ln x \quad\Longrightarrow\quad \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y' = x^x(\ln x + 1)}.$$

Приклад 10. Дотична до $y = x^3 - 2x$ **у точці** $x_0 = 1$**.**

$$f(1) = -1, \quad f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f'(1) = 1.$$
$$y - (-1) = 1(x-1) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y = x - 2}.$$

Приклад 11. $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$**. Знайти швидкість і прискорення.**

$$\boxed{v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9}, \qquad \boxed{a(t) = v'(t) = 6t - 12}.$$

3. Практична робота: повні розв’язання завдань 1–17

Завдання 1. За означенням: $f(x) = 3x - 2$**.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-2-(3x-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \boxed{3}.$$

Завдання 2. За означенням: $f(x) = x^2 + 2x$**.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2 + 2h}{h} = \boxed{2x+2}. \end{aligned}$$

Завдання 3. $y = 5x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 7x + 9$**.**

$$y' = 5\cdot 6x^5 - 4\cdot 4x^3 + 3\cdot 2x - 7 = \boxed{30x^5 - 16x^3 + 6x - 7}.$$

Завдання 4. $y = x^{3/2} + 2x^{-1/2} - \dfrac{3}{x^2}$, $x > 0$.

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} + 6x^{-3}$$
$$= \boxed{\frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}}.$$

Завдання 5. $y = (x^3 - 2x)(x^2 + 4)$.

$$y' = (3x^2 - 2)(x^2 + 4) + (x^3 - 2x)2x$$
$$= 3x^4 + 10x^2 - 8 + 2x^4 - 4x^2 = \boxed{5x^4 + 6x^2 - 8}.$$

Завдання 6. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{2x - 5}$.

$$y' = \frac{(2x+3)(2x-5) - 2(x^2+3x-1)}{(2x-5)^2}$$
$$= \frac{4x^2 - 4x - 15 - 2x^2 - 6x + 2}{(2x-5)^2} = \boxed{\frac{2x^2 - 10x - 13}{(2x-5)^2}}, \quad x \neq \frac{5}{2}.$$

Завдання 7. $y = \sin(5x - 2) + \cos(3x)$.

$$\boxed{y' = 5\cos(5x - 2) - 3\sin(3x)}.$$

Завдання 8. $y = \tan(x^2 + 1)$.

$$y' = \frac{(x^2+1)'}{\cos^2(x^2+1)} = \boxed{\frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}}.$$

Завдання 9. $y = e^{x^3 - 2x}$.

$$y' = e^{x^3-2x}(3x^2 - 2) = \boxed{(3x^2 - 2)e^{x^3-2x}}.$$

Завдання 10. $y = 2^{x^2+1}$.

$$y' = 2^{x^2+1}\ln 2 \cdot 2x = \boxed{2x \ln 2 \cdot 2^{x^2+1}}.$$

Завдання 11. $y = \ln(1 + x^4)$.

$$y' = \frac{(1+x^4)'}{1+x^4} = \boxed{\frac{4x^3}{1+x^4}}.$$

Завдання 12. $y = \sqrt{1 + 3x^2 - x}$.

$$y' = \frac{1}{2}(1 + 3x^2 - x)^{-1/2}(6x - 1) = \boxed{\frac{6x - 1}{2\sqrt{1 + 3x^2 - x}}}.$$

Завдання 13. $y = \sin^2(2x)$**.**

$$y' = 2\sin(2x)\cos(2x)\cdot 2 = 4\sin(2x)\cos(2x) = \boxed{2\sin(4x)}.$$

Завдання 14. $y = e^{\sin x}$**.**

$$y' = e^{\sin x}(\sin x)' = \boxed{e^{\sin x}\cos x}.$$

Завдання 15. $y = \ln(\sin x)$**,** $0 < x < \pi$**.**

$$y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \boxed{\cot x}.$$

Завдання 16. $y = x^{2x}$**,** $x > 0$**.**

$$\ln y = 2x\ln x, \qquad \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} = 2\ln x + 2.$$

$$\boxed{y' = x^{2x}(2\ln x + 2)}.$$

Завдання 17. $y = (x^2+1)^x$**.**

$$\ln y = x\ln(x^2+1), \qquad \frac{y'}{y} = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

$$\boxed{y' = (x^2+1)^x\left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right)}.$$

4. Додаткові завдання підвищеної складності

Завдання 31. $y = (\sin x)^x$**,** $\sin x > 0$**.**

$$\ln y = x\ln(\sin x), \qquad \frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\boxed{y' = (\sin x)^x\big(\ln(\sin x) + x\cot x\big)}.$$

Завдання 32. $y = x^{\sin x}$**,** $x > 0$**.**

$$\ln y = \sin x\ln x, \qquad \frac{y'}{y} = \cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

$$\boxed{y' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)}.$$