ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

Формули Крамера та матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь

Повний конспект розв’язань для демонстрації на онлайн-занятті

Основні формули

$$AX = B, \qquad \Delta = \det A.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad X = A^{-1}B, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A.$$

Тут Δ_i — визначник матриці, отриманої заміною i-го стовпця матриці A стовпцем B.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Завдання 1.

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1 \cdot 1 = -3,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - 2 = -9,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = -3,$$

$$x = \frac{-9}{-3} = 3, \qquad y = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Перевірка: $2 \cdot 3 + 1 = 7$, $3 - 1 = 2$.

Відповідь: $(x, y) = (3, 1)$.

Завдання 2.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 5x + y = 13. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 26 = 30,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 20 = 19,$$

$$x = \frac{30}{13}, \qquad y = \frac{19}{13}.$$

Перевірка: $3 \cdot \frac{30}{13} - 2 \cdot \frac{19}{13} = \frac{52}{13} = 4$, $5 \cdot \frac{30}{13} + \frac{19}{13} = \frac{169}{13} = 13$.

Відповідь: $(x, y) = \left(\frac{30}{13}, \frac{19}{13}\right)$.

Завдання 3.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1) = -1 + 3 + 5 = 7,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6(1-2) - 1(-3-2) + 1(6+2) = -6 + 5 + 8 = 7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-3-2) - 6(-2-1) + 1(4-3) = -5 + 18 + 1 = 14,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2-6) - 1(4-3) + 6(4+1) = -8 - 1 + 30 = 21,$$

$$x = \frac{7}{7} = 1, \quad y = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{21}{7} = 3.$$

Перевірка: $1 + 2 + 3 = 6$; $2 - 2 + 3 = 3$; $1 + 4 - 3 = 2$.

Відповідь: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Завдання 4.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 10, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-3) - (-1)(-1-9) + 1(1-6) = -10 - 10 - 5 = -25,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-2-3) - (-1)(-10-6) + (10-4) = -15 - 16 + 6 = -25,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-10-6) - 3(-1-9) + (2-30) = -32 + 30 - 28 = -30,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-10) - (-1)(2-30) + 3(1-6) = -12 - 28 - 15 = -55,$$

$$x = 1, \quad y = \frac{6}{5}, \quad z = \frac{11}{5}.$$

Перевірка: $2 - \frac{6}{5} + \frac{11}{5} = 3$; $1 + \frac{12}{5} + \frac{33}{5} = 10$; $3 + \frac{6}{5} - \frac{11}{5} = 2$.

Відповідь: $(x, y, z) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

Завдання 5.

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0.$$

Друге рівняння дорівнює подвоєному першому:

$$x + 2y = 5 \iff x = 5 - 2y.$$

Нехай $y = t \in \mathbb{R}$. Тоді $x = 5 - 2t$.

Відповідь: $(x, y) = (5 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$.

Завдання 6.

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2.$$

Із першого рівняння $2x + 4y = 6$, а з другого $2x + 4y = 8$; отже, $6 = 8$ — суперечність.

Відповідь: $\varnothing$ (система несумісна).

Завдання 7.

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3y = 7. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad AX = B,$$

$$\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 - 7 \\ -5 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $2 \cdot \frac{8}{5} + \frac{9}{5} = 5$, $\frac{8}{5} + 3 \cdot \frac{9}{5} = 7$.

Відповідь: $(x, y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Завдання 8.

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x+y-z=1, \\ x-y+2z=5. \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix},$$

$$\det A = 1(2-1)-1(4+1)+1(-2-1)=1-5-3=-7.$$

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$C=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-5&-3\\-3&1&2\\-2&3&-1\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{adj} A = C^T=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-5&1&3\\-3&2&-1\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-5&1&3\\-3&2&-1\end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4-3-10\\-20+1+15\\-12+2-5\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-9\\-4\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9/7\\4/7\\15/7\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $\frac{9+4+15}{7}=4$; $\frac{18+4-15}{7}=1$; $\frac{9-4+30}{7}=5$.

Відповідь: $(x,y,z)=\left(\frac{9}{7},\frac{4}{7},\frac{15}{7}\right)$.

Завдання 9.

$$\begin{cases} 4x-y=9, \\ 2x+3y=1. \end{cases}$$

Формули Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&-1\\2&3\end{vmatrix}=12+2=14,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}9&-1\\1&3\end{vmatrix}=27+1=28,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}4&9\\2&1\end{vmatrix}=4-18=-14,$$

$$x=\frac{28}{14}=2,\qquad y=\frac{-14}{14}=-1.$$

Матричний метод:

$$A=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$X = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 28 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(x, y) = (2, -1)$.

Завдання 10.

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a-1)(a+1),$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2a - 2 = 2(a-1),$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 2(a-1).$$

Якщо $a \neq \pm 1$, то

$$x = \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{a+1}, \qquad y = \frac{2}{a+1}.$$

Якщо $a = 1$, то

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2 \end{cases} \iff (x, y) = (t, 2-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Якщо $a = -1$, то

$$\begin{cases} -x + y = 2, \\ x - y = 2 \end{cases} \implies 0 = 4,$$

тому система несумісна.

Відповідь: $\begin{cases} x = y = \frac{2}{a+1}, & a \neq \pm 1, \\ (x, y) = (t, 2-t),\ t \in \mathbb{R}, & a = 1, \\ \varnothing, & a = -1. \end{cases}$.

Завдання 11.

Сума двох чисел дорівнює 50, а різниця подвоєного першого та другого — 10.

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 2x - y = 10, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix},$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -50 - 10 = -60,$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 100 = -90,$$
$$x = \frac{-60}{-3} = 20, \qquad y = \frac{-90}{-3} = 30.$$

Перевірка: $20 + 30 = 50$, $2 \cdot 20 - 30 = 10$.

Відповідь: 20 і 30.

Завдання 12.

Ресурси: для P_1 — $2R_1 + R_2$, для P_2 — $R_1 + 3R_2$. Запаси: $500R_1$, $600R_2$.

$$\begin{cases} 2x + y = 500, \\ x + 3y = 600, \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Формули Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 500 & 1 \\ 600 & 3 \end{vmatrix} = 1500 - 600 = 900,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 500 \\ 1 & 600 \end{vmatrix} = 1200 - 500 = 700,$$

$$x = \frac{900}{5} = 180, \qquad y = \frac{700}{5} = 140.$$

Матричний метод:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1500 - 600 \\ -500 + 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $2 \cdot 180 + 140 = 500$, $180 + 3 \cdot 140 = 600$.

Відповідь: $x = 180$ (P_1), $\quad y = 140$ (P_2).

Підсумок

Якщо $\det A \neq 0$, то формули Крамера та матричний метод дають один і той самий єдиний розв'язок. Якщо $\det A = 0$, потрібно окремо дослідити сумісність системи; обернена матриця A^{-1} не існує.