Практичне заняття № 2

Границі та неперервність функції

Повні математичні розв'язання

Основні формули

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1,\quad \lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,\quad \lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}=e,\qquad \sin t\sim t,\ \tan t\sim t,\ \ln(1+t)\sim t,\ e^t-1\sim t.$$

$$f \text{ неперервна в } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Розібрані приклади з вихідного заняття

Приклад 1.

$$\lim_{x\to2}(x^2+3x-1)=2^2+3\cdot2-1=\boxed{9}$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=\boxed{6}$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\boxed{2}$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=5\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=\boxed{5}$$

Приклад 7.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}=9\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{(3x)^2}=9\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{9}{2}}$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot2=\boxed{2}$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\tan2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{2x}{\tan2x}\cdot\frac{3}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{3/x}=\lim_{x\to0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^6=\boxed{e^6}$$

Приклад 11. При $x\neq1$:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,\quad \lim_{x\to1}f(x)=2,\quad f(1)\text{ не визначено.}$$

Отже, $x = 1$ — точка усувного розриву; неперервне продовження: $f(1) = 2$.

Приклад 12.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

$-1 \neq 1$, отже, двостороння границя не існує; розрив першого роду (стрибок).

Приклад 13.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0, \qquad n \log n = o(n^2).$$

Приклад 14.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{5}{n}\right) = 3, \qquad 3n^2 + 5n \sim 3n^2.$$

Завдання 1–30. Повні розв'язання

Завдання 1.

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 4) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 12 - 10 + 4 = \boxed{6}$$

Завдання 2.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x - 2) = \boxed{1}$$

Завдання 3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = \boxed{12}$$

Завдання 4.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} = 2 \cdot 2 = \boxed{4}$$

Завдання 5.

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Завдання 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Завдання 7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{3x^3 + 5x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{7 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3}} = \frac{7 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

Завдання 8.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = \boxed{0}$$

Завдання 9.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{x}} + 1} = \boxed{3}$$

Завдання 10.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Завдання 11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\boxed{\frac{7}{3}}$$

Завдання 12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=\boxed{5}$$

Завдання 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=16\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}=16\cdot\frac{1}{2}=\boxed{8}$$

Завдання 14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1-3=\boxed{-2}$$

Завдання 15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

Завдання 16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

Завдання 17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\ln(1+3x)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Завдання 18.

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^6=\boxed{e^6}$$

Завдання 19.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=\boxed{e^{15}}$$

Завдання 20.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=\boxed{e^{-2}}$$

Завдання 21.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ a, & x=2.\end{cases}\qquad \lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)\iff 4=a\quad\Longrightarrow\quad\boxed{a=4}.$$

Завдання 22.

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1,\\ x^2+1, & x\geq 1.\end{cases}\qquad a=2.$$

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=a+b=2+b,\qquad \lim_{x\to 1+}f(x)=1^2+1=2=f(1).$$

$$2+b=2\Longrightarrow b=0,\qquad\boxed{a=2,\ b=0}.$$

Завдання 23.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}\qquad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0).$$

Отже, функція неперервна в $x = 0$.

Завдання 24.

$$f(x) = \frac{1}{x-3}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

$$\lim_{x\to 3-} \frac{1}{x-3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

$x = 3$ — нескінченний розрив (другого роду).

Завдання 25.

$$\lim_{x\to -1-} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x\to -1-} \frac{x+1}{-(x+1)} = -1, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x\to -1+} \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

Двостороння границя не існує; стрибок.

Завдання 26.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1, \\ 2x-1, & x > 1. \end{cases} \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = 1^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = 2\cdot 1 - 1 = 1, \quad f(1) = 1.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1.$$

Отже, функція неперервна в $x = 1$.

Завдання 27.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1(n)}{T_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$$

$$n = o(n\log n).$$

Завдання 28.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+100n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{100}{n}\right) = \boxed{1}.$$

$$n^2 + 100n \sim n^2.$$

Завдання 29. Для $n \ge 6$:

$$\frac{(n+1)^3/2^{n+1}}{n^3/2^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \le \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right)^3 = \frac{343}{432} < 1.$$

Тому відношення $n^3/2^n$ прямує до нуля (наприклад, за геометричним порівнянням):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = \boxed{0}, \qquad n^3 = o(2^n).$$

Завдання 30.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+20n+100}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(5 + \frac{20}{n} + \frac{100}{n^2}\right) = \boxed{5}.$$

$$T(n) \sim 5n^2, \qquad T(n) = \Theta(n^2).$$

Завдання 31–36. Підвищена складність

Завдання 31. Використаємо $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

Завдання 32. Використаємо $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Завдання 33.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{[\ln(1+x)]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Завдання 34. При $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x[(x^2+1) - x^2]}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Завдання 35.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = a \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \quad (a \neq 0), \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 2 \lim_{x\to 0+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2.$$

При $a = 0$ ліва границя також дорівнює $0 = a$. Отже,

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) \iff a = 2,\ b = 2. \quad \boxed{a = b = 2}.$$

Завдання 36. При $x \neq 0$:

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|.$$

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0, \quad \lim_{x\to 0}|x| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0}.$$