МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Лекція № 1. Похідна функції однієї змінної

Для студентів першого курсу спеціальності «Інженерія програмного забезпечення»

1 Задачі, що приводять до поняття похідної

Задача про миттєву швидкість

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, а її координата у момент часу t задається функцією $s = s(t)$. За проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ переміщення дорівнює

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Середня швидкість на цьому проміжку:

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \neq 0.$$

Щоб визначити швидкість саме в момент t_0, зменшуємо тривалість проміжку часу. Якщо існує скінченна границя, то **миттєва швидкість** дорівнює

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.}$$

Приклад 1.1. Нехай $s(t) = t^2 + 2t$ (метри), $t \geq 0$. Знайдемо швидкість у момент $t_0 = 3$ с.

$$\begin{aligned} \frac{s(3 + \Delta t) - s(3)}{\Delta t} &= \frac{(3 + \Delta t)^2 + 2(3 + \Delta t) - (3^2 + 2 \cdot 3)}{\Delta t} \\ &= \frac{9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2 + 6 + 2\Delta t - 15}{\Delta t} \\ &= \frac{8\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 8 + \Delta t. \end{aligned}$$

Отже, $v(3) = \lim_{\Delta t \to 0}(8 + \Delta t) = \boxed{8 \text{ м/с}}$.

Задача про швидкість зміни даних

Якщо $N(t)$ — кількість оброблених запитів за час t, то відношення $[N(t + \Delta t) - N(t)]/\Delta t$ описує середню інтенсивність обробки. Його границя (коли вона існує) дає миттєву інтенсивність. Та сама математична конструкція виникає у фізиці, економіці та інформатиці.

2 Означення похідної

Означення 2.1. Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0. **Похідною функції f у точці x_0** називають скінченну границю

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}},$$

якщо ця границя існує. Вираз у границі називають **відношенням приросту функції до приросту аргументу**.

Позначення: y', $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Похідна у точці — число; похідна на проміжку — функція $x \mapsto f'(x)$.

Приклад 2.2. Знайти за означенням похідну $f(x) = x^2$ у довільній точці x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = \boxed{2x}. \end{aligned}$$

Тому, зокрема, $f'(3) = 6$.

3 Геометричний зміст похідної

Розглянемо графік $y = f(x)$ і точки $M(x_0, f(x_0))$, $N(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Кутовий коефіцієнт січної MN:

$$k_{MN} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Якщо при $h \to 0$ січна має граничне положення, що є невертикальною дотичною, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$\boxed{k_{\text{дот}} = f'(x_0) = \tan \alpha},$$

де α — кут нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox (за умови $\cos \alpha \neq 0$).
Рівняння дотичної:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

Рівняння нормалі (якщо $f'(x_0) \neq 0$):

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Якщо $f'(x_0) = 0$, дотична горизонтальна, а нормаль вертикальна: $x = x_0$.

Приклад 3.1. Знайти дотичну та нормаль до параболи $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

$$f(1) = 1, \qquad f'(x) = 2x, \qquad f'(1) = 2.$$

Дотична: $y - 1 = 2(x - 1)$, тобто $\boxed{y = 2x - 1}$. Нормаль: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, тобто $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$.

Приклад 3.2. За якого x дотична до $y = x^2 - 4x + 1$ паралельна прямій $y = 2x + 5$? Кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює 2. Оскільки $y' = 2x - 4$, маємо

$$2x - 4 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x = 3}.$$

Точка дотику: $(3, -2)$; дотична: $y + 2 = 2(x - 3)$, або $y = 2x - 8$.

4 Таблиця похідних елементарних функцій

У формулах нижче x належить області визначення функції та відповідному інтервалу диференційовності; C — стала.

Функція $f(x)$	**Похідна** $f'(x)$
C	0
x^α $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha - 1}$
$\sqrt{x}$ $(x > 0)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\dfrac{1}{x^2}$
e^x	e^x
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$a^x \ln a$
$\ln x$ $(x > 0)$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln \lvert x \rvert$ $(x \neq 0)$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$ $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$ $(\cos x \neq 0)$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$ $(\sin x \neq 0)$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$ $(\lvert x \rvert < 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$ $(\lvert x \rvert < 1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1 + x^2}$

Зауваження 4.1. Для $\operatorname{arccot} x$ прийнято гілку зі значеннями в $(0, \pi)$. У формулах для тригонометричних функцій аргумент вимірюється в радіанах.

5 Арифметичні властивості похідної

Теорема 5.1. Якщо u і v диференційовні в точці x, а C — стала, то

$$(Cu)' = Cu', \qquad (u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0).$$

Доведення правила добутку. Позначимо $\Delta u = u(x+h) - u(x)$, $\Delta v = v(x+h) - v(x)$. Тоді

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\ &= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$

Поділивши на $h \neq 0$, одержуємо

$$\frac{\Delta(uv)}{h} = v\frac{\Delta u}{h} + u\frac{\Delta v}{h} + \frac{\Delta u}{h}\Delta v.$$

Оскільки диференційовність тягне неперервність (це доведемо нижче), $\Delta v \to 0$, а $\Delta u/h \to u'$. Переходячи до границі, маємо $(uv)' = u'v + uv'$.

Приклад 5.2. Знайти похідну $y = (x^2+1)\sin x$.

$$y' = (x^2+1)'\sin x + (x^2+1)(\sin x)' = \boxed{2x\sin x + (x^2+1)\cos x}.$$

Приклад 5.3. Знайти похідну $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, $x \neq 1$.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(2x)(x-1) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}}.\end{aligned}$$

6 Диференційовність функції однієї змінної

Означення 6.1. Функція f називається **диференційовною в точці** x_0, якщо її приріст можна подати у вигляді

$$\boxed{\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0},$$

де A — число, яке не залежить від Δx, а $o(\Delta x)$ — величина, для якої $o(\Delta x)/\Delta x \to 0$.

Еквівалентно: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$.

Теорема 6.2 (Критерій диференційовності)**.** Функція f диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли існує скінченна похідна $f'(x_0)$. При цьому $A = f'(x_0)$.

Доведення. Якщо $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, то для $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \longrightarrow A,$$

отже, $f'(x_0) = A$. Навпаки, якщо $f'(x_0) = A$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x), \qquad \varepsilon(\Delta x) \to 0,$$

а тому $\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = A\Delta x + o(\Delta x)$.

Теорема 6.3. Якщо функція диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Із $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ випливає $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$, що й означає неперервність.

Приклад 6.4 (Неперервність не гарантує диференційовності)**.** Функція $f(x) = |x|$ неперервна в $x_0 = 0$, адже $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$. Однак

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0, \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

Права та ліва границі різні, тому $f'(0)$ не існує. Графік має кутову точку.

7 Диференціал функції

Означення 7.1. **Диференціалом першого порядку** функції $y = f(x)$ у точці x називають головну лінійну відносно Δx частину приросту:

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \mathrm{d}x := \Delta x.$$

Таким чином,

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\Delta x).$$

Диференціал дає **лінійне наближення**: при малому h

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h}.$$

Приклад 7.2. Наближено обчислити $\sqrt{4.04}$ без калькулятора. Візьмемо $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$, $h = 0.04$.

$$f(4) = 2, \qquad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\cdot 0.04 = 0.01.$$

Отже, $\boxed{\sqrt{4.04} \approx 2.01}$.

Теорема 7.3 (Інваріантність форми диференціала першого порядку; без доведення)**.** Нехай $y = f(u)$, $u = g(x)$, причому обидві функції диференційовні у відповідних точках. Тоді

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u}, \qquad \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Отже, форма $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$ зберігається незалежно від того, чи є u незалежною змінною, чи диференційовною функцією іншої змінної.

8 Похідна складної функції

Теорема 8.1 (Правило ланцюга)**.** Нехай $u = g(x)$ диференційовна в x_0, а $y = f(u)$ — в $u_0 = g(x_0)$. Тоді складна функція $y = f(g(x))$ диференційовна в x_0, причому

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}, \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Ідея доведення. Маємо $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$ та $\Delta u = g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Оскільки $\Delta u = O(\Delta x)$, то $o(\Delta u) = o(\Delta x)$, звідки

$$\Delta y = f'(u_0)g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

За критерієм диференційовності отримуємо формулу.

Приклад 8.2. Знайти похідну $y = (3x^2 - 1)^5$. Покладемо $u = 3x^2 - 1$. Тоді $y = u^5$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 5u^4, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 6x,$$

$$\boxed{y' = 5(3x^2 - 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 1)^4}.$$

Приклад 8.3. Знайти похідну $y = \sin(x^2 + 1)$.

$$u = x^2 + 1, \quad y = \sin u, \quad y' = \cos u \cdot 2x = \boxed{2x\cos(x^2 + 1)}.$$

Приклад 8.4. Знайти похідну $y = \ln(1 + x^2)$.

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' = \boxed{\frac{2x}{1 + x^2}}.$$

9 Похідна оберненої функції

Теорема 9.1. Нехай f строго монотонна й неперервна на деякому інтервалі, диференційовна в точці x_0, причому $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена функція $g = f^{-1}$ диференційовна в точці $y_0 = f(x_0)$ і

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}.$$

Доведення. Позначимо $y = f(x)$, $x = g(y)$. Для $\Delta y \neq 0$ через ін'єктивність f маємо $\Delta x \neq 0$, і

$$\frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Із неперервності оберненої функції $\Delta y \to 0$ випливає $\Delta x \to 0$. Тому права частина прямує до $1/f'(x_0)$.

Приклад 9.2 (Виведення похідної арксинуса)**.** Нехай $y = \arcsin x$, де $-1 < x < 1$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Тоді $x = \sin y$. Диференціюючи обернену функцію, отримуємо

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y}.$$

Оскільки $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, маємо $\cos y > 0$, а отже,

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Тому

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1}.$$

У точках $x = \pm 1$ скінченної двосторонньої похідної немає.

Приклад 9.3. Знайти похідну $y = \arcsin(2x)$, $|x| < \frac{1}{2}$.

$$\boxed{y' = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}}.$$

Тут використано одночасно похідну арксинуса та правило ланцюга.

10 Приклади для спільного розбору зі студентами

Приклад 10.1. Знайти похідну $y = \dfrac{\sin(3x)}{1 + x^2}$.

$$\begin{aligned} u &= \sin(3x), & u' &= 3\cos(3x), \\ v &= 1 + x^2, & v' &= 2x. \end{aligned}$$

За правилом частки

$$\boxed{y' = \frac{3(1 + x^2)\cos(3x) - 2x\sin(3x)}{(1 + x^2)^2}}.$$

Приклад 10.2. Знайти рівняння дотичної до $y = \ln x$ при $x_0 = 1$.

$$f(1) = 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(1) = 1.$$

Отже, $y - 0 = 1(x - 1)$, тобто $\boxed{y = x - 1}$.

Приклад 10.3. Чи диференційовна в нулі функція $f(x) = x|x|$?

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \longrightarrow 0.$$

Отже, $f'(0) = 0$, і за критерієм функція диференційовна в нулі. Це відрізняється від функції $|x|$, яка в нулі не має похідної.