МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Тема: Перша визначна границя. Неперервність функції та властивості неперервних функцій.

1. Перша визначна границя

Теорема. Якщо x вимірюється в радіанах, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доведення. Для $0 < x < \pi/2$ на одиничному колі площа трикутника, утвореного радіусами та хордою, менша від площі сектора, а площа сектора менша від площі трикутника з дотичною. Тому $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Поділивши нерівності на $\sin x$, дістанемо

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Оскільки $\cos x$ прямує до 1 при $x \to 0$, за теоремою про двох міліціонерів маємо потрібну границю справа. Функція $\sin x / x$ парна, отже границя зліва така сама. Теорему доведено.

Приклад 1. Обчислити границю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$$

Позначимо $t = \sqrt{x}$. Тоді $x = t^2$ і $t \to 1$. Розкладемо чисельник на множники:

$$\frac{t^4-t}{t-1}=\frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}=t(t^2+t+1).$$

Після скорочення та переходу до границі отримуємо $1 \cdot (1 + 1 + 1) = 3$. Відповідь: 3.

Приклад 2. Обчислити границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

Оскільки перший множник прямує до 1, а другий — до $+\infty$, вираз прямує до $+\infty$. Скінченної границі немає.

2. Неперервність функції в точці

Означення за Коші. Функція f неперервна в точці x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх x з області визначення функції з умови $|x - x_0| < \delta$ випливає $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Означення мовою приростів. Нехай $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — відповідний приріст функції. Тоді неперервність у точці x_0 означає, що $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Справді, $|\Delta x| < \delta$ рівносильне $|x - x_0| < \delta$, а $|\Delta y| = |f(x) - f(x_0)|$. Отже це формулювання безпосередньо випливає з означення Коші.

Означення мовою границь. Функція f неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли границя f(x) при $x \to x_0$ дорівнює $f(x_0)$ (якщо x_0 є точкою згущення області визначення).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Означення за Гейне. Функція f неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли для кожної послідовності x_n з області визначення, що прямує до x_0, послідовність $f(x_n)$ прямує до $f(x_0)$.

Приклад 3. Довести неперервність $f(x) = x^2 + 2$ на всій числовій осі мовою приростів.

Нехай x_0 — довільна дійсна точка. Обчислимо приріст функції:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + 2 - (x_0^2 + 2) = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$$

При $\Delta x \to 0$ обидва доданки прямують до нуля, отже $\Delta y \to 0$. Тому f неперервна в довільній точці $x_0 \in \mathbb{R}$, тобто на всій $\mathbb{R}$.

Приклад 4. Довести неперервність $f(x) = \sin x$ на всій числовій осі.

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0|$$

Отже для довільного $\varepsilon > 0$ досить вибрати $\delta = \varepsilon$. Тоді $|x - x_0| < \delta$ забезпечує $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Функція $\sin x$ неперервна на $\mathbb{R}$.

3. Арифметичні властивості неперервних функцій

Теорема. Якщо f і g неперервні в точці x_0, то функції $f + g$, $f - g$, cf (c — стала), fg неперервні в цій точці. Частка f/g неперервна за додаткової умови $g(x_0) \neq 0$.

Наслідки. Стала функція та функція $y = x$ неперервні. Звідси за правилом добутку кожна функція $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, неперервна на $\mathbb{R}$. Будь-який многочлен неперервний на $\mathbb{R}$, а дробово-раціональна функція $P(x)/Q(x)$ неперервна в усіх точках, де $Q(x) \neq 0$.

Теорема про неперервність складної функції. Якщо g неперервна в точці x_0, а f неперервна в точці $g(x_0)$, то функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

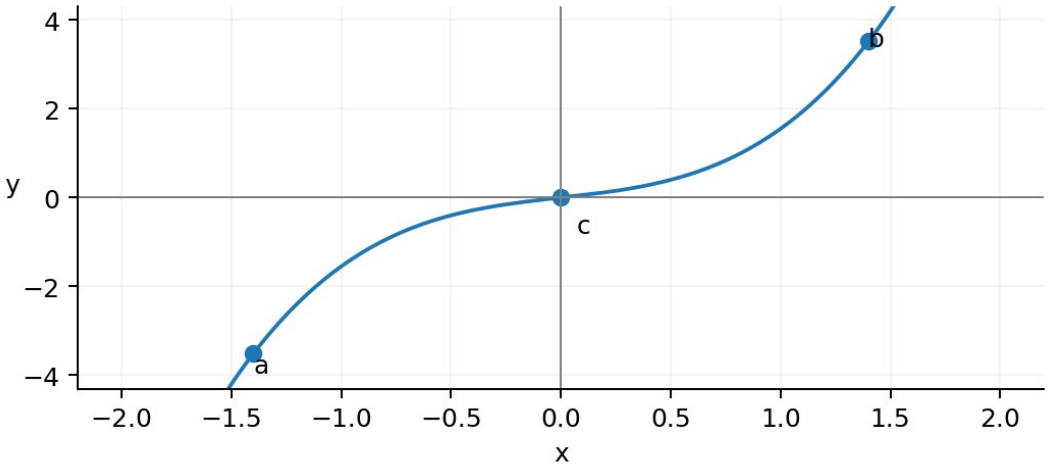
Доведення. Із неперервності g маємо $g(x) \to g(x_0)$ при $x \to x_0$. За неперервністю f в точці $g(x_0)$ одержуємо $f(g(x)) \to f(g(x_0))$. Отже складна функція неперервна в точці x_0.

Наслідок. Якщо g неперервна на D, а f неперервна на множині, що містить g(D), то композиція $f \circ g$ неперервна на D.

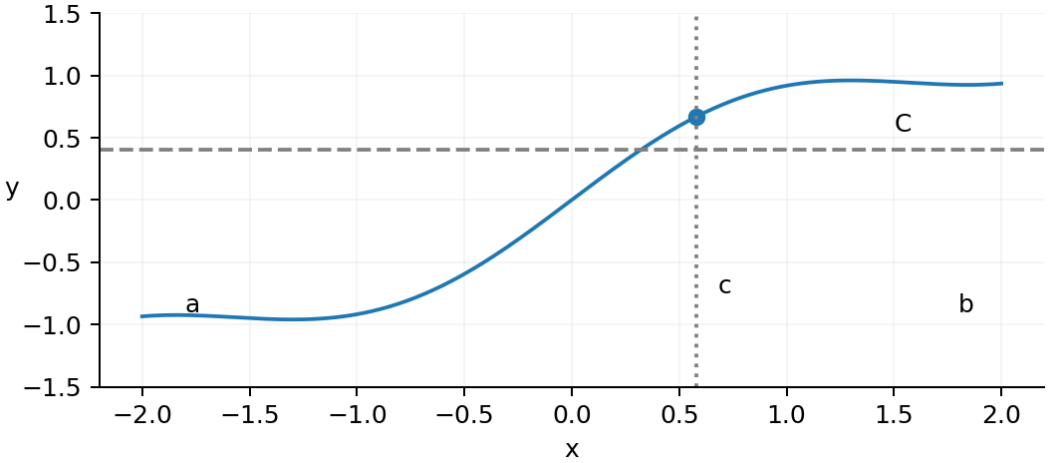
Приклад. Функція $y = \sin(x^2)$ неперервна на $\mathbb{R}$, оскільки x^2 неперервна на $\mathbb{R}$, а sin t неперервна для кожного $t \in \mathbb{R}$.

4. Основні властивості неперервних функцій на відрізку

Перша теорема Больцано–Коші. Якщо функція f неперервна на [a, b] і f(a) та f(b) мають різні знаки, то існує $c \in (a, b)$, для якого $f(c) = 0$.



Друга теорема Больцано–Коші. Якщо функція f неперервна на [a, b], то вона набуває кожного значення C, що лежить між f(a) та f(b): існує $c \in [a, b]$, для якого $f(c) = C$.



Доведення. Якщо C збігається з f(a) або f(b), твердження очевидне. В іншому разі функція $h(x) = f(x) - C$ неперервна на [a, b], а значення h(a) і h(b) мають протилежні знаки. За першою теоремою Больцано–Коші існує $c \in (a, b)$, для якого $h(c) = 0$, тобто $f(c) = C$.

Перша теорема Вейєрштрасса. Якщо функція f неперервна на відрізку [a, b], то вона обмежена на цьому відрізку.

Друга теорема Вейєрштрасса. Якщо функція f неперервна на відрізку [a, b], то вона досягає на ньому свого найбільшого і найменшого значень.

Таким чином, для неперервної функції на відрізку існують точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, у яких $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ для всіх $x \in [a, b]$.

5. Існування та неперервність оберненої функції

Означення. Нехай функція $f: I \to J$ є взаємно однозначною, тобто кожному $y \in J$ відповідає рівно одне $x \in I$, для якого $y = f(x)$. Функцію, що кожному $y \in J$ ставить у відповідність це x, називають оберненою до f і позначають $f^{-1}: J \to I$.

Теорема (про існування та неперервність оберненої функції). Якщо функція f неперервна і строго монотонна на проміжку I, то вона має обернену функцію f^{-1} на проміжку J = f(I). Обернена функція строго монотонна в тому самому напрямі, що й f, та неперервна на J (у кінцевих точках — односторонньо).

Доведення. Строга монотонність забезпечує ін’єктивність f, тому для кожного $y \in J$ існує єдине $x \in I$ з рівністю $f(x) = y$. Отже, існує обернена функція $g = f^{-1}$, яка строго монотонна. Доведемо неперервність g. Нехай $y_0 \in J$, $x_0 = g(y_0)$. Якщо x_0 — внутрішня точка I, то для кожного $\varepsilon > 0$ можна вибрати $x_-, x_+ \in I$ так, що $x_0 - \varepsilon < x_- < x_0 < x_+ < x_0 + \varepsilon$. За строгою монотонністю числа $f(x_-)$ і $f(x_+)$ лежать по різні боки від y_0. Тому існує $\delta > 0$ таке, що з $|y - y_0| < \delta$, $y \in J$, випливає, що g(y) лежить між x_- та x_+. Отже, $|g(y) - x_0| < \varepsilon$. Для кінцевих точок проміжку доведення аналогічне, з використанням односторонніх околів. Таким чином, g неперервна на J.

Приклад 1. Обернена функція до синуса.

Функція $y = \sin x$ на всій $\mathbb{R}$ не є взаємно однозначною. Обмежимо її на відрізок $[-\pi/2; \pi/2]$. На цьому відрізку $\sin x$ неперервна, строго зростає і набуває всіх значень із $[-1; 1]$. Тому існує обернена функція $y = \arcsin x$, визначена на $[-1; 1]$, зі значеннями у $[-\pi/2; \pi/2]$. За теоремою вона неперервна на $[-1; 1]$.

Тотожності: $\sin(\arcsin x) = x$ для $x \in [-1; 1]$; $\arcsin(\sin x) = x$ для $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Зокрема, $\arcsin(-1) = -\pi/2$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \pi/2$.

Приклад 2. Обернена функція до косинуса.

Функція $y = \cos x$ на всій $\mathbb{R}$ не є взаємно однозначною. Обмежимо її на відрізок $[0; \pi]$. На цьому відрізку $\cos x$ неперервна, строго спадає і набуває всіх значень із $[-1; 1]$. Тому існує обернена функція $y = \arccos x$, визначена на $[-1; 1]$, зі значеннями у $[0; \pi]$. За теоремою вона неперервна на $[-1; 1]$ і строго спадає.

Тотожності: $\cos(\arccos x) = x$ для $x \in [-1; 1]$; $\arccos(\cos x) = x$ для $x \in [0; \pi]$. Зокрема, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos 1 = 0$.