# ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

**Аналітична геометрія у просторі. Поверхні другого порядку**

Спеціальність: 122 «Комп'ютерні науки»

Повні покрокові розв'язання для проведення онлайн-заняття

## 1. Площина у просторі

### Завдання 1. Скласти рівняння площини через точку з заданим нормальним вектором

Дано точку $A(1,-1,2)$ та нормальний вектор $\vec{n}=(2,1,-3)$. Рівняння площини з нормальним вектором $(A,B,C)$, що проходить через точку $(x_0,y_0,z_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Підставляємо дані:

$$2(x-1)+(y+1)-3(z-2)=0.$$

$$2x-2+y+1-3z+6=0.$$

Отже, $\boxed{2x+y-3z+5=0}$. **Завдання 2. Площина через три точки**

Дано $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Знайдемо два напрямні вектори, що лежать у площині:

$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0), \qquad \overrightarrow{AC}=(-1,0,1).$$

Нормальний вектор площини — їх векторний добуток:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,1,1).$$

Через точку $A(1,0,0)$:

$$(x-1)+y+z=0.$$

Отже, $\boxed{x+y+z-1=0}$. **Завдання 3. Взаємне розміщення двох площин**

$$\pi_1:\ 2x-y+z-1=0, \qquad \pi_2:\ 4x-2y+2z+3=0.$$

Їх нормальні вектори:

$$\vec{n}_1=(2,-1,1), \qquad \vec{n}_2=(4,-2,2)=2\vec{n}_1.$$

Нормальні вектори колінеарні, тому площини або паралельні, або збігаються. Помножимо перше рівняння на 2:

$$4x-2y+2z-2=0.$$

Воно не збігається з другим рівнянням, де вільний член $+3$. **Відповідь:** площини паралельні та не збігаються.

# 2. Пряма у просторі

### Завдання 4. Параметричні та канонічні рівняння прямої

Пряма проходить через $A(1,2,-1)$ і має напрямний вектор $\vec{s}=(2,-1,3)$. Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 2-t, \\ z = -1+3t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}}.$$

**Відповідь:** обидві форми рівняння наведено вище. **Завдання 5. Взаємне розміщення двох прямих**

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 2-t, \\ z = t; \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = 2+2s, \\ y = 1-2s, \\ z = 1+2s. \end{cases}$$

Напрямні вектори:

$$\vec{s}_1 = (1,-1,1), \qquad \vec{s}_2 = (2,-2,2) = 2\vec{s}_1.$$

Отже, напрямні вектори колінеарні: прямі або паралельні, або збігаються. Перевіримо, чи точка $\ell_2$ при $s=0$, тобто $P(2,1,1)$, належить $\ell_1$. Для $\ell_1$ з $x=2$ маємо $t=1$. Тоді $y=1$ і $z=1$. Отже, $P(2,1,1)$ належить $\ell_1$. Тому прямі не просто паралельні — вони збігаються. **Відповідь:** $\ell_1$ і $\ell_2$ — одна й та сама пряма (збігаються). **Завдання 6.**

### Перетин прямої з площиною та кут між ними

Пряма:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Площина: $2x-y+2z-5=0$. Позначимо спільне відношення через $t$. Тоді параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1+2t, \\ z = -t. \end{cases}$$

Підставляємо у рівняння площини:

$$2(1+t) - (-1+2t) + 2(-t) - 5 = 0,$$

$$2+2t+1-2t-2t-5=0 \implies -2-2t=0 \implies t=-1.$$

Отже, точка перетину: $\boxed{P(0,-3,1)}$. Для кута $\alpha$ між прямою і площиною використовуємо формулу

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}.$$

$$\vec{s}=(1,2,-1), \qquad \vec{n}=(2,-1,2),$$

$$\vec{s}\cdot\vec{n} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = -2,$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}, \qquad |\vec{n}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 3.$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}, \qquad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{9} \approx 15{,}8^\circ.$$

**Відповідь:** $P(0,-3,1)$, кут між прямою і площиною $\approx 15{,}8^\circ$.

# 3. Поверхні другого порядку

### Завдання 7. Визначити тип поверхні та описати координатні перерізи

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1.$$

Усі три квадрати входять зі знаком «+», права частина дорівнює 1. Це еліпсоїд із центром у початку координат. Півосі: вздовж $Ox$ — 3, вздовж $Oy$ — 2, вздовж $Oz$ — 4. Переріз площиною $Oxy$ ($z=0$):

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

— еліпс із півосями 3 і 2. Переріз площиною $Oxz$ ($y=0$):

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

— еліпс із півосями 3 і 4. Переріз площиною $Oyz$ ($x=0$):

$$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$$

— еліпс із півосями 2 і 4. **Відповідь:** еліпсоїд з півосями 3, 2, 4; усі координатні перерізи — еліпси. **Завдання 8. Визначити тип поверхні**

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Два додатні квадрати та один від'ємний квадрат при правій частині 1 — це канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда. Вісь поверхні відповідає змінній із від'ємним квадратом, тобто це вісь $Oz$. Наприклад, при $z=0$ маємо

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

— еліпс. При $z=z_0$:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1+\frac{z_0^2}{16},$$

тобто паралельні площині $Oxy$ перерізи є еліпсами, що збільшуються при зростанні $|z_0|$. **Відповідь:** однопорожнинний гіперболоїд з віссю $Oz$. **Завдання 9. Дослідити поверхню методом паралельних перерізів**

$$z=x^2+y^2.$$

Розглянемо перерізи площинами, паралельними координатним площинам. **1. Горизонтальні перерізи** $z=h$**.**

$$x^2+y^2=h.$$

Якщо $h>0$ — це коло радіуса $\sqrt{h}$; при $h=0$ — одна точка $O(0,0,0)$; при $h<0$ дійсних точок немає. **2. Перерізи площинами** $x=a$**.**

$$z=a^2+y^2$$

— параболи, відкриті в додатному напрямі $Oz$. **3. Перерізи площинами** $y=b$**.**

$$z=x^2+b^2$$

— також параболи, відкриті в додатному напрямі $Oz$. Отже, поверхня обертально-симетрична відносно осі $Oz$, має вершину в початку координат і розширюється догори. **Відповідь:** $z = x^2 + y^2$ — круговий (еліптичний) параболоїд з віссю $Oz$.
**Завдання 10. Поверхня, утворена обертанням параболи**

Дано параболу $y^2 = 4ax$. Її вісь — $Ox$. При обертанні навколо осі $Ox$ координата $y$ у площині замінюється відстанню до осі $Ox$ у просторі:

$$\boxed{y^2 + z^2 = 4ax}.$$

Це поверхня обертання, усі перерізи площинами $x = h > 0$ є колами:

$$y^2 + z^2 = 4ah.$$

**Відповідь:** круговий параболоїд обертання з віссю $Ox$; його рівняння $y^2 + z^2 = 4ax$.

## Домашнє завдання

Повторити канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів.