ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Векторна алгебра. Аналітична геометрія на площині
Спеціальність: 122 «Комп’ютерні науки»
Повні покрокові розв’язання для проведення онлайн-заняття

1. Векторна алгебра

Завдання 1. Скалярний добуток, довжини векторів і кут між ними

$$\vec{a} = (1, 2, -1), \qquad \vec{b} = (2, -1, 2).$$

Скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -2.$$

Довжини векторів:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Кут між векторами знаходимо з формули:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{-2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \approx 105{,}8^\circ.$$

Відповідь: скалярний добуток −2; довжини √6 і 3; кут ≈ 105,8°.

Завдання 2. Векторний добуток і площа паралелограма

Векторний добуток обчислюємо через детермінант (визначник):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -4, -5).$$

Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Відповідь: векторний добуток (3; −4; −5), площа 5√2.

Завдання 3. Мішаний добуток і об’єм паралелепіпеда

$$\vec{a} = (1, 0, 2), \quad \vec{b} = (2, 1, -1), \quad \vec{c} = (0, 3, 1).$$

Мішаний добуток:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Розкладаємо детермінант за першим рядком:

$$1\cdot(1\cdot 1-(-1)\cdot 3)+2\cdot(2\cdot 3-1\cdot 0)=4+12=16.$$

Об’єм паралелепіпеда — модуль мішаного добутку:

$$V=|16|=16.$$

Відповідь: мішаний добуток 16, об’єм 16.

Завдання 4. Розкласти вектор за базисом

$$\vec{x}=(5,1),\quad \vec{e}_1=(1,1),\quad \vec{e}_2=(2,-1).$$

$$\vec{x}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2.$$

За координатами отримуємо систему:

$$\alpha+2\beta=5,\qquad \alpha-\beta=1.$$

Віднімемо друге рівняння від першого:

$$3\beta=4,\qquad \beta=\frac{4}{3},\qquad \alpha=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}.$$

$$\vec{x}=\frac{7}{3}\vec{e}_1+\frac{4}{3}\vec{e}_2.$$

Відповідь: координати вектора в цьому базисі (7/3; 4/3).

Завдання 5. Поділ відрізка у заданому відношенні

$$A(-1,2),\quad B(4,7),\quad AM:MB=2:3.$$

Для внутрішнього поділу у відношенні m:n:

$$M\Big(\frac{nx_A+mx_B}{m+n},\ \frac{ny_A+my_B}{m+n}\Big).$$

$$x_M=\frac{3\cdot(-1)+2\cdot 4}{5}=1,\qquad y_M=\frac{3\cdot 2+2\cdot 7}{5}=4.$$

Відповідь: M(1; 4).

2. Пряма на площині

Завдання 6. Рівняння прямої через дві точки

$$A(1,2),\quad B(5,4).$$

Напрямний вектор:

$$\overrightarrow{AB}=(5-1,4-2)=(4,2)=2(2,1).$$

Візьмемо напрямний вектор (2; 1). Параметричне рівняння:

$$x=1+2t,\qquad y=2+t,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Канонічне рівняння:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}.$$

Загальне рівняння:

$$x - 1 = 2(y-2) \quad \Longrightarrow \quad x - 2y + 3 = 0.$$

Відповідь: x − 2y + 3 = 0; x = 1 + 2t, y = 2 + t; канонічне рівняння наведено вище.

Завдання 7. Взаємне розміщення двох прямих і кут між ними

$$\ell_1 :\ 2x - y + 3 = 0, \qquad \ell_2 :\ x + 2y - 4 = 0.$$

Нормальні вектори прямих:

$$\vec{n}_1 = (2,\ -1), \qquad \vec{n}_2 = (1, 2).$$
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0.$$

Отже, нормалі перпендикулярні, а тому й самі прямі перпендикулярні.

$$\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: прямі перетинаються під кутом 90°.

Завдання 8. Відстань від точки до прямої

$$M(2, 5), \qquad 2x - y = 0.$$

Використовуємо формулу відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь: d = √5/5.

3. Лінії другого порядку

Завдання 9. Еліпс

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Порівнюємо з канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a = 3, \quad b = 2.$$

Для фокусної відстані:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5, \qquad c = \sqrt{5}.$$
$$F_1(-\sqrt{5}, 0), \quad F_2(\sqrt{5}, 0), \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Відповідь: a = 3, b = 2; фокуси та ексцентриситет наведено вище.

Завдання 10. Гіпербола

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9, \quad a = 4, \quad b = 3.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25, \qquad c = 5.$$

Фокуси:

$$F_1(-5, 0), \qquad F_2(5, 0).$$

Асимптоти:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x.$$

Відповідь: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; асимптоти $y = 3x/4$ та $y = -3x/4$.

Завдання 11. Парабола

$$y^2 = 8x.$$

Канонічна форма параболи:

$$y^2 = 4px, \qquad 4p = 8, \qquad p = 2.$$

Фокус і директриса:

$$F(p, 0) = F(2, 0), \qquad x = -p = -2.$$

Відповідь: F(2; 0), директриса $x = -2$.

Домашнє завдання

Побудувати схематичні графіки еліпса, гіперболи та параболи із завдань 9–11.