ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Обернена матриця. Ранг. Системи лінійних рівнянь

Спеціальність: 122 «Комп’ютерні науки»

Повні покрокові розв’язання для проведення онлайн-заняття

1. Обернена матриця і ранг

Завдання 1. Знайти A^{-1} методом алгебраїчних доповнень і перевірити $AA^{-1} = E$

Дано:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2(4 - 1) - 1(2 - 0) = 6 - 2 = 4 \neq 0.$$

Отже, обернена матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$A_{11}=3$, $A_{12}=-2$, $A_{13}=1$; $A_{21}=-2$, $A_{22}=4$, $A_{23}=-2$;

$A_{31}=1$, $A_{32}=-2$, $A_{33}=3$.

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вона симетрична, тому при транспонуванні не змінюється. За формулою $A^{-1}=(1/\det A)\cdot \operatorname{adj} A$:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Перевірка множенням:

Перший рядок добутку: (2,1,0)·стовпці A^{-1} дає (1,0,0). Аналогічно для інших рядків.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже, $AA^{-1} = E$, обернену матрицю знайдено правильно.

Завдання 2. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Виконаємо елементарні перетворення рядків:

$$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 + R_1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Далі $R_2 \to R_2 - 3R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Маємо три ненульові рядки. Тому

$$\operatorname{rank} A = 3.$$

2. Правило Крамера та матричний метод

Завдання 3. Розв’язати систему за формулами Крамера

$2x + y - z = 1,$
$x - y + 2z = 5,$
$3x + 2y + z = 10.$

Головний визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -10.$$

Визначник Δ_x (перший стовпець замінюємо стовпцем вільних членів):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = -10.$$

Визначник Δ_y:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = -20.$$

Визначник Δ_z:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = -30.$$

За формулами Крамера:

$$x = \Delta_x/\Delta = 1,\ y = \Delta_y/\Delta = 2,\ z = \Delta_z/\Delta = 3.$$

Відповідь: (x,y,z) = (1,2,3).

Завдання 4. Розв’язати цю саму систему матричним методом $X=A^{-1}B$

Матриця коефіцієнтів A та стовпець B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\det A = -10 \neq 0$, матриця A^{-1} існує:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/10 & -1/10 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/10 & 3/10 \end{pmatrix}$$

Тоді $X=A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: x=1, y=2, z=3.

3. Метод Гаусса

Завдання 5. Розв’язати систему методом Гаусса

x + 2y − z = 2,
2x − y + 3z = 9,
3x + y + 2z = 11.

Запишемо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отже, маємо дві незалежні рівності:

$$-5y + 5z = 5 \Rightarrow y - z = -1 \Rightarrow y = z - 1.$$

$$x + 2y - z = 2 \Rightarrow x + 2(z-1) - z = 2 \Rightarrow x = 4 - z.$$

Нехай z=t, t∈R. Тоді

$$x = 4 - t,\ y = t - 1,\ z = t,\ t \in R.$$

Завдання 6. Дослідити та розв’язати систему

$x + y + z = 2,$
$2x + 2y + 2z = 4,$
$x - y + z = 0.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Із третього рядка: $-2y=-2$, тому $y=1$.

Із першого: $x+1+z=2$, тобто $x+z=1$.

Нехай $z=t$. Тоді $x=1-t$.

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 2 < 3$, тому система сумісна і має нескінченно багато розв’язків.

$$x = 1 - t,\ y = 1,\ z = t,\ t \in R.$$

Завдання 7. Розв’язати матричне рівняння AX = B

Дано:

Матриця A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця B:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Помножимо рівняння AX=B зліва на A^{-1}. Маємо $X=A^{-1}B$.

$$\det A = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = 1.$$

Тому

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

є матрицею A^{-1}. Обчислюємо:

$X = A^{-1}B =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$AX =$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

що збігається з B.

Відповідь:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Домашнє завдання

Розв’язати одну систему 3×3 трьома способами: за правилом Крамера, матричним методом і методом Гаусса; порівняти обсяг обчислень.