ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Комплексні числа. Матриці та детермінанти (визначники)
Спеціальність: 122 «Комп'ютерні науки»
Повні покрокові розв'язання для проведення онлайн-заняття

1. Комплексні числа

Завдання 1. Виконати дії над комплексними числами. Дано: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + 4i$.

1) Сума:

$$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (1 + 4i) = 4 + 2i.$$

Відповідь: $z_1 + z_2 = 4 + 2i$.

2) Добуток:

$$z_1 z_2 = (3 - 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i - 2i - 8i^2 = 11 + 10i,$$

оскільки $i^2 = -1$. **Відповідь:** $z_1 z_2 = 11 + 10i$.

3) Частка: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 - 2i}{1 + 4i}$. Домножимо чисельник і знаменник на $1 - 4i$:

$$\frac{3 - 2i}{1 + 4i} = \frac{(3 - 2i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{-5 - 14i}{17} = -\frac{5}{17} - \frac{14}{17}i.$$

Відповідь: $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{5}{17} - \dfrac{14}{17}i$.

Завдання 2. Модуль, аргумент і форми комплексного числа.

$$z = -1 + \sqrt{3}\,i.$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Точка $(-1; \sqrt{3})$ лежить у II чверті. Тому $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, звідси $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Тригонометрична форма:

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Показникова форма:

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Відповідь: $|z| = 2$, $\operatorname{Arg} z = \dfrac{2\pi}{3}$.

Завдання 3. Формула Муавра. Обчислити $(1+\sqrt{3}\,i)^6$. Для $z = 1+\sqrt{3}\,i$ маємо $|z| = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, тому

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

За формулою Муавра:

$$\begin{aligned} z^6 &= 2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) \\ &= 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64. \end{aligned}$$

Відповідь: $(1+\sqrt{3}\,i)^6 = 64$.

Завдання 4. Знайти всі корені рівняння $z^4 = 16$.

$$16 = 16(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k).$$

Для четвертого кореня модуль дорівнює 2, а

$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{4} = \frac{\pi k}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_k = 2\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right).$$

Отже, $z_0 = 2$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -2i$.

Відповідь: $\{2, 2i, -2, -2i\}$.

2. Матриці та дії над ними

Завдання 5. Для матриць A і B знайти $A+B$, $2A-B$, AB та BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Сума $A+B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 \\ -1+1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Різниця $2A-B$:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Добуток AB. Кожний елемент отримуємо як добуток відповідного рядка A на відповідний стовпець B:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4; & c_{12} &= 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) = -2; \\ c_{21} &= (-1)\cdot 2 + 3\cdot 1 = 1; & c_{22} &= (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -3. \end{aligned}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Добуток BA:

$$d_{11} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 2; \qquad d_{12} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 4;$$
$$d_{21} = 1 \cdot 1 + (-1)(-1) = 2; \quad d_{22} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -1.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Висновок: $AB \neq BA$. Множення матриць у загальному випадку некомутативне.

Завдання 6. Транспонування матриці. Дано матрицю A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Під час транспонування рядки стають стовпцями:

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A має розмір 2×3, а A^{T} — 3×2.

3. Детермінанти (визначники)

Завдання 7. Обчислити детермінант третього порядку за правилом Саррюса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

За правилом Саррюса:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 4 \\ &\quad - 3 \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 0 + 4 + 12 - 0 - 16 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $\Delta = 1$.

Завдання 8. Обчислити той самий детермінант розкладом за елементами другого рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Другий рядок має елементи $1, 0, 2$. Знаки алгебраїчних доповнень у другому рядку: $-, +, -$.

$$\Delta = -1 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{22} - 2 \cdot M_{23}.$$

Перший мінор:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -13.$$

Третій мінор:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1)(-2) = 8 - 2 = 6.$$

Тому

$$\Delta = -1 \cdot (-13) - 2 \cdot 6 = 13 - 12 = 1.$$

Відповідь: $\Delta = 1$.

Домашнє завдання

Повторити властивості детермінантів. Обчислити $\det A$ для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$