ЛЕКЦІЯ № 2
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Векторна алгебра. Аналітична геометрія на площині. Аналітична геометрія у просторі

1 курс • Комп’ютерні науки

Мета лекції

Опанувати основні поняття другого змістового модуля: вектори та дії над ними; скалярний, векторний і мішаний добутки; розклад вектора за базисом і поділ відрізка у заданому відношенні; основні рівняння прямої на площині; канонічні рівняння ліній другого порядку; рівняння площини і прямої у просторі, їх взаємне розміщення; основні поверхні другого порядку та метод паралельних перерізів.

План

1. Вектори та дії над ними. Координати вектора.
2. Скалярний добуток. Кут між векторами.
3. Векторний та мішаний добутки.
4. Розклад вектора за базисом. Поділ відрізка у заданому відношенні.
5. Пряма на площині: основні види рівнянь.
6. Взаємне розміщення прямих. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.
7. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.
8. Площина у просторі та її рівняння.
9. Пряма у просторі. Взаємне розміщення прямих і площин.
10. Поверхні другого порядку. Метод паралельних перерізів. Поверхні обертання.

1. Вектори та координати

Вектором називають напрямлений відрізок. Вектор характеризується довжиною (модулем) і напрямом. Якщо $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

Для вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ модуль дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Нульовий вектор має нульову довжину. Одиничний вектор має довжину 1. Два ненульові вектори колінеарні, якщо один є числовим кратним іншого.

Лінійні дії

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

Приклад 1

Нехай $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(1,4,-2)$. Тоді

$$\vec{a}+\vec{b}=(3,3,1),\quad 2\vec{a}-\vec{b}=(3,-6,8).$$

2. Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi,$$

де φ - кут між векторами. У координатах:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Звідси

$$\cos\varphi = (\vec{a}\cdot\vec{b})/(|\vec{a}||\vec{b}|).$$

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді й лише тоді, коли $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Приклад 2

Для $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=(2,1,-2)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2+2-4=0.$$

Отже, вектори перпендикулярні.

3. Векторний добуток

Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ у тривимірному просторі називається вектор, перпендикулярний до $\vec{a}$ і $\vec{b}$, модуль якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi.$$

У координатах:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

Якщо $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ для ненульових векторів, то вони колінеарні.

Приклад 3

Для $\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(0,2,0)$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,2),$$

а площа паралелограма дорівнює 2.

4. Мішаний добуток

Мішаним добутком трьох векторів називають

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Його абсолютне значення дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах. У координатах мішаний добуток дорівнює визначнику:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det\,[[a_1,a_2,a_3],[b_1,b_2,b_3],[c_1,c_2,c_3]].$$

Три вектори компланарні тоді й лише тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад 4

Нехай $\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(0,1,0)$, $\vec{c}=(0,0,3)$. Тоді

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=3.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда дорівнює 3.

5. Базис. Розклад вектора

Три некомпланарні вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ утворюють базис у тривимірному просторі. Кожний вектор $\vec{a}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3.$$

У стандартному ортонормованому базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай точка M ділить відрізок AB внутрішнім чином у відношенні AM:MB=m:n. Тоді

$$M((n\ x_A + m\ x_B)/(m+n),\ (n\ y_A + m\ y_B)/(m+n))$$

на площині; у просторі аналогічно додається координата z.

Зокрема, координати середини відрізка:

$$M((x_A+x_B)/2,\ (y_A+y_B)/2,\ (z_A+z_B)/2).$$

6. Пряма на площині

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$. Різні геометричні дані приводять до різних, але еквівалентних форм її рівняння.

Загальне рівняння

$$Ax + By + C = 0,\quad A^2+B^2 \neq 0.$$

Вектор $\vec{n}=(A,B)$ є нормальним вектором прямої.

Рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b,$$

де $k=\tan\alpha$ - кутовий коефіцієнт.

Через точку з заданим напрямом

$$y-y_0 = k(x-x_0).$$

Через дві точки

$$(x-x_1)/(x_2-x_1) = (y-y_1)/(y_2-y_1),$$

якщо відповідні знаменники ненульові.

У відрізках на осях

$$x/a + y/b = 1.$$

Нормальне рівняння

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

де $p\geq 0$ - відстань від початку координат до прямої.

Приклад 5

Знайти рівняння прямої через A(1,2), B(3,6).

$$k=(6-2)/(3-1)=2,$$

$$y-2=2(x-1),$$

$$y=2x.$$

7. Взаємне розміщення двох прямих

Для прямих $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$:

• якщо $k_1\neq k_2$, прямі перетинаються; • якщо $k_1=k_2$ і $b_1\neq b_2$, вони паралельні; • якщо $k_1=k_2$ і $b_1=b_2$, вони збігаються.

Кут φ між прямими:

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

якщо $1+k_1k_2\neq 0$. Умова перпендикулярності:

$$k_1k_2=-1.$$

Відстань від точки до прямої

Для точки $M_0(x_0,y_0)$ та прямої $Ax+By+C=0$:

$$d = |Ax_0+By_0+C| \,/\, \sqrt{A^2+B^2}.$$

Приклад 6

Відстань від $M(2,1)$ до прямої $3x-4y+5=0$:

$$d=|6-4+5|/5=7/5.$$

8. Лінії другого порядку

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

До основних невироджених ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола та парабола.

Коло

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Центр $C(a,b)$, радіус R.

Еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a>b>0.$$

Фокуси $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, де

$$c^2=a^2-b^2, \quad e=c/a<1.$$

Сума відстаней від будь-якої точки еліпса до фокусів дорівнює $2a$.

Гіпербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для неї

$$c^2=a^2+b^2, \quad e=c/a>1.$$

Асимптоти:

$$y=\pm(b/a)x.$$

Парабола

$$y^2=2px$$

у прийнятій тут канонічній формі; її фокус $F(p/2,0)$, директриса $x=-p/2$.

Еквівалентно часто використовують форму $y^2=4ax$, де фокус $F(a,0)$.

Приклад 7

Для еліпса

$$x^2/25 + y^2/9 = 1$$

маємо $a=5$, $b=3$, $c=4$. Отже, фокуси $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, ексцентриситет $e=4/5$.

9. Площина у просторі

Загальне рівняння площини:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

де $\vec{n}=(A,B,C)$ - нормальний вектор площини.

Площина через точку

Якщо площина проходить через $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і має нормаль $\vec{n}=(A,B,C)$, то

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Площина через три точки

Три неколінеарні точки однозначно визначають площину. Якщо A,B,C - ці точки, то нормаль можна знайти як

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

У відрізках на осях

$$x/a + y/b + z/c = 1.$$

Відстань від точки до площини

Для $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$d = |Ax_0+By_0+Cz_0+D| \,/\, \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.$$

Взаємне розміщення площин

Площини паралельні, якщо їх нормальні вектори колінеарні. Вони перпендикулярні, якщо

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0.$$

Кут між площинами дорівнює гострому куту між їх нормалями.

10. Пряма у просторі

Пряма у просторі визначається точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(l,m,n)$.

Векторне і параметричні рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s},$$

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt.$$

Канонічні рівняння

$$(x-x_0)/l = (y-y_0)/m = (z-z_0)/n,$$

для ненульових відповідних компонент напрямного вектора.

Пряма як перетин двох площин

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Приклад 8

Пряма через $M_0(1,-1,2)$ з напрямним вектором $\vec{s}=(2,1,-3)$:

$$x=1+2t,\quad y=-1+t,\quad z=2-3t,$$

або

$$(x-1)/2 = (y+1)/1 = (z-2)/(-3).$$

11. Взаємне розміщення у просторі

Дві прямі

Дві прямі можуть збігатися, бути паралельними, перетинатися або бути мимобіжними. Для паралельності їх напрямні вектори мають бути колінеарними. Для перетину, крім неколінеарності, система параметричних рівнянь повинна мати спільну точку.

Пряма і площина

Нехай $\vec{s}$ - напрямний вектор прямої, $\vec{n}$ - нормаль площини.

Якщо $\vec{s}\cdot\vec{n}\neq 0$, пряма перетинає площину в одній точці. Якщо $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$, пряма паралельна площині або лежить у ній.

Пряма перпендикулярна площині, якщо $\vec{s}$ і $\vec{n}$ колінеарні.

Кут між прямою і площиною

Якщо α - гострий кут між прямою та площиною, то

$$\sin\alpha = |\vec{s}\cdot\vec{n}|/(|\vec{s}||\vec{n}|).$$

Приклад 9

Для прямої з $\vec{s}=(1,1,1)$ і площини $x+y+z-3=0$ маємо $\vec{n}=(1,1,1)$. Напрямний вектор прямої колінеарний нормалі площини, тому пряма перпендикулярна площині.

12. Поверхні другого порядку

Загальне рівняння поверхні другого порядку у просторі містить квадрати координат і, у загальному випадку, їх попарні добутки. У канонічних координатах основні поверхні мають прості рівняння.

Еліпсоїд

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Перерізи координатними площинами - еліпси.

Однопорожнинний гіперболоїд

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1.$$

Двопорожнинний гіперболоїд

$$-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Еліптичний параболоїд

$$z = x^2/a^2 + y^2/b^2.$$

Перерізи $z=h>0$ є еліпсами, а вертикальні координатні перерізи - параболами.

Гіперболічний параболоїд

$$z = x^2/a^2 - y^2/b^2.$$

Цю поверхню часто називають сідловою.

Конус другого порядку

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0.$$

Циліндричні поверхні

Якщо у рівнянні поверхні відсутня одна координата, поверхня може бути циліндричною. Наприклад

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

задає еліптичний циліндр з твірними, паралельними осі Oz.

13. Метод паралельних перерізів

Для дослідження форми поверхні її перетинають сімейством паралельних площин, наприклад $z=h$. Після підстановки $z=h$ отримують рівняння плоскої лінії, форма і розміри якої залежать від h.

Приклад 10

Для еліпсоїда

$$x^2/9 + y^2/4 + z^2 = 1$$

переріз площиною $z=h$ має рівняння

$$x^2/9 + y^2/4 = 1-h^2.$$

Переріз існує при $|h|\le 1$. При $|h|<1$ це еліпс, при $h=\pm 1$ - одна точка.

14. Поверхні обертання

Поверхня обертання утворюється при обертанні плоскої кривої навколо заданої осі. Наприклад, обертання кола навколо його діаметра утворює сферу:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Обертання параболи навколо її осі дає параболоїд обертання; обертання еліпса - еліпсоїд обертання; обертання відповідних гілок гіперболи приводить до гіперболоїдів обертання.

15. Узагальнювальний приклад

Нехай задано точки A(1,0,1), B(2,1,0), C(0,1,2). Знайдемо площину через ці точки.

Напрямні вектори:

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,-1), \quad \overrightarrow{AC}=(-1,1,1).$$

Нормаль площини:

$$n⃗=AB⃗×AC⃗=(2,0,2).$$

Можна взяти $n⃗=(1,0,1)$. Рівняння площини через A:

$$(x-1)+(z-1)=0,$$

$$x+z-2=0.$$

Цей приклад демонструє зв'язок векторної алгебри з аналітичною геометрією у просторі.

Підсумок

Другий змістовий модуль об'єднує векторну алгебру та аналітичну геометрію на площині й у просторі. Скалярний добуток використовується для обчислення кутів і перевірки перпендикулярності; векторний - для побудови нормалей і знаходження площ; мішаний - для об'ємів та перевірки компланарності. На площині центральними об'єктами є пряма та лінії другого порядку. У просторі - площина, пряма і поверхні другого порядку. Векторний апарат дозволяє компактно описувати їх взаємне розміщення.

Контрольні питання

1. Що називається вектором? Як знайти його координати і модуль?

2. Дайте означення скалярного добутку та запишіть його координатну формулу.

3. Як знайти кут між двома векторами?

4. Дайте означення векторного добутку. Який його геометричний зміст?

5. Що таке мішаний добуток? Коли три вектори компланарні?

6. Що називається базисом? Як розкладається вектор за базисом?

7. Назвіть основні види рівнянь прямої на площині.

8. Які умови паралельності та перпендикулярності двох прямих?

9. Як знайти відстань від точки до прямої?

10. Запишіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи.

11. Запишіть загальне рівняння площини та поясніть геометричний зміст його коефіцієнтів.

12. Назвіть основні форми рівняння прямої у просторі.

13. Які можливі взаємні розміщення двох прямих у просторі?

14. Як визначити взаємне розміщення прямої та площини?

15. Назвіть основні поверхні другого порядку.

16. У чому полягає метод паралельних перерізів?

Завдання для самоперевірки

1. Для $a⃗=(2,-1,3)$, $b⃗=(1,2,0)$ знайти $a⃗+b⃗$, $a⃗·b⃗$ та кут між векторами.

2. Знайти $a⃗×b⃗$ для $a⃗=(1,2,0)$, $b⃗=(0,1,3)$.

3. Перевірити компланарність трьох заданих векторів за мішаним добутком.

4. Знайти точку, яка ділить відрізок A(1,2), B(7,5) у відношенні 2:1.

5. Скласти рівняння прямої через точки A(1,-1), B(3,5).

6. Знайти кут між прямими y=2x+1 та y=-x+3.

7. Знайти відстань від точки M(2,-1) до прямої 3x+4y-5=0.

8. Для еліпса $x^2/16+y^2/7=1$ знайти півосі, фокуси та ексцентриситет.

9. Скласти рівняння площини через точку M(1,2,-1) з нормаллю $n⃗=(2,-1,3)$.

10. Записати параметричні та канонічні рівняння прямої через M(1,0,2) з напрямом (2,-1,1).

11. Дослідити взаємне розміщення заданої прямої та площини.

12. Дослідити еліпсоїд методом перерізів площинами z=h.

Орієнтовний розподіл часу на 90 хв

Частина лекції	**Час**
Вектори. Скалярний, векторний і мішаний добутки	22 хв
Пряма на площині	13 хв
Лінії другого порядку	15 хв
Площина і пряма у просторі	22 хв
Поверхні другого порядку	13 хв
Підсумок і контрольні питання	5 хв