ЛЕКЦІЯ № 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Комплексні числа. Матриці та визначники. Обернена матриця. Ранг матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1 курс • Комп’ютерні науки

Мета лекції

Опанувати основні поняття першого змістового модуля: комплексні числа та форми їх подання; матриці, визначники, мінори й алгебраїчні доповнення; обернену матрицю і ранг; системи лінійних алгебраїчних рівнянь та основні методи їх розв’язування.

План

1. Комплексні числа: алгебраїчна, геометрична, тригонометрична та показникова форми.

2. Дії над комплексними числами. Формула Муавра.

3. Матриці та дії над ними.

4. Визначники. Мінори та алгебраїчні доповнення.

5. Обернена матриця.

6. Ранг матриці.

7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

8. Правило Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса.

9. Однорідні та неоднорідні системи. Матричні рівняння.

1. Комплексні числа

Комплексним числом називається число вигляду

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

Число a називається дійсною частиною, b — коефіцієнтом при уявній частині:

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b$$

Два комплексні числа рівні тоді й лише тоді, коли рівні їх відповідні дійсні та уявні частини.

Спряжене число і модуль

Для z = a + bi спряженим є $\bar{z}$ = a − bi. Маємо

$$z\overline{z} = a^2 + b^2, \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Дії в алгебраїчній формі

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

При діленні чисельник і знаменник домножують на число, спряжене до знаменника.

Приклад 1

Множення і ділення комплексних чисел:

$$(2+3i)(1-2i)=2-4i+3i-6i^2=8-i$$
$$\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{2}=\frac{1+5i}{2}$$

2. Геометрична, тригонометрична та показникова форми

Числу z = a + bi відповідає точка M(a, b) комплексної площини. Якщо r = |z|, а φ = arg z, то

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi$$

Звідси тригонометрична форма:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

За формулою Ейлера одержуємо показникову форму:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\qquad z=re^{i\varphi}$$

Множення і ділення

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

Формула Муавра

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

Приклад 2

Для 1 + i маємо:

$$r=\sqrt{2},\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$
$$(1+i)^8=(\sqrt{2})^8[\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)]=16$$

3. Матриці

Матрицею розміру m × n називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Розрізняють прямокутні, квадратні, нульові, діагональні, одиничні матриці, матриці-рядки та матриці-стовпці.

Додавання і множення на число

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Множення матриць

Якщо A має розмір m × n, а B — n × p, то C = AB має розмір m × p, причому

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Приклад 3

Знайдемо добуток матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

У загальному випадку AB ≠ BA.

Транспонування

Транспонована матриця утворюється заміною рядків стовпцями:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

4. Визначники

Для квадратної матриці визначається число det A, яке називають визначником або детермінантом.

Визначник другого порядку

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Визначник третього порядку. Правило Саррюса

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Приклад 4

Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 16 - 6 = 11$$

Основні властивості

1. $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

2. При перестановці двох рядків визначник змінює знак.

3. Якщо два рядки пропорційні, визначник дорівнює нулю.

4. Спільний множник рядка можна винести за знак визначника.

5. Додавання до рядка іншого рядка, помноженого на число, не змінює визначника.

6. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.

7. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Мінори та алгебраїчні доповнення

Мінор M_{ij} елемента a_{ij} — визначник, отриманий викресленням i-го рядка і j-го стовпця. Алгебраїчне доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Розклад визначника за i-м рядком:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

5. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Обернена матриця існує тоді й лише тоді, коли $\det A \neq 0$. Формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}$$

Тут A^{*} — транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Приклад 5

Для матриці A маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Безпосередня перевірка дає $AA^{-1} = E$.

Метод елементарних перетворень

Обернену матрицю можна знайти перетворенням розширеної матриці:

$$[A \mid E] \longrightarrow [E \mid A^{-1}]$$

6. Ранг матриці

Рангом матриці називається найбільший порядок її ненульового мінора. На практиці ранг часто знаходять елементарними перетвореннями: після зведення матриці до східчастого вигляду ранг дорівнює кількості ненульових рядків.

Приклад 6

Розглянемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Після $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ та $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Отже, r(A) = 2.

7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має матричний запис

$$AX = B$$

Тут A — матриця коефіцієнтів, X — стовпець невідомих, B — стовпець вільних членів. Розширена матриця системи позначається [A | B].

Еквівалентні перетворення

Систему можна перетворювати: переставляти рівняння; множити рівняння на ненульове число; додавати до одного рівняння інше, помножене на число. Такі перетворення не змінюють множину розв’язків.

8. Правило Крамера

Для квадратної системи n рівнянь з n невідомими, якщо Δ = det A ≠ 0, існує єдиний розв’язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

У Δ_j j-й стовпець матриці коефіцієнтів замінюється стовпцем вільних членів.

Приклад 7

Розв’язати систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = -3, \quad \Delta_x = -6, \quad \Delta_y = -3$$

$$x = 2, \qquad y = 1$$

9. Матричний метод

Якщо det A ≠ 0, то з AX = B отримуємо

$$X = A^{-1}B$$

Приклад 8

Для системи

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тобто x = 3, y = 2.

10. Метод Гаусса

Метод Гаусса полягає у приведенні розширеної матриці системи до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Після прямого ходу виконується зворотний хід.

Приклад 9

Розв’язати систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Розширена матриця:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Виконуємо $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Переставимо R_2 і R_3, потім $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Звідси $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$.

11. Сумісність. Однорідні та неоднорідні системи

Система є сумісною, якщо має хоча б один розв’язок. Сумісна система може мати один або нескінченно багато розв’язків.

Теорема Кронекера — Капеллі

Система $AX = B$ сумісна тоді й лише тоді, коли

$$r(A) = r([A \mid B])$$

Якщо спільний ранг дорівнює числу невідомих n, розв’язок єдиний. Якщо спільний ранг менший за n, розв’язків нескінченно багато.

Однорідна система

Однорідна система має вигляд $AX = 0$ і завжди має тривіальний розв’язок $X = 0$. Нетривіальні розв’язки існують, якщо

$$r(A) < n$$

Для квадратної системи це еквівалентно умові $\det A = 0$.

12. Матричні рівняння

Для матричного рівняння AX = B при існуванні A^{-1} маємо

$$X = A^{-1}B$$

Для рівняння XA = B:

$$X = BA^{-1}$$

Порядок множників змінювати не можна, оскільки множення матриць у загальному випадку некомутативне.

13. Узагальнювальний приклад

Розглянемо систему

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

Її можна записати у вигляді AX = B, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Обчислення визначника показує $\det A \neq 0$, отже система має єдиний розв’язок. Її можна розв’язувати трьома розглянутими способами: за правилом Крамера, матричним методом або методом Гаусса. Для практичних обчислень при збільшенні розміру системи найзручнішим зазвичай є метод Гаусса.

Підсумок

Перший змістовий модуль охоплює три великі блоки: комплексні числа; матриці та визначники; системи лінійних рівнянь. Комплексні числа подаються в алгебраїчній, геометричній, тригонометричній і показниковій формах. Матриці є основним апаратом запису лінійних перетворень і систем рівнянь; визначник дозволяє встановлювати невиродженість квадратної матриці. Обернена матриця існує при $\det A \neq 0$. Ранг матриці відіграє ключову роль у дослідженні сумісності систем. Основні методи розв’язування СЛАР — правило Крамера, матричний метод і метод Гаусса.

Контрольні питання

Що називається комплексним числом? Які форми його подання Ви знаєте?

Сформулюйте формулу Муавра.

Що називається матрицею? Які основні дії виконують над матрицями?

Коли визначений добуток двох матриць?

Як обчислюється визначник другого і третього порядків?

Що таке мінор та алгебраїчне доповнення?

За якої умови існує обернена матриця?

Що називається рангом матриці?

Як записати СЛАР у матричній формі?

Сформулюйте правило Крамера.

У чому полягає матричний метод?

Опишіть прямий і зворотний ходи методу Гаусса.

Сформулюйте теорему Кронекера — Капеллі.

Коли однорідна система має нетривіальні розв’язки?

Як розв’язуються матричні рівняння $AX = B$ та $XA = B$?

Завдання для самоперевірки

Виконати дії з числами $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$.

Записати $z = -1 + \sqrt{3}i$ у тригонометричній і показниковій формах.

Обчислити $(1 - i)^6$ за формулою Муавра.

Для заданих матриць 2×2 знайти $A + B$, AB та BA.

Обчислити визначник 3×3 за правилом Саррюса.

Знайти обернену матрицю до матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв’язати систему 2×2 за правилом Крамера.

Розв’язати систему 3×3 методом Гаусса.

Дослідити систему на сумісність за рангами матриць.