ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

Дії над векторами. Скалярний добуток

Вища математика · I курс · економічні спеціальності. Розв’язання всіх 16 завдань із поясненням кожного етапу.

Основні формули, які використовуватимемо

Для векторів у просторі довільної розмірності координатні дії виконуються покомпонентно. Скалярний добуток — сума добутків відповідних координат. Нульовий скалярний добуток двох ненульових векторів означає їх перпендикулярність.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A), \qquad |a| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad \cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

Завдання 1. Координати й довжина вектора

Дано A(2; −1), B(5; 3). Від координат кінця віднімаємо координати початку:

$$\vec{AB} = (5 - 2;\ 3 - (-1)) = (3; 4).$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Відповідь: (3; 4), довжина 5.

Завдання 2. Лінійні операції у площині

Нехай a=(2; −3), b=(−1; 4). Додаємо, віднімаємо та множимо вектори покомпонентно.

$$a + b = (2 - 1;\ -3 + 4) = (1; 1).$$

$$a - b = (2 - (-1);\ -3 - 4) = (3;\ -7).$$

$$2a = (4;\ -6), \qquad -3b = (3;\ -12).$$

$$2a - 3b = (4;\ -6) - (-3; 12) = (7;\ -18).$$

Останній результат також можна перевірити як 2a + (−3b) = (4; −6) + (3; −12).

Завдання 3. Операції у тривимірному просторі

Нехай a=(1; 2; −1), b=(3; −1; 2). У просторі $\mathbb{R}^3$ правило таке саме, як на площині, але координат три.

$$a+b=(1+3;\ 2-1;\ -1+2)=(4;1;1).$$

$$a-b=(1-3;\ 2-(-1);\ -1-2)=(-2;3;\ -3).$$

$$3a+2b=(3;6;\ -3)+(6;\ -2;4)=(9;4;1).$$

$$|a|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}.$$

$$|b|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

Завдання 4. Рівність векторів

Вектори рівні тоді й лише тоді, коли рівні всі їхні відповідні координати. Тому рівність (2x−1; y+3)=(5; 7) рівносильна системі:

$$2x-1=5\ \Rightarrow\ 2x=6\ \Rightarrow\ x=3;$$

$$y+3=7\ \Rightarrow\ y=4.$$

Відповідь: x=3, y=4.

Завдання 5. Правило трикутника

Дано A(1; 2), B(4; 6), C(−2; 3). Обчислюємо кожен вектор:

$$\vec{AB}=(4-1;\ 6-2)=(3;4).$$

$$\vec{AC}=(-2-1;\ 3-2)=(-3;1).$$

$$\vec{BC}=(-2-4;\ 3-6)=(-6;\ -3).$$

$$\vec{AB}+\vec{BC}=(3;4)+(-6;\ -3)=(-3;1)=\vec{AC}.$$

Отже, правило трикутника перевірено чисельно.

Завдання 6. Скалярний добуток у $\mathbb{R}^3$

Дано a=(2; −1; 3), b=(1; 4; −2). Множимо однойменні координати та додаємо:

$$a\cdot b=2\cdot 1+(-1)\cdot 4+3\cdot(-2)=2-4-6=-8.$$

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

$$|b| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

Від’ємний скалярний добуток означає, що кут між ненульовими векторами тупий.

Завдання 7. Кут між векторами

Для a=(1; 1), b=(1; 0) спочатку знайдемо добуток і довжини:

$$a \cdot b = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1, \quad |a| = \sqrt{2}, \quad |b| = 1.$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ.$$

Завдання 8. Перевірка перпендикулярності

Дано a=(2; −3; 1), b=(1; 1; 1).

$$a \cdot b = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Обидва вектори ненульові, тому вони перпендикулярні; кут між ними 90°. Додатково обчислювати косинус не потрібно (він дорівнює нулю).

Завдання 9. Параметр для перпендикулярності

Дано a=(m; 2; −1), b=(3; −1; 4). Вимагаємо a·b=0:

$$3m + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 0,$$

$$3m - 2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; 3m = 6 \;\Rightarrow\; m = 2.$$

Завдання 10. Колінеарність і напрямленість

Два ненульові вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли один є числовим кратним іншого: a=kb. За k>0 вони однаково напрямлені, за k<0 — протилежно.

Перша пара: a=(2; −4), b=(−1; 2). Порівняємо координати:

$$2 = (-2)(-1), \qquad -4 = (-2) \cdot 2.$$

Отже, a=−2b: вектори колінеарні, протилежно напрямлені, коефіцієнт пропорційності −2 (у рівності a=kb).

Друга пара: c=(3; 6), d=(2; 5). Перевіримо визначник:

$$3 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3 \neq 0.$$

Отже, c і d неколінеарні.

Завдання 11. Кут BAC трикутника

Дано A(1; 1), B(5; 2), C(3; 6). Кут BAC — це кут між векторами AB і AC, які виходять із точки A.

$$\vec{AB} = (5 - 1;\ 2 - 1) = (4; 1).$$

$$\vec{AC} = (3 - 1;\ 6 - 1) = (2; 5).$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 13.$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{17}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{29}.$$

$$\cos \angle BAC = \frac{13}{\sqrt{17}\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{493}}.$$

$$\angle BAC = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{493}}\right) \approx 54.2^\circ.$$

Завдання 12. Вектори у чотиривимірному просторі

Дано a=(1; −2; 3; 1), b=(2; 1; −1; 3). Розмірність простору не змінює правил обчислення.

$$2a = (2;\ -4; 6; 2), \qquad 3b = (6; 3;\ -3; 9).$$

$$2a - 3b = (-4;\ -7; 9;\ -7).$$

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0.$$

$$|a| = \sqrt{1 + 4 + 9 + 1} = \sqrt{15}.$$

$$|b| = \sqrt{4 + 1 + 1 + 9} = \sqrt{15}.$$

$$\cos \varphi = \frac{0}{\sqrt{15}\sqrt{15}} = 0, \qquad \varphi = 90^\circ.$$

Завдання 13. Параметр у просторі $\mathbb{R}^5$

Дано a=(1; 2; −1; 3; 2), b=(2; −1; 4; 1; −2), c=(m; 1; 2; −1; 3). Шукаємо m, щоб c був перпендикулярним до a+b.

$$a+b=(3;1;3;4;0).$$

$$c\cdot(a+b)=3m+1\cdot1+2\cdot3+(-1)\cdot4+3\cdot0.$$

$$3m+1+6-4=0\ \Rightarrow\ 3m+3=0\ \Rightarrow\ m=-1.$$

Завдання 14. Чи є вектор лінійною комбінацією?

Дано a=(1; 2; −1; 3), b=(2; −1; 1; 2), c=(5; 3; −1; 8). Припустимо, що c=αa+βb. Прирівняємо всі чотири координати:

$$\alpha+2\beta=5,\quad 2\alpha-\beta=3,$$

$$-\alpha+\beta=-1,\quad 3\alpha+2\beta=8.$$

Із третього рівняння β=α−1. Підставляємо у перше: α+2(α−1)=5, звідки 3α=7, α=7/3 і β=4/3.

$$2\alpha-\beta=\frac{14}{3}-\frac{4}{3}=\frac{10}{3}\neq3.$$

Уже друге рівняння суперечить знайденим значенням. Тому система несумісна: подати c у вигляді αa+βb неможливо.

Завдання 15. Ортогональність лінійної комбінації

Дано a=(1; 2; −1; 2), b=(2; −1; 3; 1). Відомо x=2a+λb та x·a=0. Використаємо лінійність скалярного добутку:

$$0=x\cdot a=(2a+\lambda b)\cdot a=2(a\cdot a)+\lambda(b\cdot a).$$

$$a\cdot a=1+4+1+4=10.$$

$$b\cdot a=2-2-3+2=-1.$$

$$0=2\cdot10+\lambda(-1)=20-\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=20.$$

$$x=2(1;2;-1;2)+20(2;-1;3;1).$$

$$x=(2;4;-2;4)+(40;-20;60;20)=(42;-16;58;24).$$

Перевірка: x·a=42−32−58+48=0. Умова виконана.

Завдання 16. Параметр і прямий кут у $\mathbb{R}^5$

Дано a=(1; −1; 2; 0; 3), b=(2; 1; −1; 2; 1), c=(m; 2; 1; −1; m). Кут 90° означає перпендикулярність, тобто c·(a+b)=0.

$$a+b=(3;0;1;2;4).$$

$$c\cdot(a+b)=3m+2\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 2+4m.$$

$$7m+1-2=0\ \Rightarrow\ 7m=1\ \Rightarrow\ m=\tfrac{1}{7}.$$

Відповідь: єдине значення m=1/7. Вектор a+b ненульовий, тому кут коректно визначений.

Матеріал підготовлено для покрокової демонстрації розв’язань під час онлайн-заняття.