ВИЩА МАТЕМАТИКА

Лекція. Вектори та прямі на площині

Для студентів першого курсу економічних спеціальностей.

1. Вектори на площині та у просторі

Означення. Вектор — напрямлений відрізок, який характеризується довжиною та напрямом. Вектор від точки A до точки B позначають AB. Вільний вектор можна переносити паралельно самому собі.

На площині вектор задають парою координат a = (a₁; a₂). Якщо A(x₁; y₁), B(x₂; y₂), то AB = (x₂ − x₁; y₂ − y₁). Його довжина:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Приклад 1. A(−2; 3), B(4; −5). Тоді AB = (6; −8), а

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

У тривимірному просторі a = (a₁; a₂; a₃). Якщо A(x₁; y₁; z₁), B(x₂; y₂; z₂), то AB = (x₂ − x₁; y₂ − y₁; z₂ − z₁). Довжина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Приклад 2. A(1; −2; 3), B(5; 1; −9). Тоді AB = (4; 3; −12),

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2} = 13.$$

Означення. Два вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Нульовий вектор вважають колінеарним кожному вектору.

Критерій колінеарності. Два вектори a і b колінеарні тоді й лише тоді, коли існує число λ, для якого a = λb, якщо b ≠ 0. Для ненульових векторів це означає пропорційність відповідних координат.

Для векторів площини a = (a₁; a₂), b = (b₁; b₂) маємо критерій:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Для векторів простору a = (a₁; a₂; a₃), b = (b₁; b₂; b₃) критерій можна записати без ділення на координати:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0, \quad a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0.$$

Приклад 3. a = (2; −4; 6), b = (−1; 2; −3). Маємо a = −2b, отже, вектори колінеарні. Вектори (1; 2; 3) і (2; 4; 7) не колінеарні, бо 1·7 − 3·2 = 1 ≠ 0.

2. Дії над векторами

Суму, різницю та добуток вектора на число знаходять покоординатно. Для двовимірних векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2), \quad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1;\ \lambda a_2).$$

Для тривимірних векторів ті самі дії виконують також із третьою координатою: a + b = (a₁ + b₁; a₂ + b₂; a₃ + b₃). Віднімання — це додавання протилежного вектора.

Геометрично суму будують за правилом трикутника або паралелограма. При множенні на від’ємне число напрям змінюється на протилежний.

Приклад 4. a = (2; −3), b = (−1; 4). Обчислити 2a − 3b: 2a = (4; −6), 3b = (−3; 12), тому 2a − 3b = (7; −18).

Приклад 5 (простір). a = (1; −2; 3), b = (4; 0; −1). Тоді a + 2b = (9; −2; 1).

Економічний зміст. Вектор (q₁; q₂; q₃) може описувати обсяги випуску трьох товарів. Додавання векторів означає об’єднання виробничих планів, множення на додатне число — масштабування.

3. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають число, яке дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними. У координатах:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi, \quad n = 2, 3.$$

Для ненульових векторів кут обчислюють за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Для векторів площини в чисельнику й під коренями відсутні доданки з третьою координатою. Ненульові вектори перпендикулярні тоді й лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Приклад 6. a = (1; 2), b = (2; −1). a·b = 1·2 + 2·(−1) = 0, тому кут між ними 90°.

Приклад 7 (простір). a = (1; 0; 1), b = (0; 1; 1). a·b = 1, |a| = |b| = √2, тому cos φ = 1/2, φ = 60°.

Приклад 8 (економіка). p = (120; 80; 50) — ціни трьох товарів, q = (15; 20; 10) — продані кількості. Виручка R = p·q = 1800 + 1600 + 500 = 3900 грн.

4. Рівняння прямої на площині

Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$, де $A^2 + B^2 \neq 0$. Вектор $n = (A; B)$ — нормальний до прямої, $s = (-B; A)$ — напрямний.

Пряма через $M_0(x_0; y_0)$ з нормальним вектором $(A; B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Параметричне рівняння прямої через M_0 з напрямним вектором $(u; v)$: $x = x_0 + ut$, $y = y_0 + vt$, $t \in \mathbb{R}$.

Пряма через дві різні точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Якщо $B \neq 0$, то $y = kx + b$, де $k = -A/B$, $b = -C/B$. Вертикальна пряма $x = c$ не має скінченного кутового коефіцієнта.

Приклад 9. Через $A(1; 2)$, $B(5; 4)$: $2(x - 1) - 4(y - 2) = 0$, тобто $x - 2y + 3 = 0$.

5. Взаємне розташування двох прямих

Нехай $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Розглянемо визначник $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1$.

Якщо $\Delta \neq 0$, прямі перетинаються в одній точці. Якщо $\Delta = 0$, вони паралельні або збігаються. Збіг має місце тоді й лише тоді, коли трійки $(A_1; B_1; C_1)$ і $(A_2; B_2; C_2)$ пропорційні.

Приклад 10. $l_1: 2x - y + 1 = 0$, $l_2: 4x - 2y - 3 = 0$. Маємо $\Delta = 0$, але після множення першого рівняння на 2 отримаємо $4x - 2y + 2 = 0$. Отже, прямі паралельні й різні.

Приклад 11. $l_1: x + y - 5 = 0$, $l_2: 2x - y - 1 = 0$. Із системи $x + y = 5$, $2x - y = 1$ маємо $3x = 6$, $x = 2$, $y = 3$. Точка перетину $(2; 3)$.

6. Кут між прямими

Кут між двома прямими беруть у межах від $0°$ до $90°$. Його можна знайти через нормальні вектори:

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Для двох невертикальних прямих $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, якщо $1 + k_1k_2 \neq 0$:

$$\tan\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Прямі перпендикулярні тоді й лише тоді, коли $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Для невертикальних прямих це еквівалентно $k_1k_2 = -1$.

Приклад 12. $y = x + 2$ та $y = -x + 4$: $k_1k_2 = -1$, отже, $\theta = 90°$.

Приклад 13. $x = 0$ та $x - y = 0$: нормалі $(1; 0)$, $(1; -1)$, тому $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ і $\theta = 45°$.

7. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки на пряму:

$$d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Обґрунтування. Нехай $M(x; y)$ належить прямій. Проєкція вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на одиничний нормальний вектор $n/|n|$ за абсолютною величиною дорівнює шуканій відстані. Оскільки $Ax + By + C = 0$, скалярний добуток $\overrightarrow{MM_0} \cdot n$ дорівнює $Ax_0 + By_0 + C$.

Приклад 14. Відстань від $M(3; -2)$ до $3x + 4y - 6 = 0$:

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Приклад 15 (економічний). Бюджетна межа $2x + 3y - 12 = 0$. Для точки $(3; 3)$:

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0.832.$$

Координати мають бути в порівнюваних одиницях, інакше геометрична відстань без масштабування не має прямого економічного змісту.

8. Запитання для студентів

1. Як знайти довжину вектора у просторі? 2. Який критерій колінеарності на площині? 3. Як перевірити колінеарність у просторі? 4. Чим відрізняються напрямний і нормальний вектори прямої? 5. Коли прямі паралельні, а коли збігаються? 6. Чому у формулі відстані стоїть модуль?

9. Завдання для самостійного розв’язання

А. Для $a = (3; -2)$, $b = (-1; 5)$ знайти $a + 2b$, $a \cdot b$, $|a|$.
Б. Для $a = (2; -1; 2)$, $b = (4; -2; 4)$ перевірити колінеарність і знайти $|a|$.
В. Скласти рівняння прямої через $P(-1; 2)$, $Q(3; -2)$.
Г. Дослідити прямі $2x + 3y - 1 = 0$ і $4x + 6y + 7 = 0$.
Д. Знайти кут між $x + y = 0$ і $x - y = 0$.
Е. Знайти відстань від $(-2; 1)$ до $3x - 4y + 5 = 0$.

Відповіді: А. $(1; 8)$, -13, $\sqrt{13}$. Б. Колінеарні, $|a| = 3$. В. $x + y - 1 = 0$. Г. Паралельні, не збігаються. Д. $90°$. Е. 1.