Лекція 3

Тема: Метричні і позиційні властивості прямокутних проекцій пар елементарних геометричних фігур

План викладу матеріалу

1. Належність прямої і точки площині.
2. Перетин прямої з площиною.
3. Перетин двох площин довільного положення.
4. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин
5 Перпендикулярність прямої і площини.
6. Взаємноперпендикулярні площини.
7. Кут між прямою і площиною та між двома площинами.

Позиційними ***називаються задачі, в яких визначається взаємне розташування окремих геометричних елементів відносно один одного.***

До таких задач належать задачі на взаємну належність одних геометричних елементів іншим; на перетин – побудова точки перетину прямої і площини, двох прямих, лінії перетину двох площин тощо. При розв'язанні позиційних задач не враховуються їх метричні властивості.

Метричними ***називаються задачі на вимірювання відрізків, кутів, визначення дійсної величини плоских фігур тощо.***

Розв'язання багатьох метричних задач вимагає побудови перпендикулярних прямих, площин і т.п.

➔ Різновидів метричних задач багато, проте кожна з них складається з двох основних:

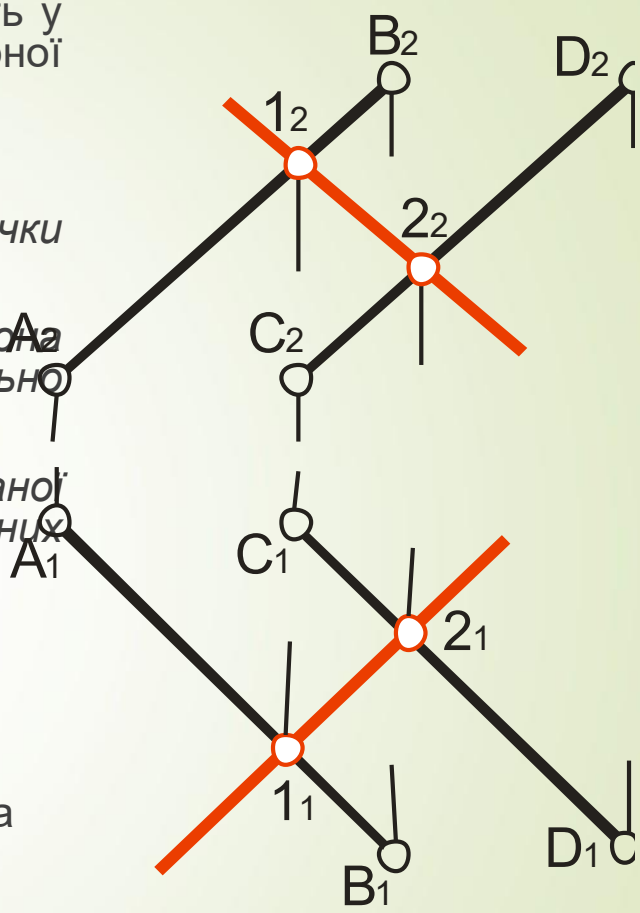
➔ Визначення відстані між двома точками;

➔ Визначення кута між перетинними прямими (кут між геометричними елементами вимірюється кутом між двома прямими, що перетинаються)

1. Належність прямої і точки площині

Для побудови зображення прямої лінії, яка лежить у даній площині використовують відомі з елементарної геометрії твердження:

- *Пряма лінія належить площині, якщо дві її точки належать даній площині.*
- *Пряма належить площині у тому випадку, коли вона проходить через одну з точок даної площини паралельно будь-якій прямій, яка лежить в цій площині.*
- *Будь-яка пряма належить площині, заданої трикутником, так як вона має з нею цілий ряд спільних точок.*



Приклад

Площина задана паралельними прямими *AB* і *CD*. Необхідно побудувати фронтальну проекцію прямої, яка лежить в цій площині, якщо задано її горизонтальну проекцію.

Визначимо за допомогою ліній зв'язку фронтальні проекції точок *1* і *2* (1_2, 2_2), що лежать у площині заданої паралельними прямими. Через точки 1_2 і 2_2 побудуємо фронтальну проекцію прямої.

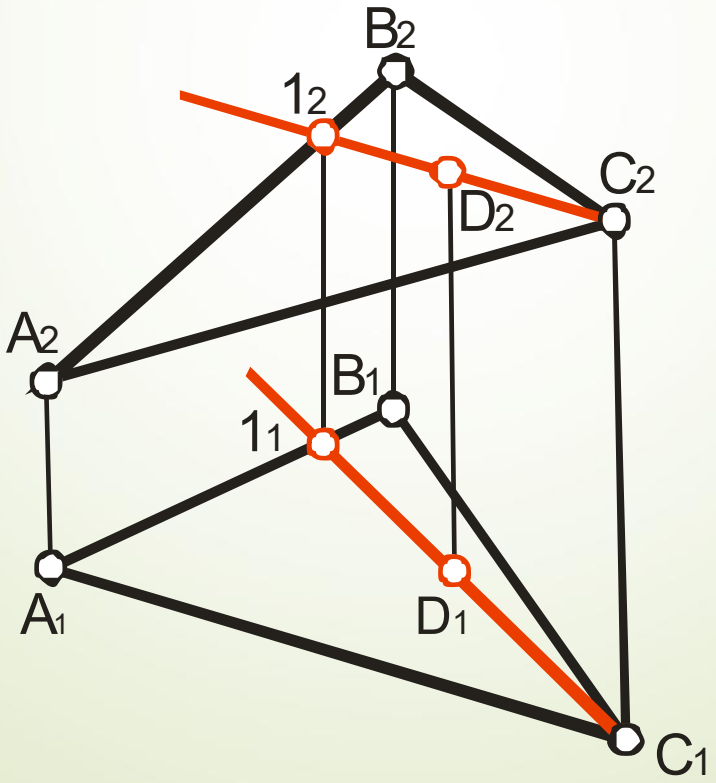
Твердження

Точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка належить даній площині.

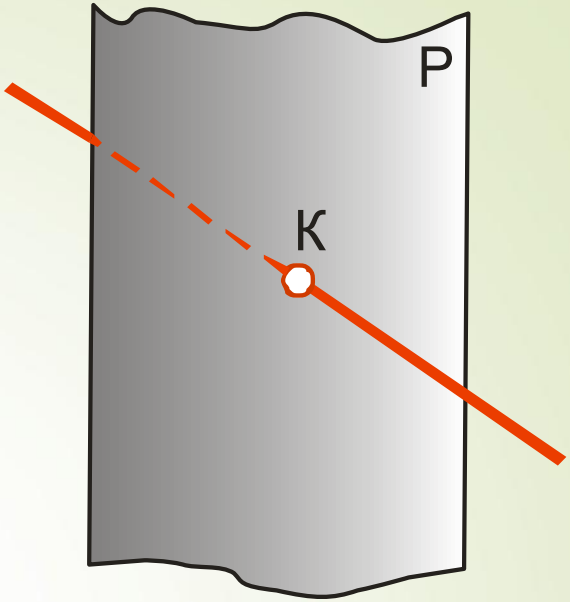
Приклад

У площині, заданої трикутником *ABC*, побудувати точку *D*.

Побудуємо в трикутнику *ABC* будь-яку пряму, наприклад *C1* ($C_1 1_1$; $C_2 1_2$), і візьмемо на цій прямій точку $D(D_1; D_2)$. Проекції точки повинні належати однойменним проекціях прямої *C1* (інакше $D_1 \in C_1 1_1$; $D_2 \in C_2 1_2$).

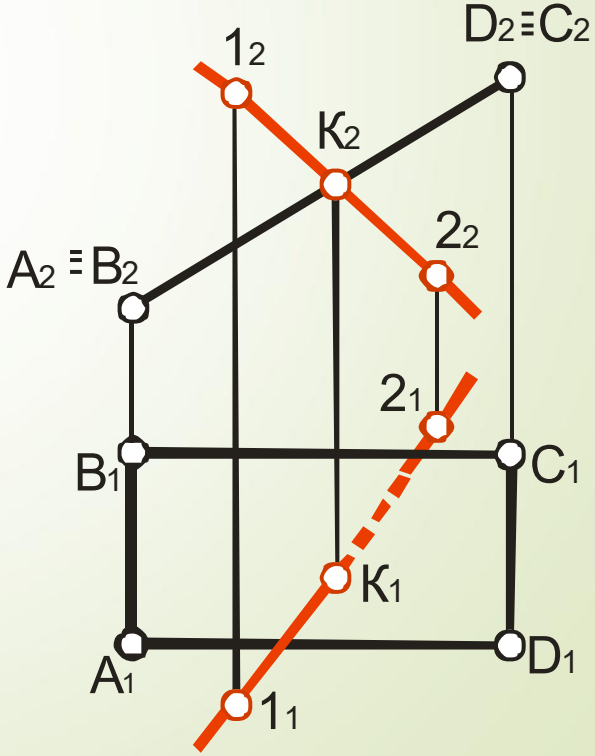


2. Перетин прямої з площиною



Побудова точки перетину прямої з площиною є першою основною позиційною задачею, яка зводиться до визначення точки, що одночасно належить заданій прямій і площині.

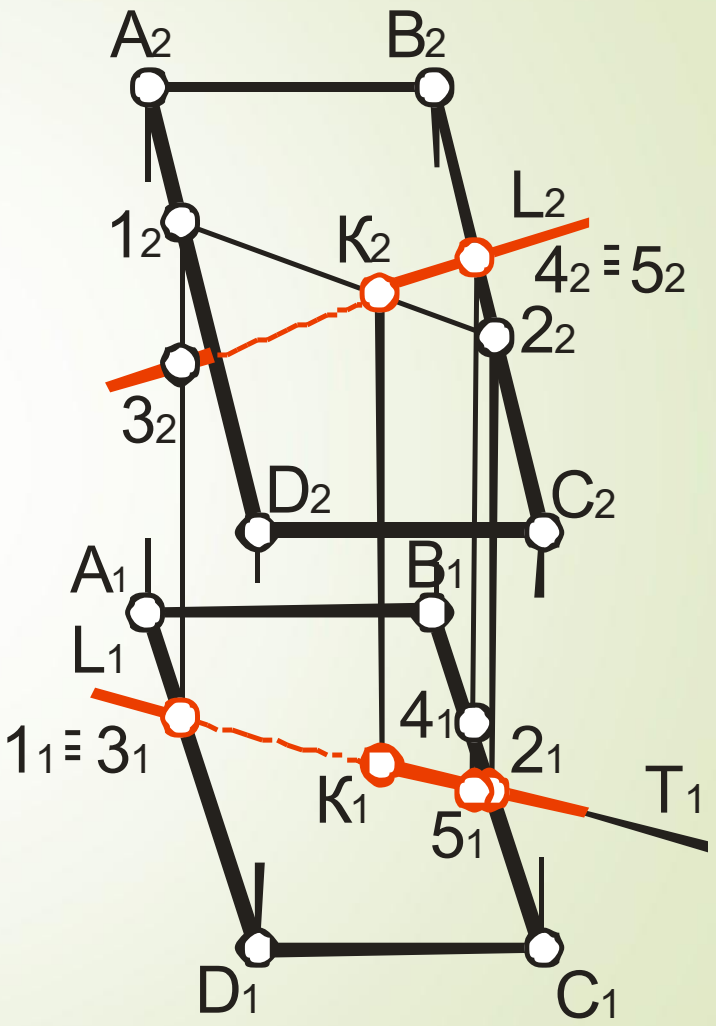
Площина *ABCD* – фронтально-проекціювальна. Отже, фронтальна проекція площини – пряма лінія, фронтальна проекція точки *K* співпадає з фронтальною проекцією площини. У перетині фронтальної проекції прямої $1_2 2_2$ з фронтальною проекцією площини знайдемо фронтальну проекцію K_2 точки *K*. Горизонтальну проекцію K_1 точки *K* знайдемо за допомогою лінії зв'язку K_1K_2. При цьому необхідно мати на увазі, що горизонтальна проекція K_1 буде лежати на горизонтальній проекції прямої $1_1 2_1$.



Для побудови точки перетину прямої з площиною загального положення необхідно:

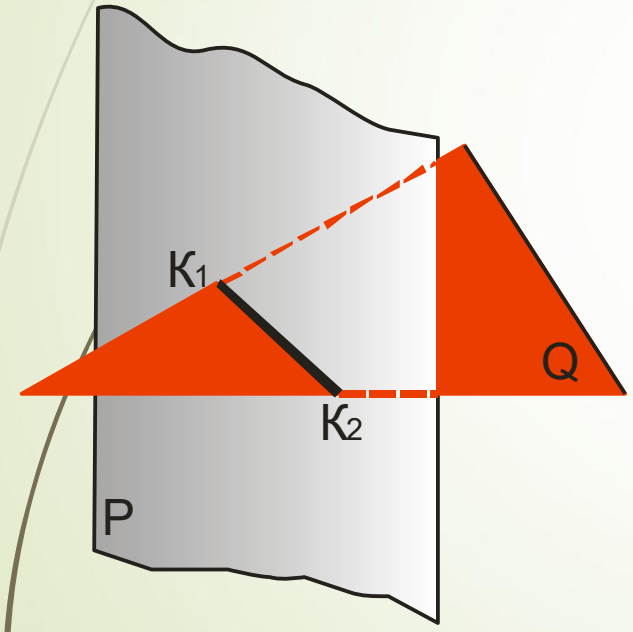
Провести через дану пряму *L* допоміжну площину *T* (за допоміжні площини вибирають проєкціювальні площини і задача зводиться до визначення лінії перетину двох площин одна з яких проєкціювальна);

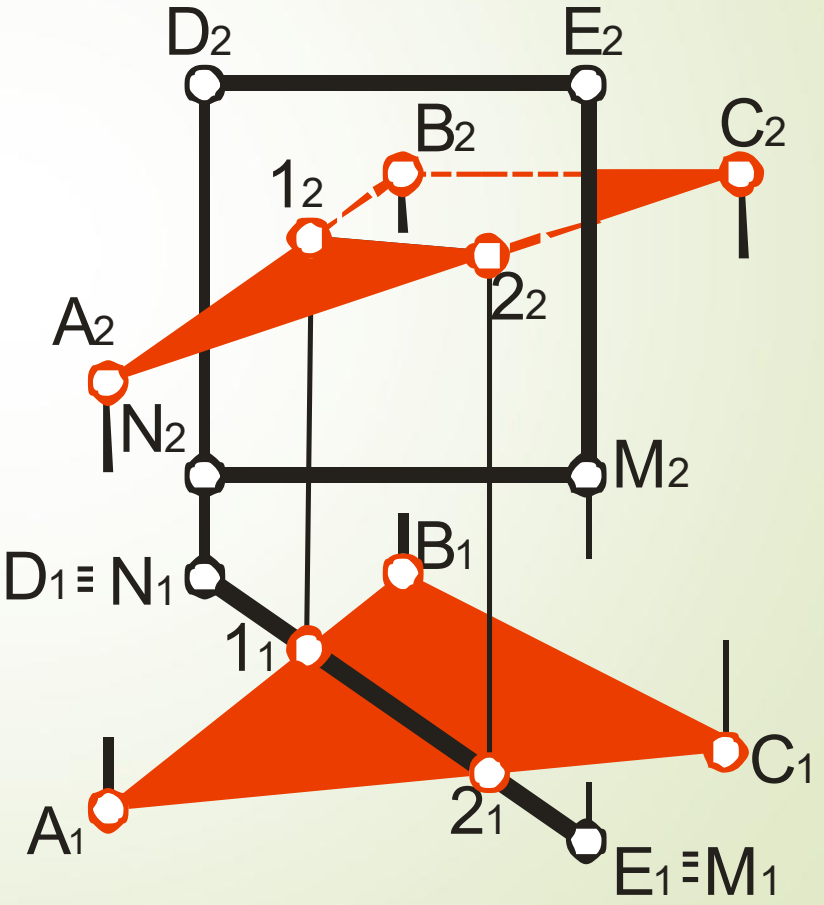
- Побудувати лінію перетину допоміжної площини *T* із заданою *ABCD*;
- Знайти точку перетину *K*(*K*$_1$, *K*$_2$), побудованої прямої *12* із заданою *L*, яка й буде шуканою.
- Видимість визначаємо за допомогою конкуруючих точок, з яких одна належить прямій, а друга площині. Це точки *1–3* і точки *4–5*.



3. Перетин двох площин довільного положення

При перетині двох площин одна з яких проекціювальна, задача на побудову лінії перетину двох площин зводиться до попередньої задачі – на побудову точок перетину прямої з площиною.



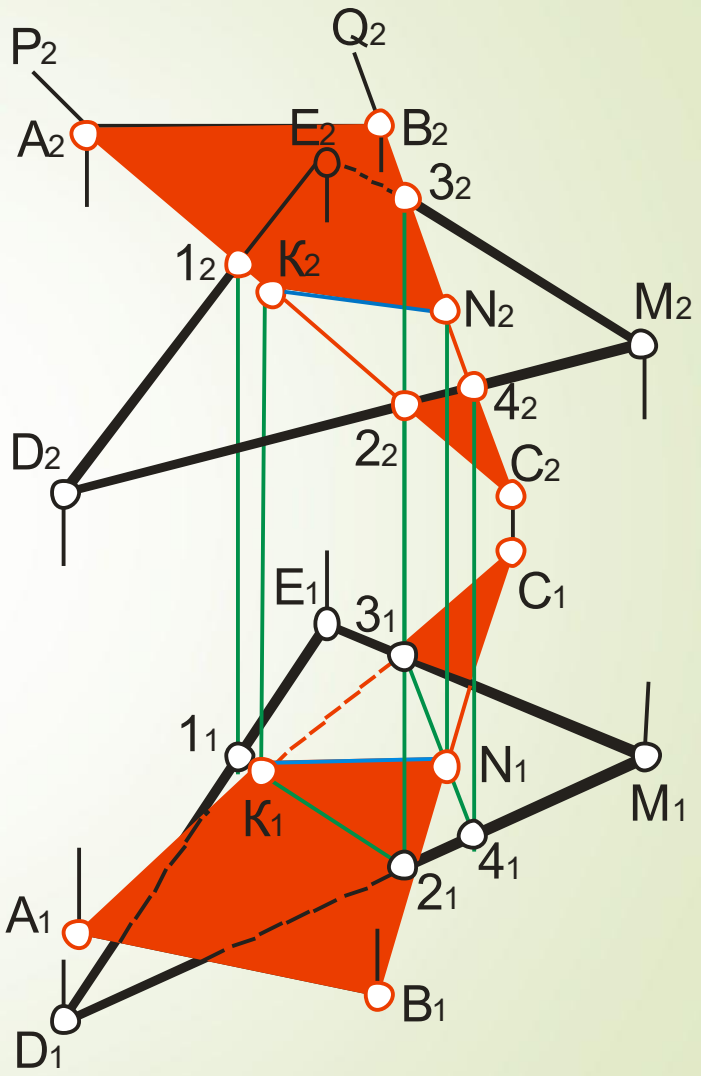


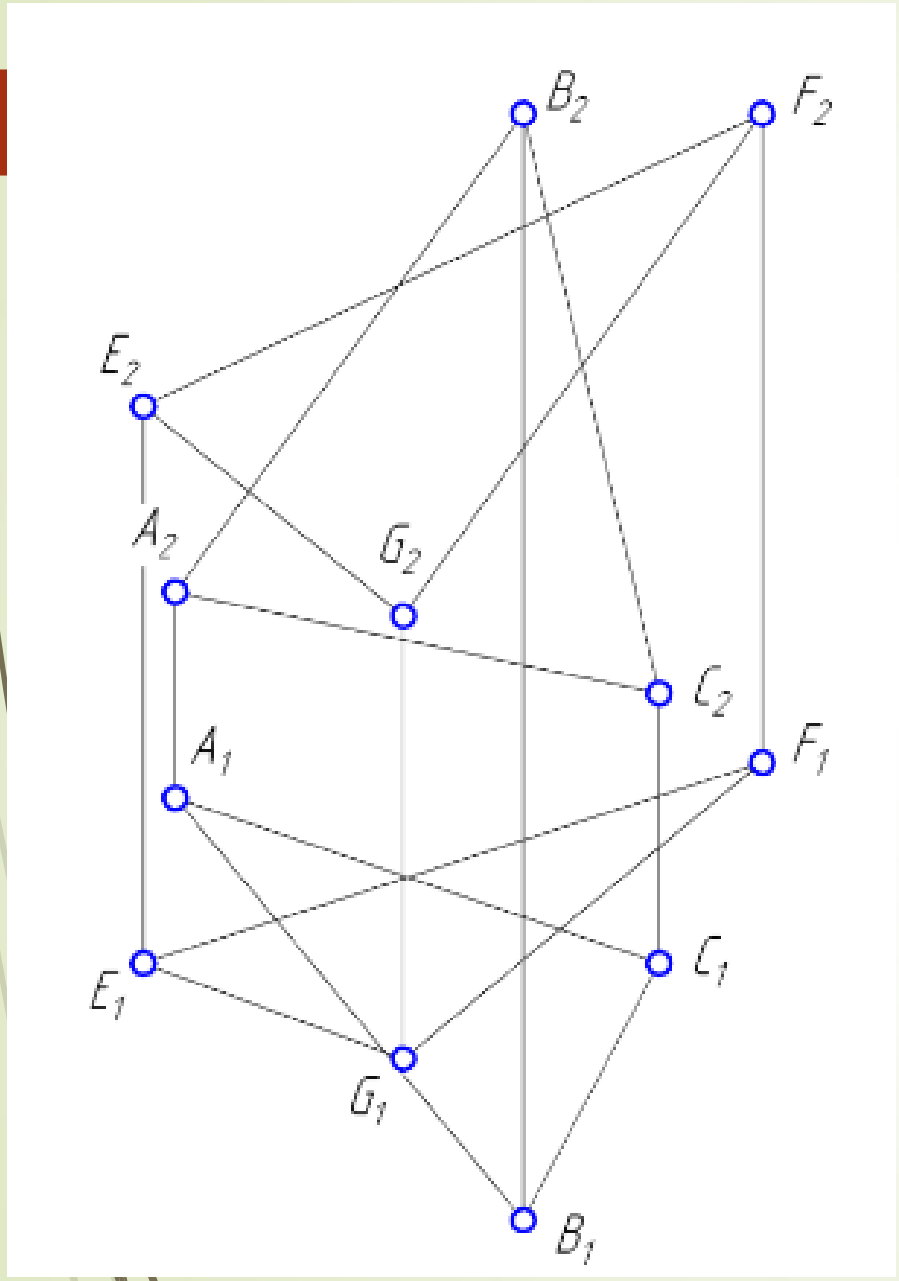
Перетин площин загального положення

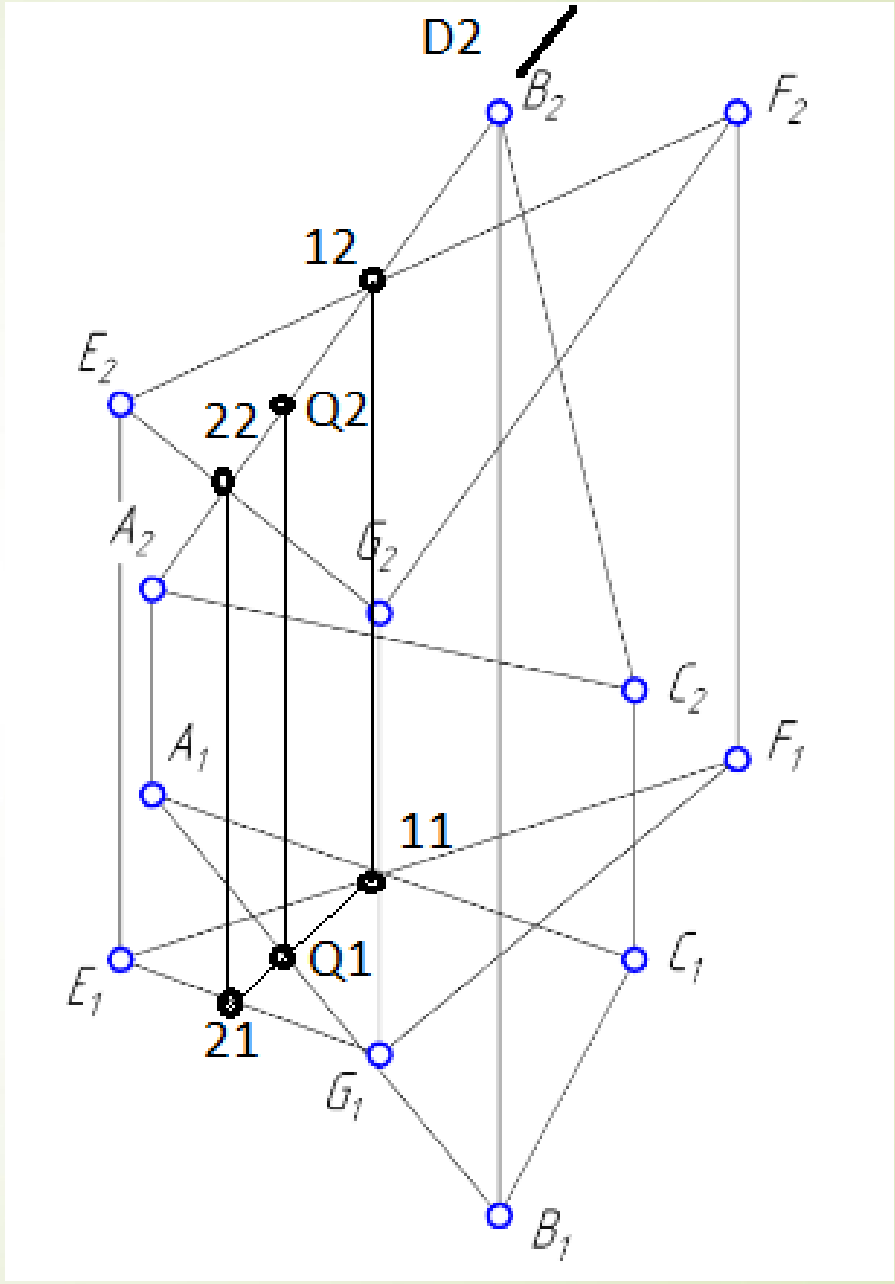
Правила

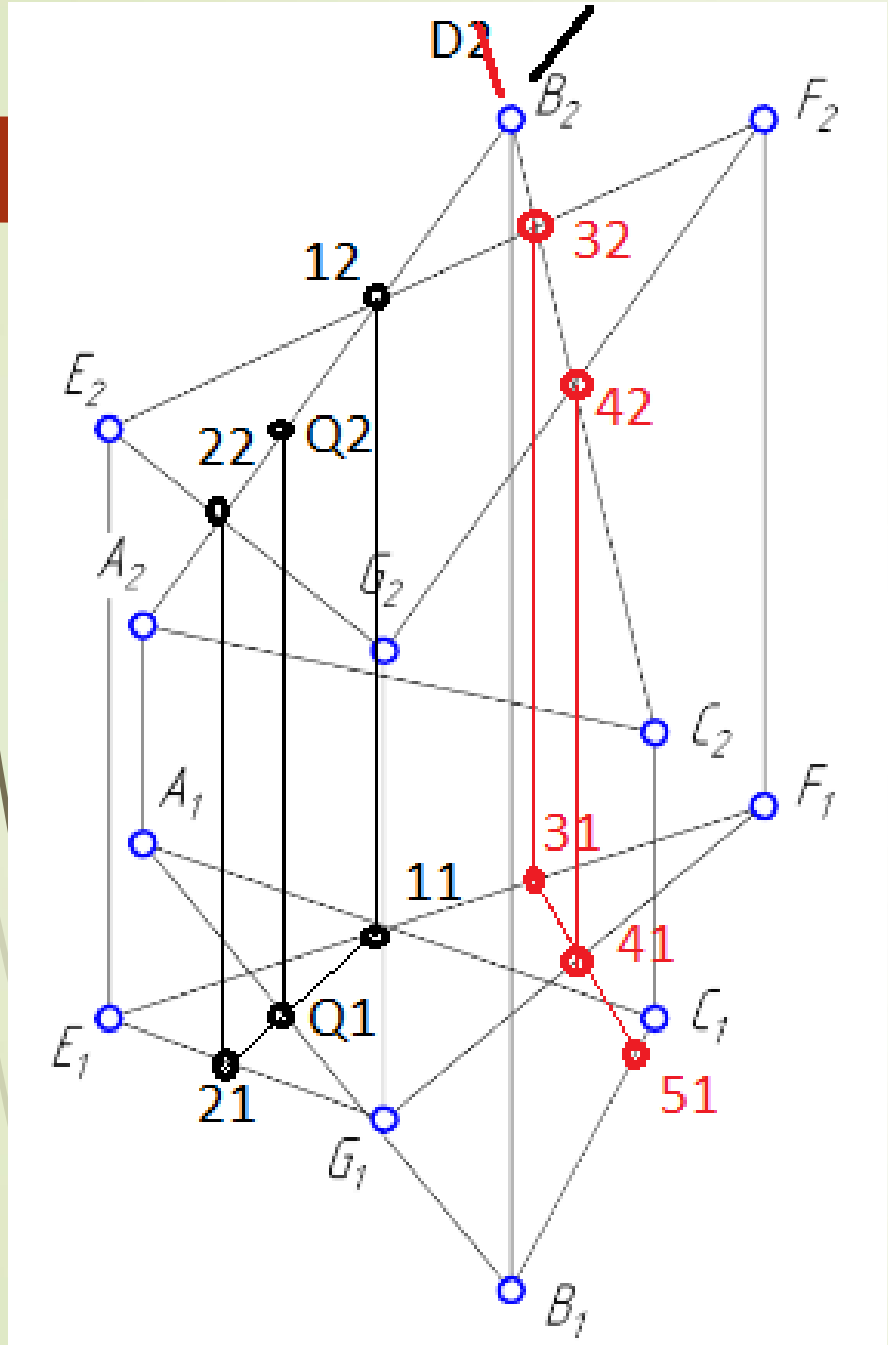
- Для побудови лінії перетину двох площин необхідно побудувати будь-які дві точки, кожна з яких належить обом площинам. Ці точки і будуть визначати шукану лінію.

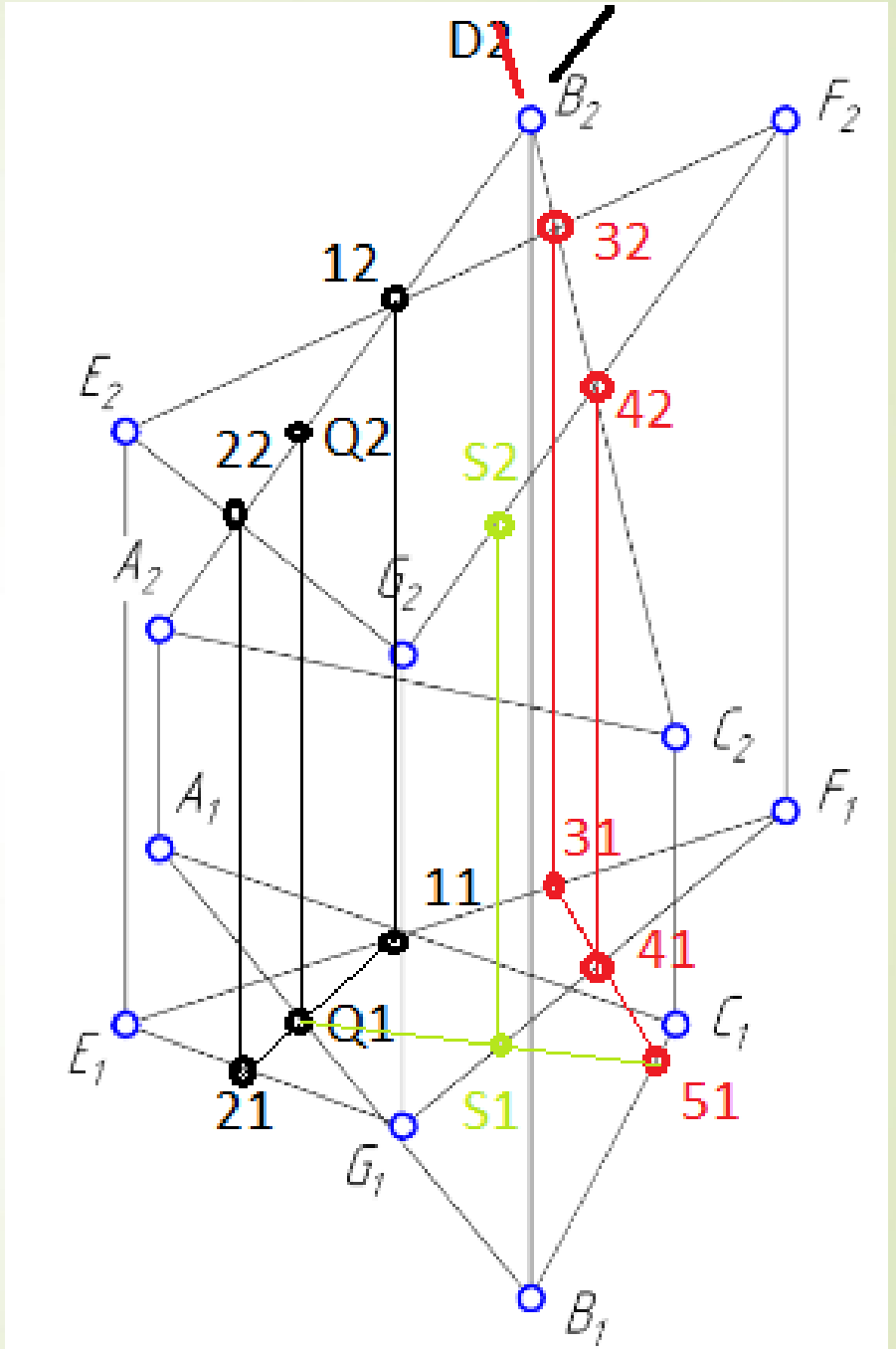
- Для побудови лінії перетину двох площин загального положення необхідно, узяти на одній з площин дві будь-які прямі і побудувати точки перетину їх з іншою площиною. Таким чином, задача зводиться до розв'язання задачі на перетин прямої з площиною загального положення.

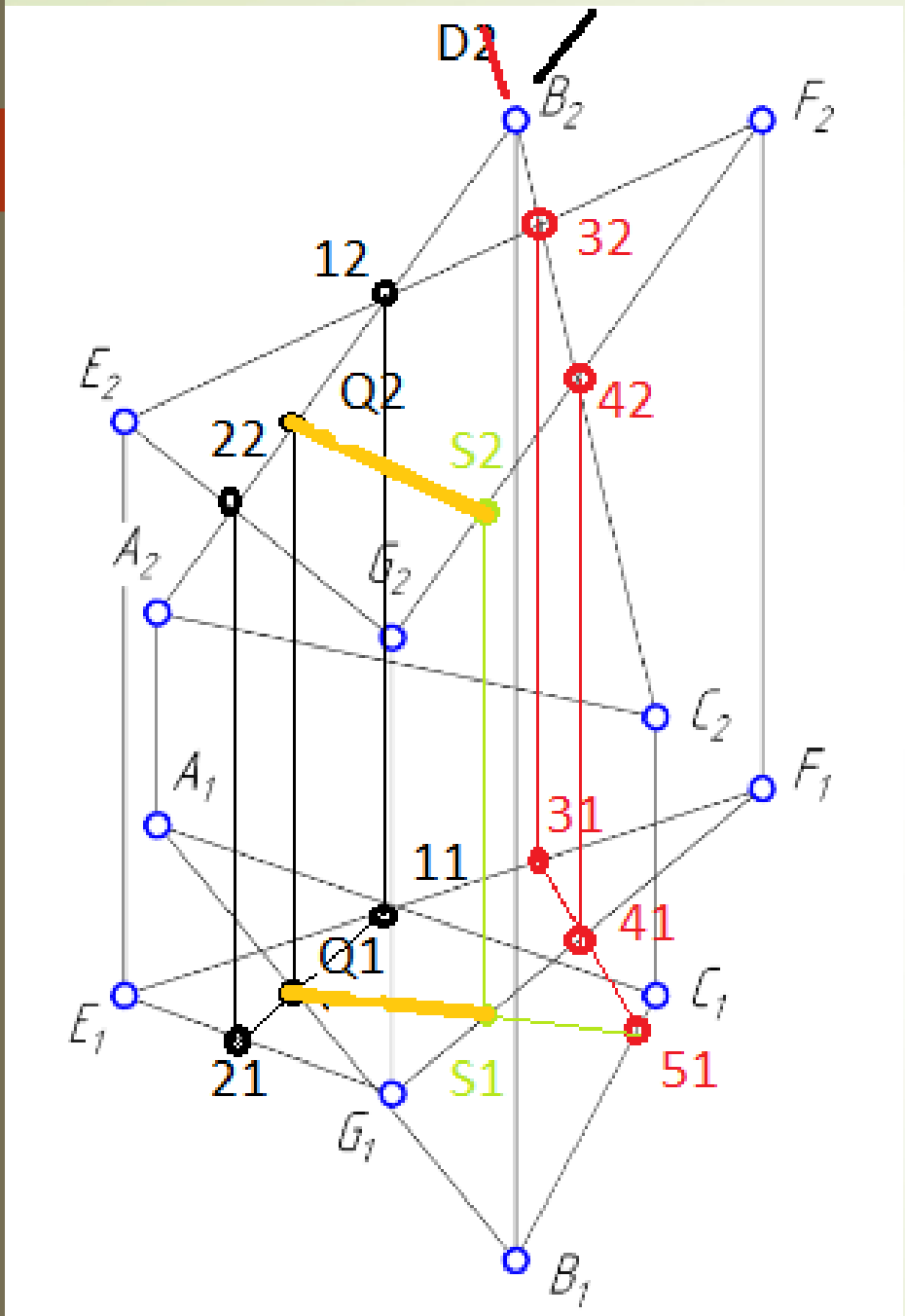


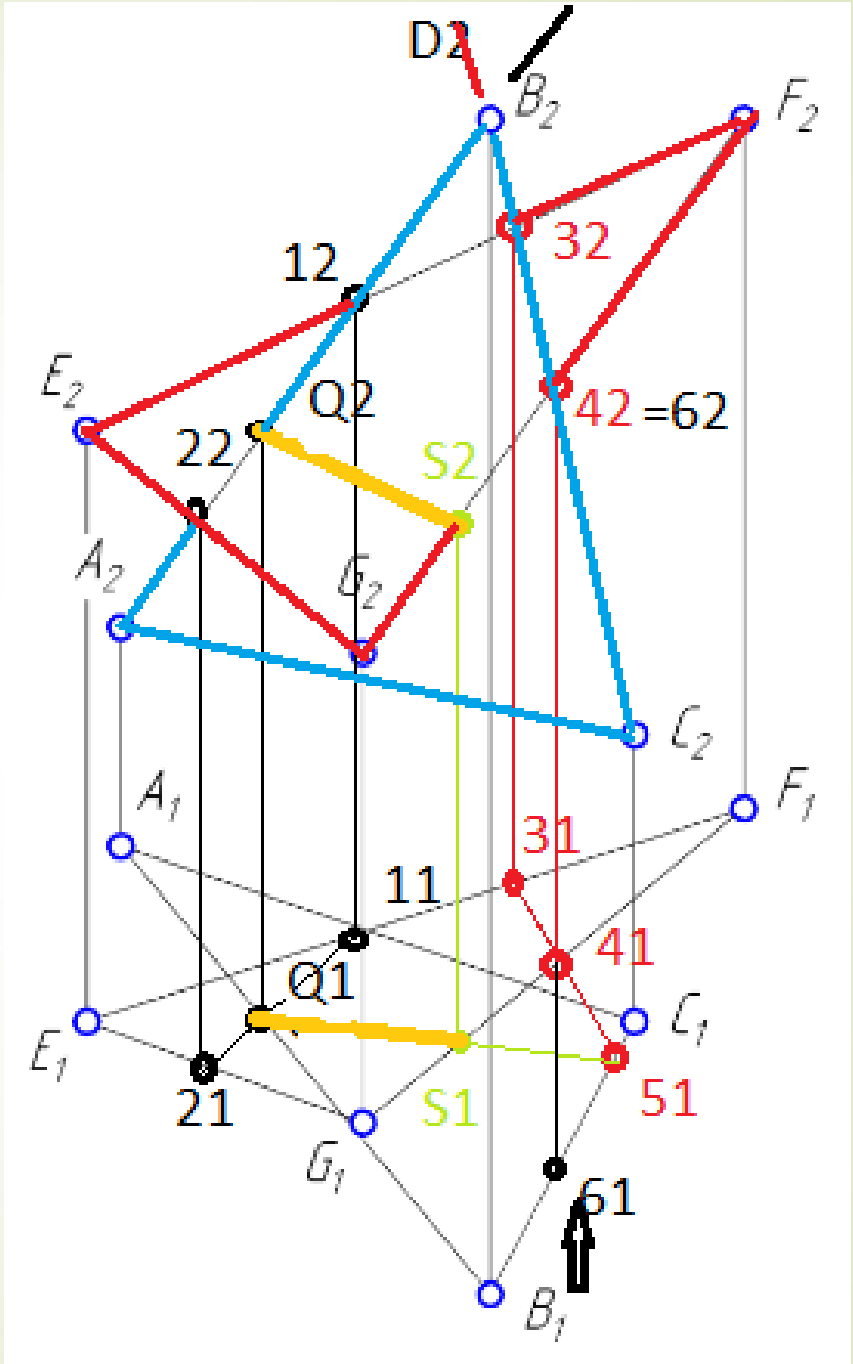

B_2
F_2
E_2
A_2
G_2
C_2
A_1
F_1
E_1
C_1
G_1
B_1

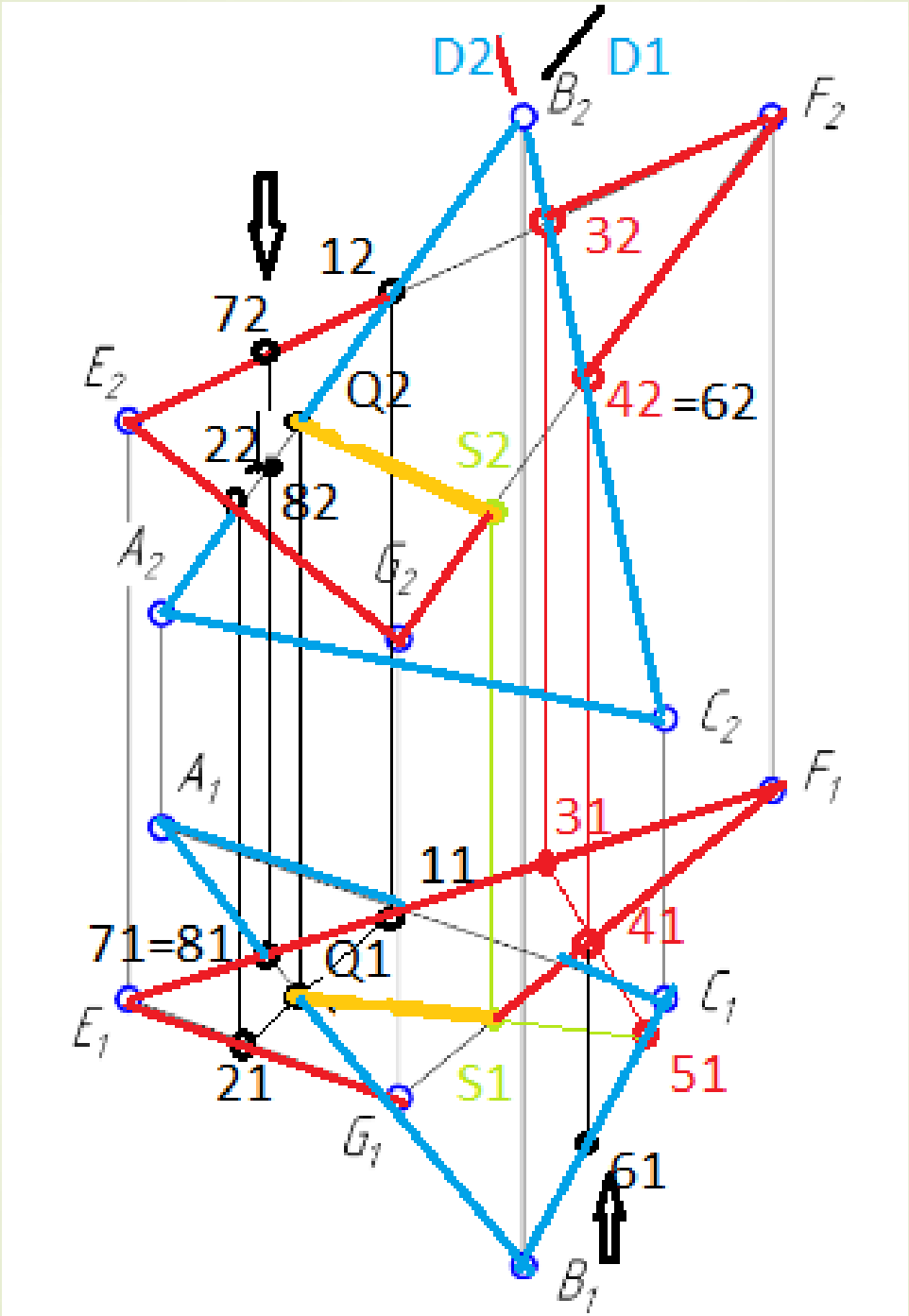

D2
B_2
F_2
12
E_2
22
Q2
A_2
G_2
C_2
A_1
F_1
11
Q1
E_1
C_1
21
G_1
B_1


D2
B2
F2
12
32
E2
42
22
Q2
A2
G2
C2
A1
F1
31
11
41
Q1
E1
C1
21
51
G1
B1


D2
B2
F2
12
32
E2
42
22
Q2
S2
A2
G2
C2
A1
F1
31
11
41
Q1
E1
C1
21
S1
51
G1
B1


D2
B2
F2
12
32
E2
Q2
42
22
S2
A2
G2
C2
A1
F1
31
11
41
Q1
C1
E1
21
S1
51
G1
B1

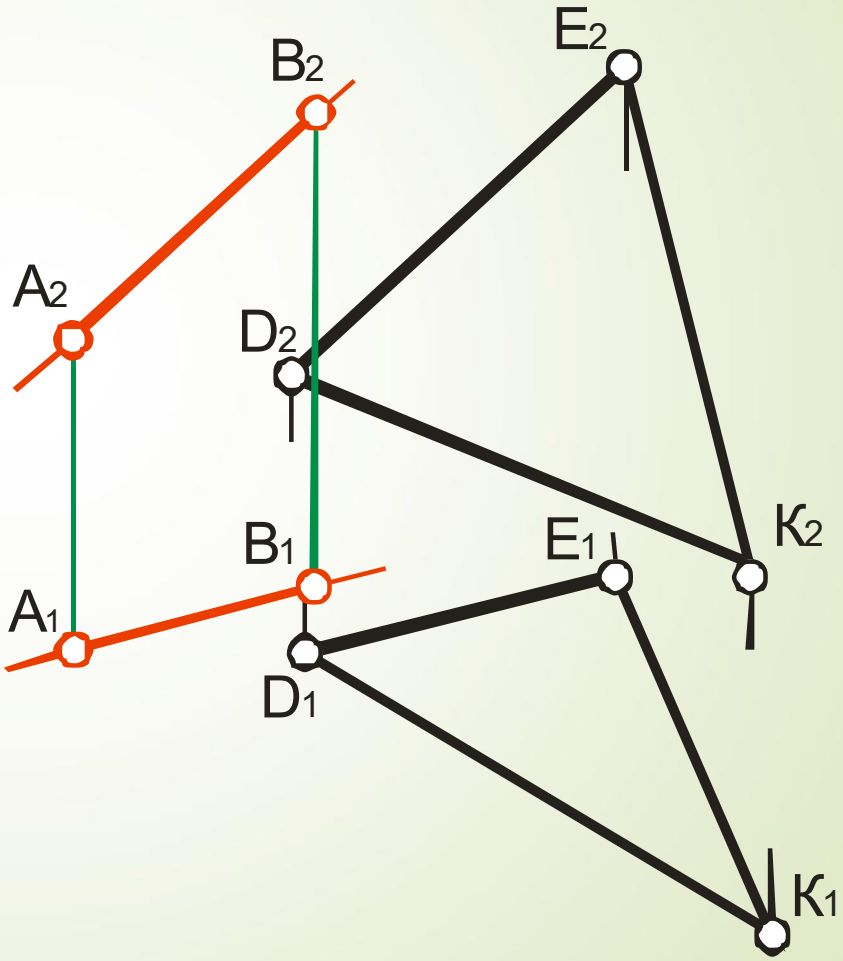

D2
B2
F2
12
32
E2
Q2
42 =62
22
S2
A2
G2
C2
A1
F1
31
11
41
Q1
C1
E1
21
S1
51
G1
61
B1


D2
D1
B_2
F_2
32
12
72
E_2
Q2
42 =62
22
S2
82
A_2
G_2
C_2
A_1
F_1
31
11
41
71=81
Q1
C_1
E_1
51
21
S1
G_1
61
B_1

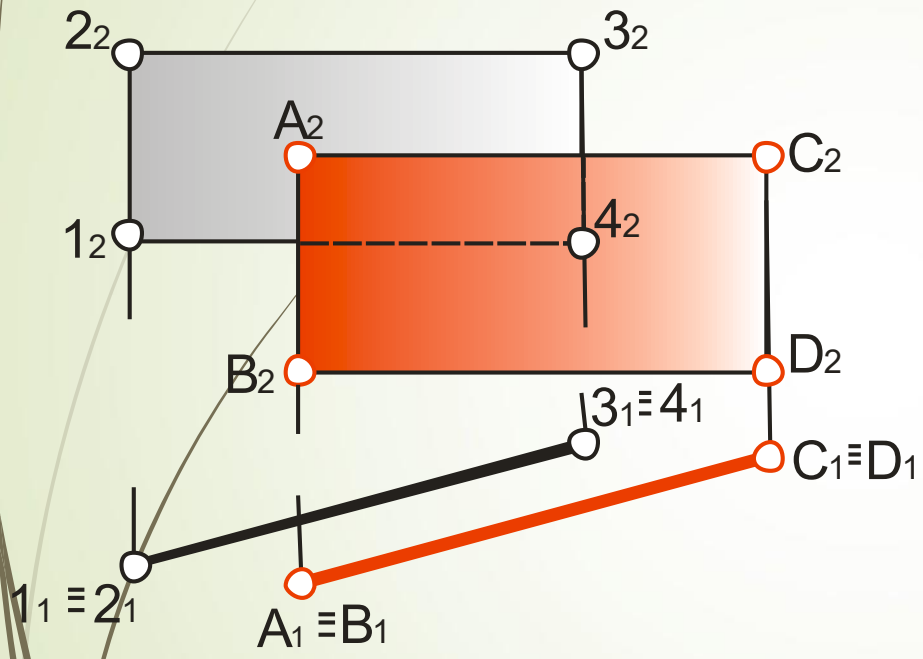
4. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин

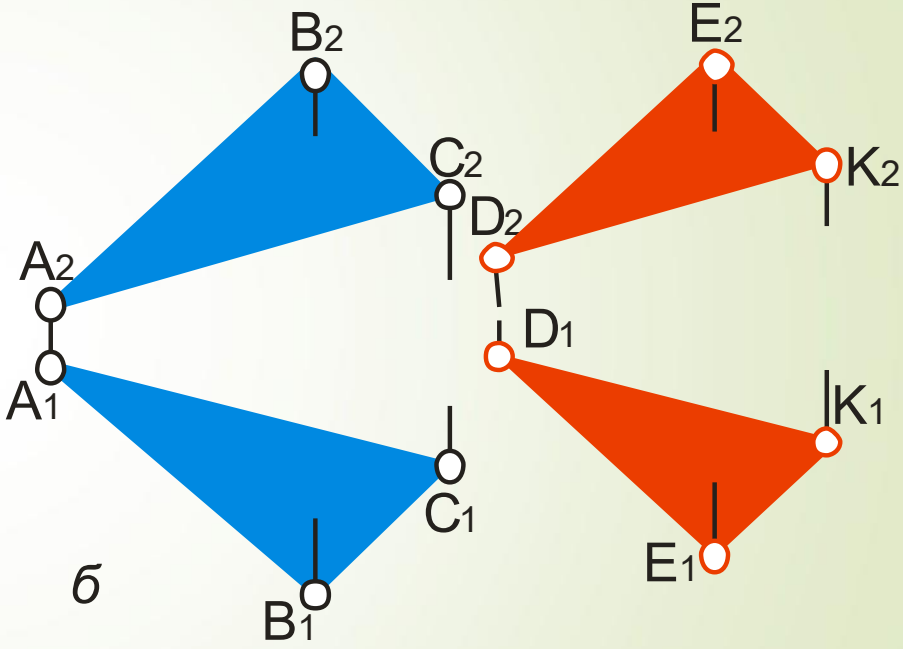
Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, яка лежить в цій площині.

Таким чином, щоб побудувати пряму яка б була паралельна площині, необхідно в даній площині задатись прямою і паралельно до неї провести шукану.



Дві площини будуть паралельними, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини, відповідно, паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини



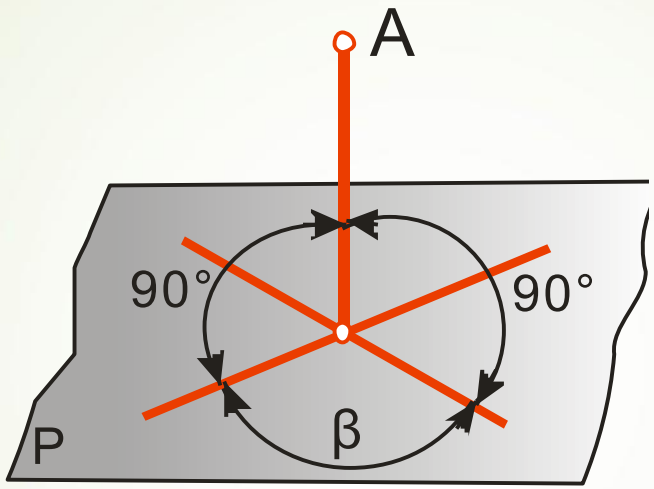


б

Горизонталі і фронталі паралельних площин паралельні між собою.

5. Перпендикулярність прямої і площини

З елементарної геометрії відомо, що **пряма буде перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до двох перетинних прямих, які лежать в даній площині**.

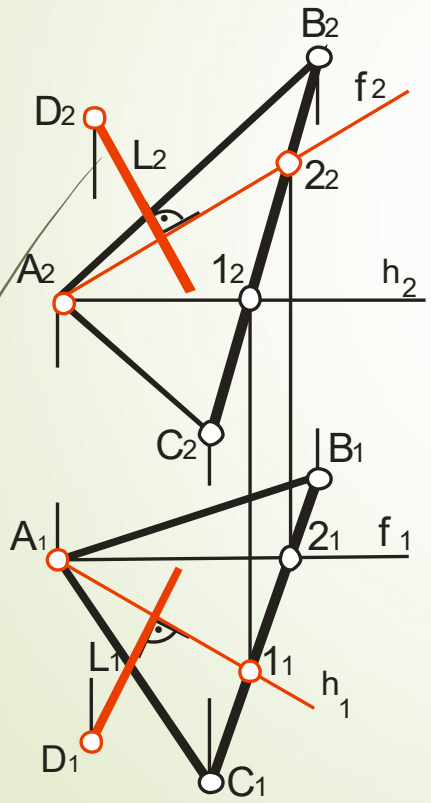


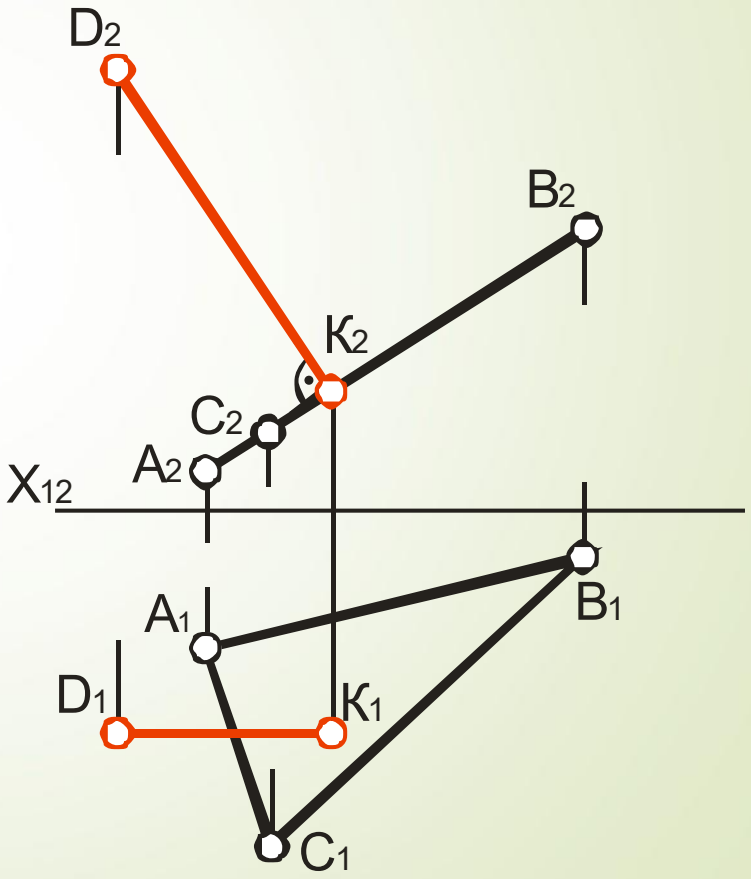
Прямий кут між прямою, що лежить в площині і перпендикуляром до неї, спроекціюється в дійсну величину (90º) тільки у тому випадку, якщо одна з його сторін паралельна площині проекцій.

Таким чином, щоб побудувати перпендикуляр до площини, необхідно взяти в цій площині прямі, які б були паралельні площинам проекцій (прямі рівня – горизонталі і фронталі) і провести перпендикуляри до цих прямих.

Правило

Щоб пряма була перпендикулярна до площини, необхідно і достатньо, щоб горизонтальна проекція прямої була перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі, а фронтальна проекція – до фронтальної проекції фронталі даної площини.





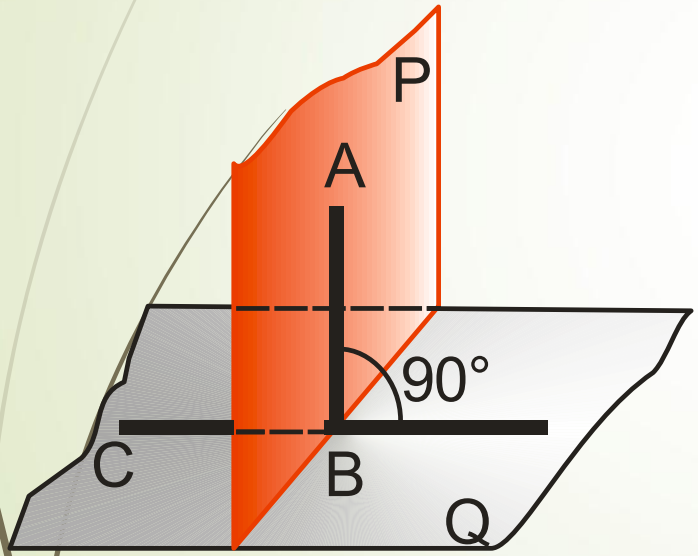
Алгоритм розв'язування задачі:

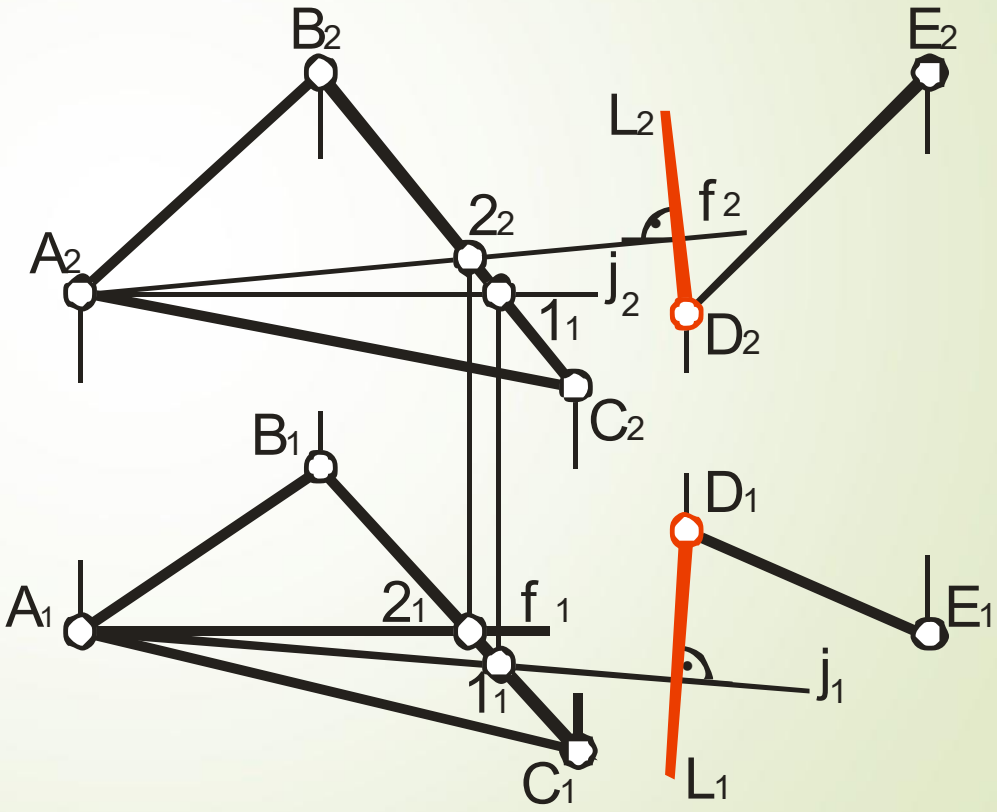
- побудувати в даній площині $P(\Delta ABC)$ прямі рівня – горизонталь і фронталь;
- з горизонтальної проекції точки D_1 провести пряму, перпендикулярну до горизонтальної проекції горизонталі h_1 (L_1 - горизонтальна проекція перпендикуляра);
- з фронтальної проекції точки D_2 провести пряму L_2 – перпендикулярну до фронтальної проекції фронталі f_2.

6. Взаємноперпендикулярні площини

Правило

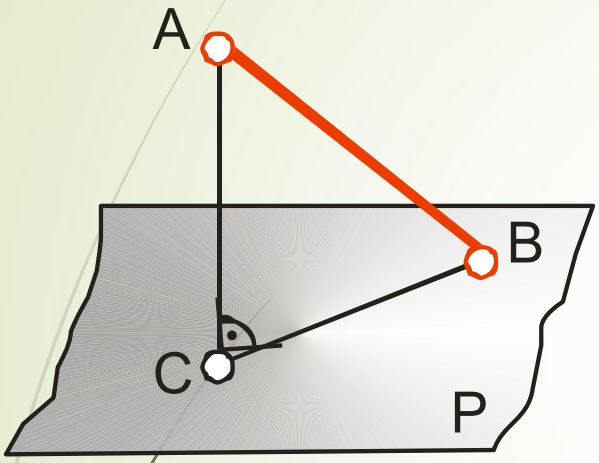
Дві площини перпендикулярні, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до другої площини чи перпендикулярна до прямої, яка належить цій площині.

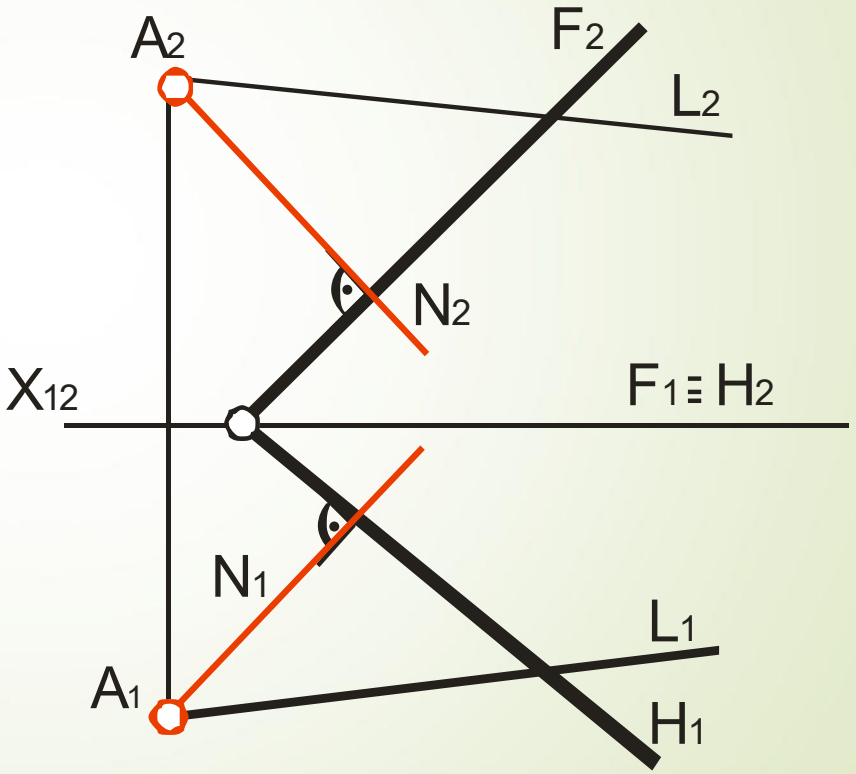




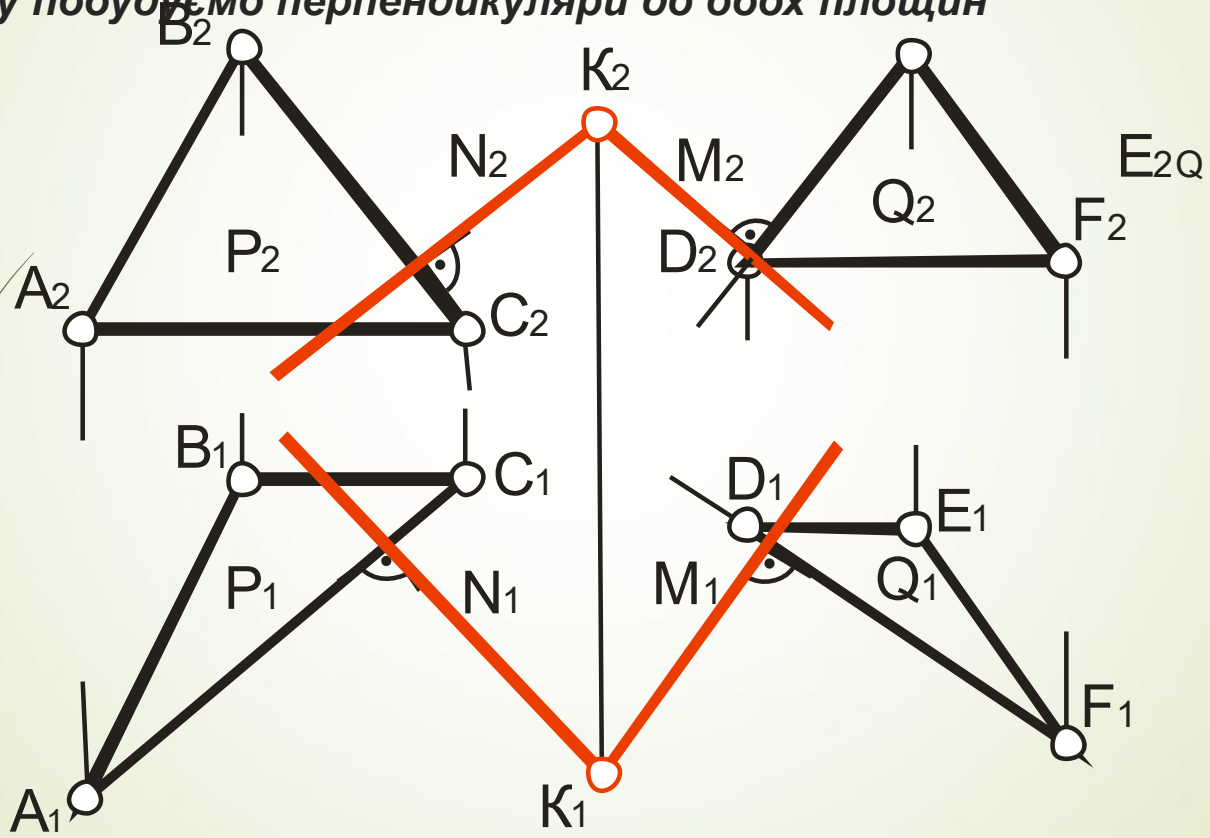
7. Кут між прямою і площиною та між двома площинами

Кут між прямою і площиною вимірюється кутом між прямою та її проекцією на цю площину.





Приклад. *Кут між площинами* **P** *і* **Q** *буде дорівнювати куту між перпендикулярами до цих площин* **N** *і* **M**. *Таким чином, з довільної точки* **K**(K_1, K_2) *простору побудуємо перпендикуляри до обох площин*



Запитання і завдання для самоперевірки

1. Як побудувати прямі лінії і точки, що належать площині?
2. Подати алгоритм і приклади побудови прямих ліній, паралельних до площин.
3. Показати приклади і алгоритм визначення точки перетину прямої з площиною загального положення і проєкціювальною площиною.
4. Як установити взаємне положення прямої і площини?
5. Як визначити „видимість” при перетині прямої з площиною?
6. Які дії і в якій послідовності необхідно їх виконувати при визначенні лінії перетину двох площин?
7. У якому випадку дві площини будуть паралельні?
8. Показати на прикладі побудову двох взаємно паралельних площин.
9. Показати приклади і алгоритм побудови прямої перпендикулярної до площини.
10. Як побудувати перпендикуляр з точки на пряму загального положення (за допомогою площини перпендикулярної до прямої)?
11. В якому випадку дві площини будуть перпендикулярні одна одній?
12. Як побудувати дві взаємоперпендикулярні площини?
13. Встановити чи перпендикулярні площини загального положення одна одній, якщо їх однойменні сліди взаємоперпендикулярні?
14. Що називається кутом між прямою і площиною і які дії необхідно виконати для побудови проекцій цього кута на кресленику?
15. Які дії необхідно виконати для побудови на кресленику проекцій лінійного кута для даного двогранного кута?