Гідравліка, гідро та пневмоприводи

Лекція 3

ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ І ДИНАМІКИ РІДИНИ РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА ТА БЕРНУЛЛІ РУХУ РІДИНИ

Викладач: доцент кафедри МІтаАТ
к.т.н. Степчин Я.А.

Види руху рідини. Основні поняття кінематики рідини

Кінематика рідини – розділ гідравліки, в якому вивчаються види руху рідини без урахування сил, під дією яких рідина рухається.
Динамікою рідини – розділ, у якому вивчаються закони руху рідини залежно від діючих на рідину сил.
У гідравліці рідину розглядають суцільним середовищем, що складається з великої кількості елементарних частинок, які характеризується швидкістю свого переміщення V та місцевим гідравлічним тиском p.
Існують два методи вивчення руху рідини: **метод Ейлера і метод Лагранжа**.
За Ейлером розглядають рух різних частинок рідини, які на даний момент часу t знаходяться в певній точці простору.
В момент часу t частинка має швидкість u, що називається місцевою швидкістю та тиск, які є функціями координат і часу:

$$U = u(x, y, z, t) \quad p = p(x, y, z, t)$$

Метод Лагранжа полягає в дослідженні руху окремих зафіксованих частинок рідини, тобто траєкторій їх руху.

Рух рідини поділяють на:

- усталений (стаціонарний) - якщо параметри рідини не змінюються з часом (інакше неусталений, нестаціонарний);

- усталений рух може бути **рівномірним і нерівномірним**; Під час рівномірного руху швидкості в подібних точках різних перерізів однакові, за нерівномірного – різні;

Траєкторія руху рідини – лінія, по якій переміщаються елементарні частинки в потоці рідини.

Лінія течії – крива, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямком вектору швидкості рідини.

Трубка течії – це трубчаста поверхня, яка складається з множини ліній течії, проведених крізь довільний замкнений контур в рухомій рідині.

Частина потоку, що є всередині трубки течії – **елементарна струминка**.

Властивості елементарної струминки:

а) в усіх точках нормального перерізу струминки швидкості однакові, але можуть змінюватися в разі переходу від одного перерізу до іншого;

б) бічна поверхня елементарної струминки є непроникною, тобто з неї не може витікати рідина.

Переріз потоку, нормальний до кожної лінії течії, називають **живим перерізом** із площею S_i.

Витрата (подача) Q – це об'єм рідини, що протікає через живий переріз потоку за одиницю часу.

Витрату рідини визначають як суму витрат елементарних струминок, із яких складається потік:

$$Q = \int_S u dS ,$$

де u - місцева швидкість у центрі перерізу елементарної струминки площею S.
Розмірності витрати: м³/с, л/с, л/хв, м³/год.
На практиці використовують поняття середньої швидкості потоку V (рис. 1).

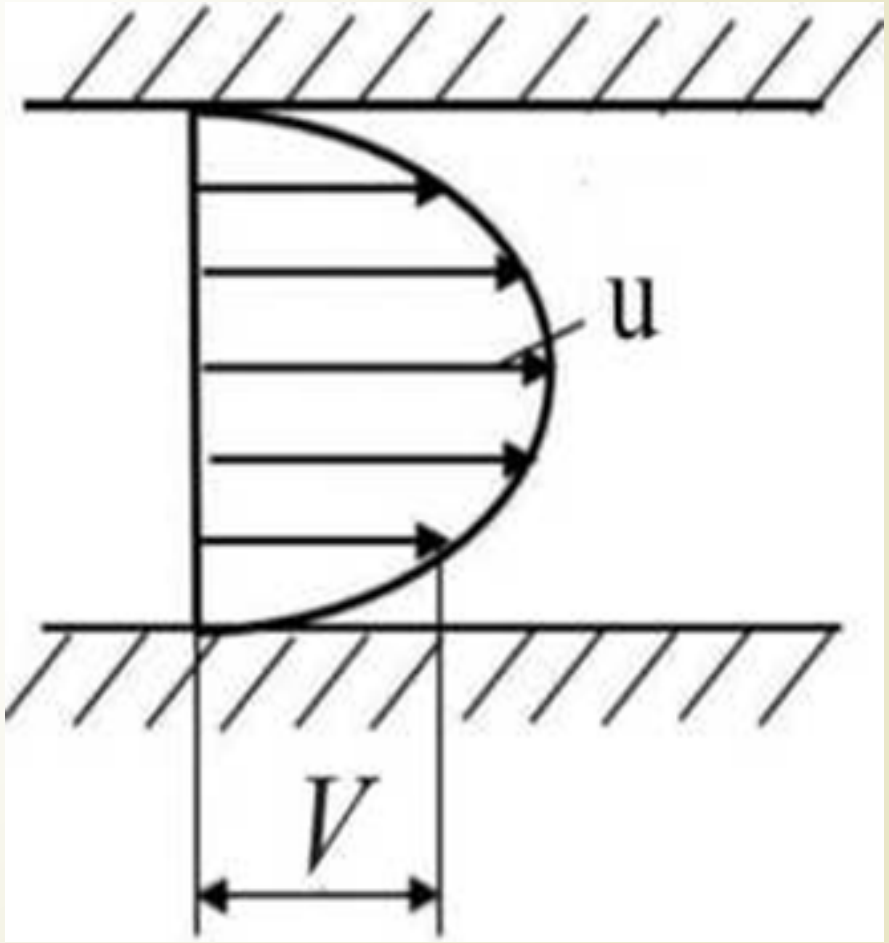


Рис. 1. Місцева u і середня V швидкості в перерізі потоку

Рівняння суцільності елементарної струминки та потоку рідини

Для елементарної струминки в потоці рідини (рис 2) можна виділити перерізи 1-1, 2-2 та 3-3. Відповідно до другої властивості елементарної струминки з її боків не може витікати і втікати в неї рідина.

За час dt через площу перерізу ds втікає рідина кількістю: $dQ_1 = dS_1 V_1 dt$

Аналогічно через переріз 3-3 протече та сама кількість: $dQ_3 = dS_3 V_3 dt$

Оскільки бокова поверхня елементарної струминки непроникна, то можна записати рівність витрат в усіх перерізах елементарної струминки:

$dQ_1 = dQ_2 = dQ_3$, або $dS_1 V_1 dt = dS_2 V_2 dt = dS_3 V_3 dt$

Звідки $dS_1 V_1 = dS_2 V_2 = dS_3 V_3$

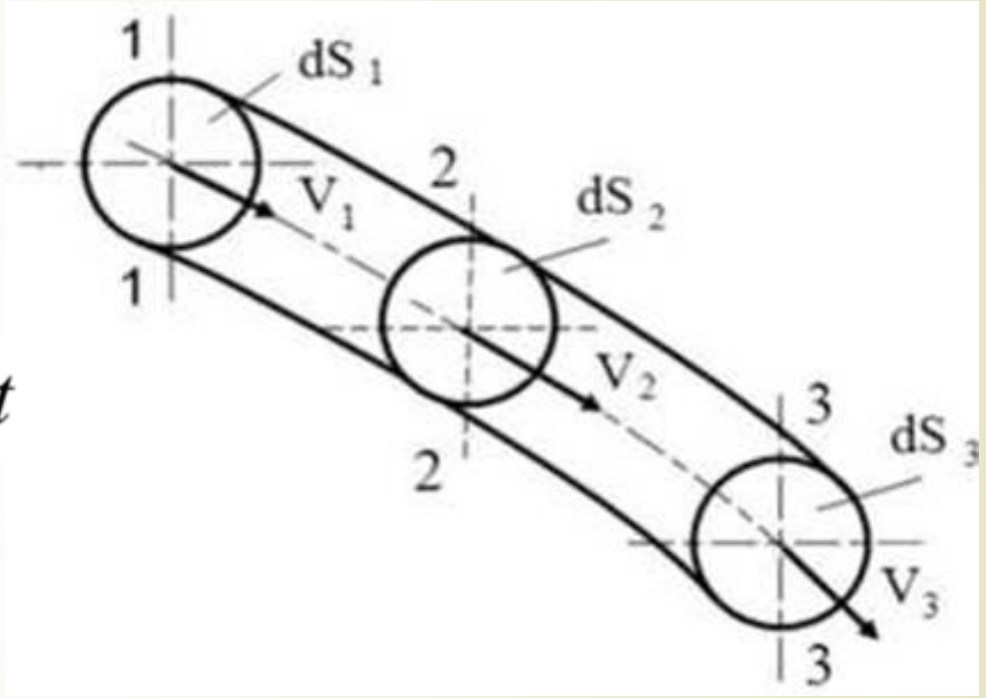


Рис. 2. Елементарна струминка рідини

- **рівняння суцільності** (нерозривності) для елементарної струминки – витрата рідини в усіх її перерізах є постійною.

Рівняння суцільності можна одержати для всього потоку рідини, який складається з нескінченно великої кількості елементарних струминок.

Рівняння суцільності для елементарної струминки:

$$dS_1V_1 = dS_2V_2 = dS_3V_3$$

Після інтегрування рівняння на всій площі перерізу визначається витрата всього потоку:

$$\int_{S_1} dS_1V_1 = \int_{S_2} dS_2V_2 = \int_{S_3} dS_3V_3$$

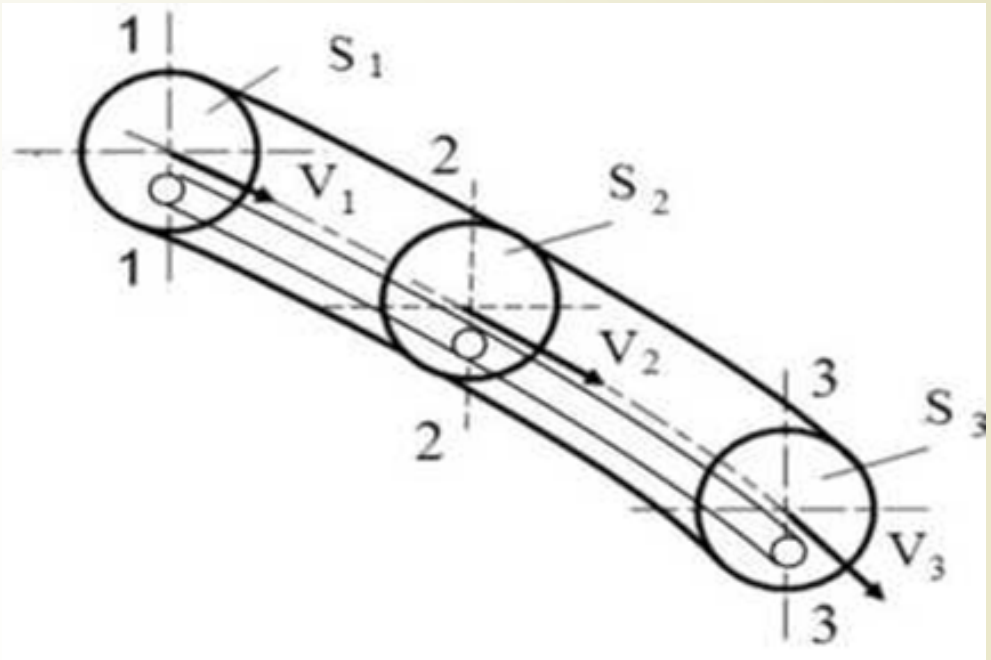


Рис. 3. Рух рідини через перерізи потоку

$\int_S VdS = VS$ де V – середня швидкість, тоді:

$$S_1V_1 = S_2V_2 = S_3V_3 = const\ ,$$

або

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = const\ ,$$

- **рівняння суцільності** (нерозривності) для потоку

де V_i – середні швидкості в різних перерізах потоку;
S_i – площі живих перерізів.

Рівняння Ейлера руху ідеальної рідини

Рух елементарного рідкого тіла у вигляді паралелепіпеда, виділеного біля довільної точки A (рис. 4) з координатами x, y, z.
Тиск у точці A – p, швидкість руху рідини – з V, її проекції на координатні осі – V_x, V_y, V_z.
На тіло будуть діяти сили тиску і масова сила (X, Y, Z) та сили інерції.

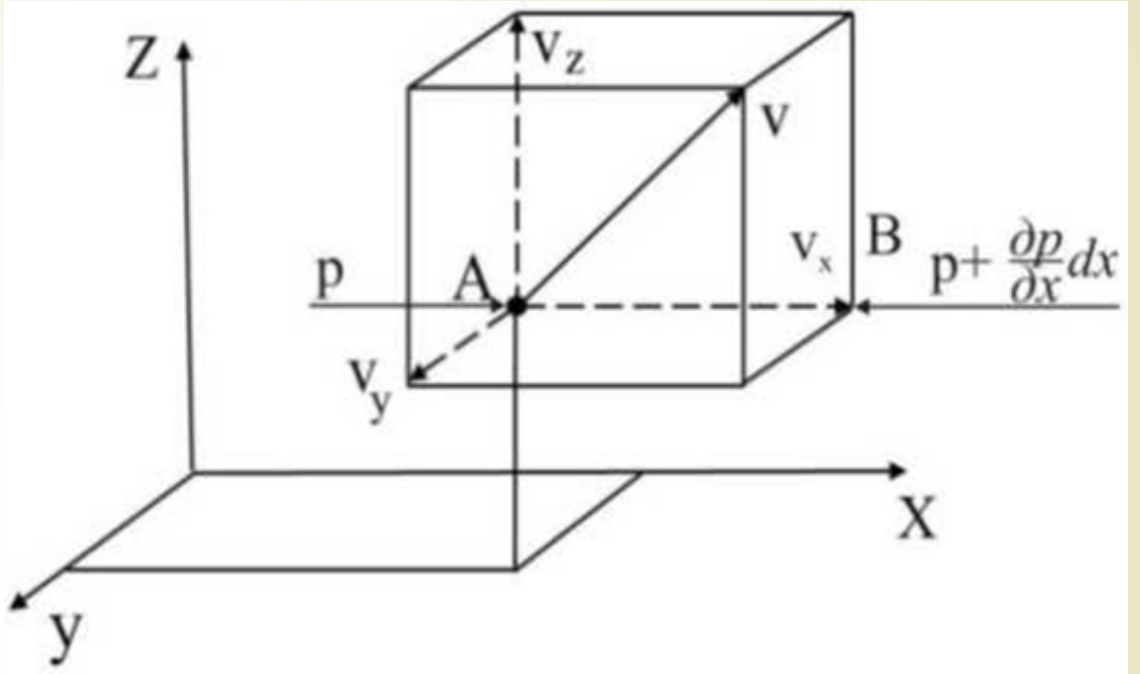


Рис. 4. Схема руху елементарного рідкого тіла

Принцип Д'Аламбера: тіло, що рухається нерівномірно, можна розглядати як тіло, що перебуває у відносному спокої, якщо до сил, які на нього діють, додати силу інерції, спрямовану протилежно руху і таку, що дорівнює добутку маси на прискорення.

Проєкції сил інерції, віднесені до одиниці маси, – це прискорення:

$$a_x = -\frac{dV_x}{dt},\ a_y = -\frac{dV_y}{dt},\ a_z = -\frac{dV_z}{dt}$$

Знак «-» показує, що сили інерції спрямовані протилежно руху паралелепіпеда.

Диференціальні рівняння рівноваги рідини, в стані спокою, мають вигляд:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Додавши до цих рівнянь проєкції прискорень, одержимо рівняння руху ідеальної рідини:

$$\frac{dV_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dV_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dV_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини, або диференціальні рівняння Ейлера:

Рівняння Бернуллі для ідеальної рідини

Для елементарної струминки ідеальної рідини, що перебуває в усталеному русі диференціальними рівняннями руху рідини помножимо перше рівняння на dx, друге - на dy , третє - на dz, та просумуємо:

$$\frac{dV_x}{dt}dx+\frac{dV_y}{dt}dy+\frac{dV_z}{dt}dz=Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

Оскільки $\frac{dx}{dt}=V_x,\ \frac{dy}{dt}=V_y,\ \frac{dz}{dt}=V_z,$ тоді: $dx=V_x dt,\ dy=V_y dt,\ dz=V_z dt.$

Після підстановки:

$$\frac{dV_x}{dt}V_x dt+\frac{dV_y}{dt}V_y dt+\frac{dV_z}{dt}dV_z dt=V_x dV_x+V_y dV_y+V_z dV_z=\frac{1}{2}d(V_x^2+V_y^2+V_z^2)$$

Ураховуючи, що $V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2$ тоді: $\frac{1}{2}d(V^2)=\frac{1}{2}d(V_x^2+V_y^2+V_z^2)$

У правій частині загального диф. рівняння руху рідини вираз $Xdx+Ydy+Zdz$ є повним диференціалом деякої функції U = f(t) , частинні похідні якої дорівнюють: $\frac{\partial U}{\partial x}=X,\ \frac{\partial U}{\partial y}=Y,\ \frac{\partial U}{\partial z}=Z.$

Тоді остаточно: $\frac{1}{2}d(V^2)=dU-\frac{1}{\rho}dp,$

Або:

$$\frac{1}{2}d(V^2)-dU+\frac{1}{\rho}dp=0$$

– рівняння встановлює зв'язок між швидкістю V, тиском p і силовою функцією U.

Після інтегрування диференціального рівняння:

$$\frac{1}{2}d(V^2)-dU+\frac{1}{\rho}dp=0$$

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U=const$$

Для елементарної струминки ідеальної рідини (рис. 5) для двох довільних перерізів 1-1 і 2-2 можна записати:

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}-U_1=\frac{V_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}-U_2.$$

Якщо на рідину діє лише одна масова сила – сила тяжіння, X = 0, У = 0, Z = -g. Тоді функція U = -gz і рівняння набирає вигляду:

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=const$$

Або після розділення на g:

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}=const$$

Рівняння Бернуллі у формі напорів для елементарної струминки ідеальної рідини (м)

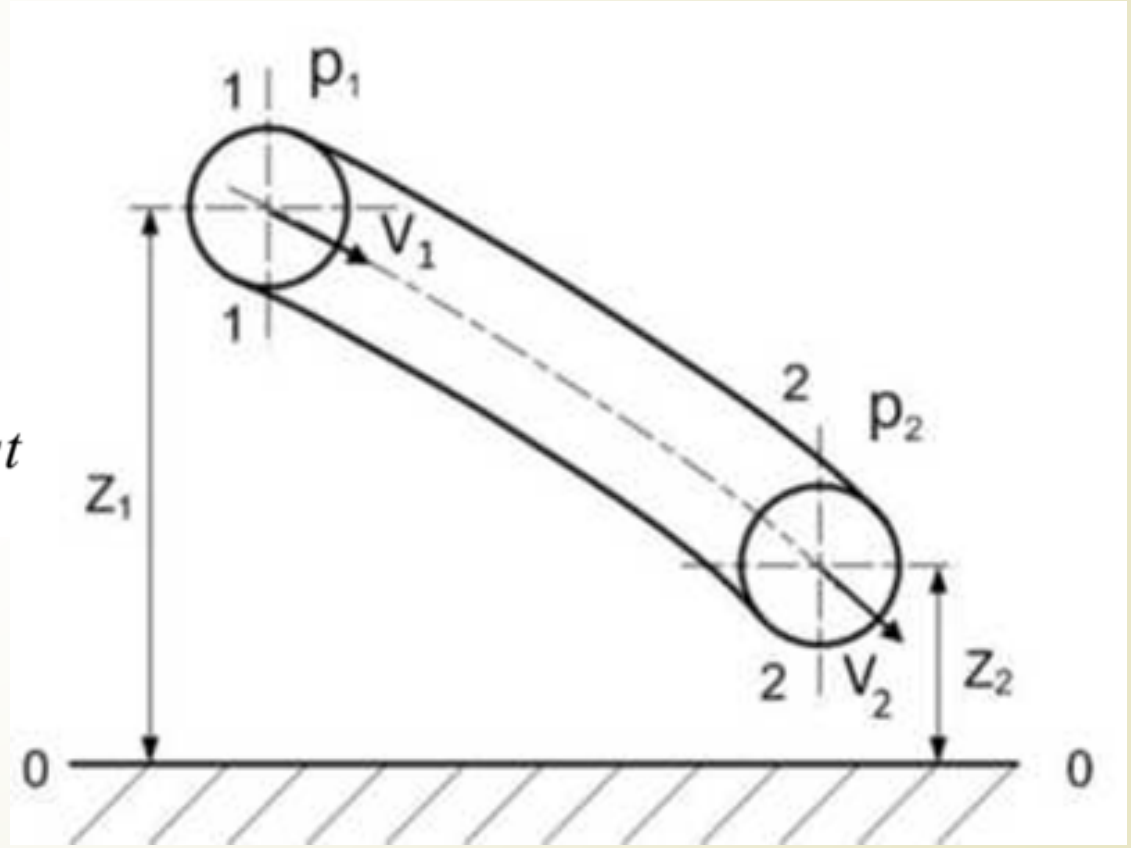


Рис. 5. Перерізи елементарної струминки ідеальної рідини

Напір - фізична величина, яка характеризує повну механічну енергію потоку рідини в певній точці, що вимірюється в метрах висоти водяного стовпа. Характеризується геометричною, п'єзометричною та швидкісною висотами.

Складові рівняння Бернуллі можуть бути роз'яснені з геометричної та енергетичної точок зору (рис. 6).

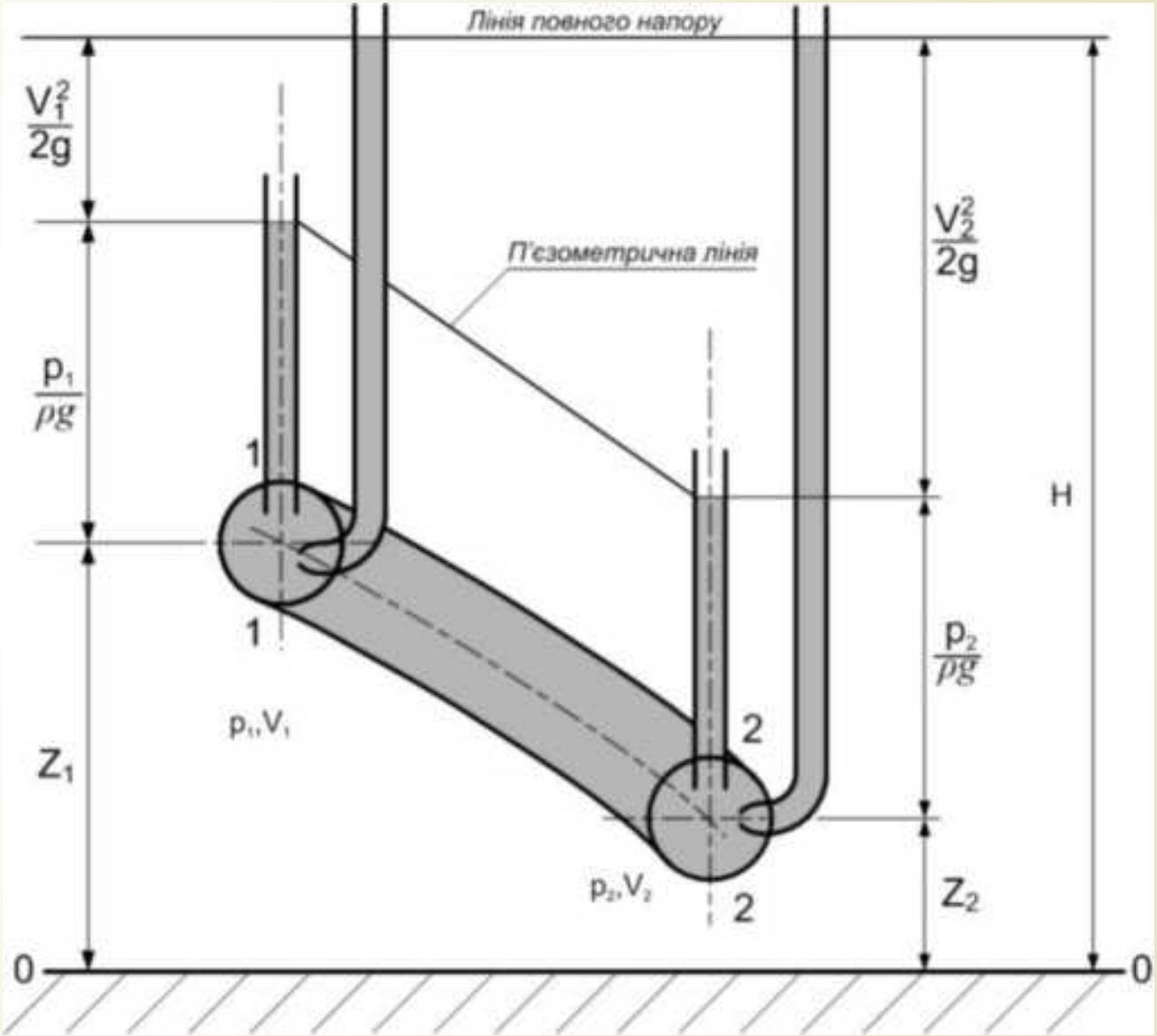


Рис. 6. Зміна п’єзометіричного і швидкісного напорів уздовж струминки ідеальної рідини

Вимірювальний прилад, який називається трубкою Піто (рис. 7) служить для вимірювання швидкості в точці рідини, в якій вона поміщена.

У трубці Піто рідина порівняно з п'єзометричною трубкою додатково піднімається на висоту $V^2/2g$ у зв'язку з тим, що частинки рідини, які набігають на трубку зі швидкістю V, створюють додатковий тиск на нерухому рідину.

Рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 матиме вигляд:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g},$$

де z – відстань від довільно вибраної горизонтальної площини до центра ваги кожного перерізу;

p – тиск у центрі ваги перерізу;

V – середня швидкість рідини в цьому перерізі.

Складові рівняння:

z - це геометрична висота або напір – питома енергія.

2. Величину p/ρg називають п'єзометричною висотою або напором.

3. Величина $V^2/2g$ – це швидкісний (динамічний) напір.

Усю суму напорів називають повним напором H.

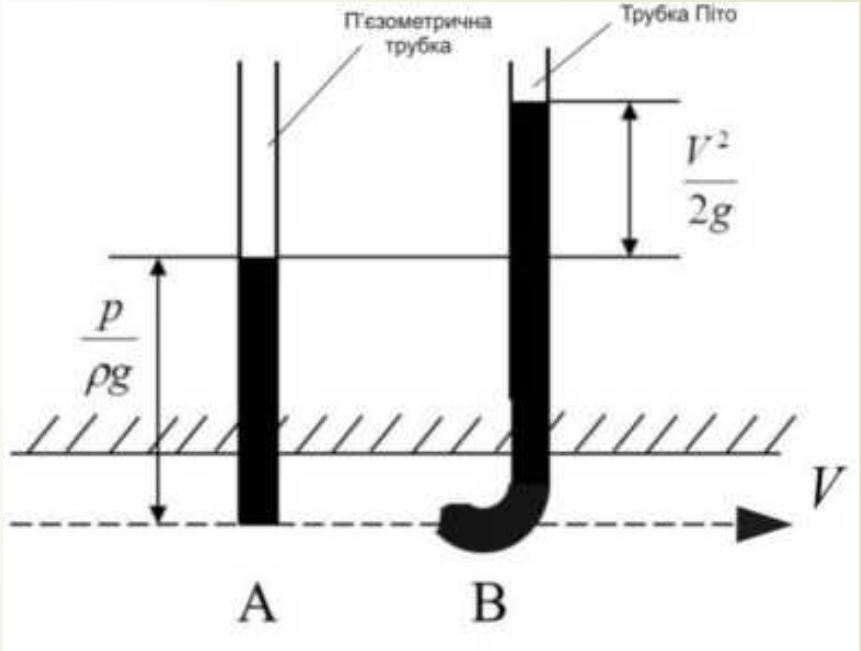


Рис. 7. Прилад для вимірювання швидкості в рідині

Енергетичний зміст рівняння Бернуллі:

З енергетичної точки зору сума трьох складових рівняння $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = const$

є **повною питомою енергією**, тобто енергією, віднесеною до одиниці ваги рідини.

Окремі складові рівняння:

1. ***z*** – (координата) питома потенціальна енергія (її величина залежить від положення центра ваги розглянутого перерізу над площиною порівняння);
2. ***p/ρg*** – питома потенціальна енергія тиску (її значення залежить від тиску p);
3. ***z + p/ρg*** – питома потенціальна енергія;
4. ***V²/2g*** – питома кінетична енергія.

Фізичний зміст рівняння Бернуллі:

Уздовж потоку рідини, в якій відсутні втрати енергії, повна питома енергія рідини залишається незмінною, тобто рівняння виражає закон збереження енергії елементарної струминки.

Рівняння Бернуллі для струминки і потоку в'язкої рідини. Коефіцієнт Коріоліса

Під час руху реальної в'язкої рідини (рис. 8) частина енергії потоку витрачається на подолання сил тертя між шарами рідини та між рідиною й стінками русла. Рух рідини часто супроводжується обертанням частинок, водночас утворюються вихори, окремі шари рідини перемішуються, що призводить до втрат енергії (напору).

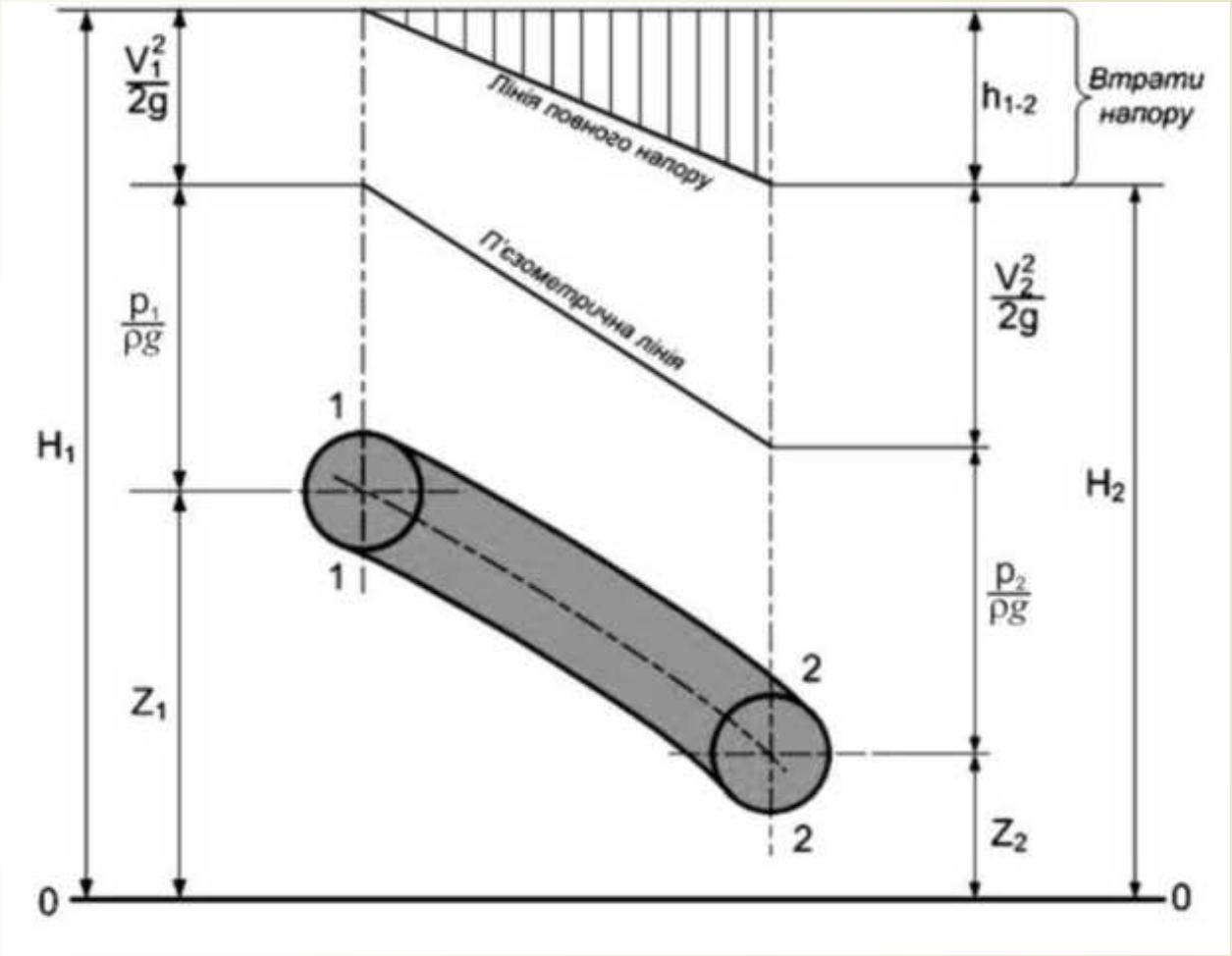


Рис. 3.8. Графічна ілюстрація рівняння Бернуллі для струминки в'язкої рідини

Для реальної рідини повний напір H_i у перерізі 1-1 не дорівнює повному напору H у перерізі 2-2: $H_1 \neq H_2$

Повні напори в кожному перерізі $H_1 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1,\ H_2 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$

Під час руху рідини в елементарній струминці від перерізу 1-1 до перерізу 2-2 відбуваються втрати питомої енергії (напору), що дорівнюють різниці повних напорів $\Delta H = h_{1\text{-}2}$:

$$h_{1-2} = H_1 - H_2$$

Тоді:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{1-2}$$

Це рівняння є **рівнянням Бернуллі для струминки в'язкої рідини.**

Потік рідини складається із сукупності елементарних струминок. Тому для одержання рівняння Бернуллі для потоку рідини необхідно скласти енергії всіх елементарних струминок по живому перерізу. Але в потоці в'язкої рідини величина швидкості в перерізі змінюється (рис. 9), і відбувається гальмування потоку внаслідок впливу в'язкості. Тому місцеві швидкості в будь-яких точках перерізу різні, а в розрахунках використовують значення середньої швидкості $V_{ср}$ течії потоку, що призводить до похибки.

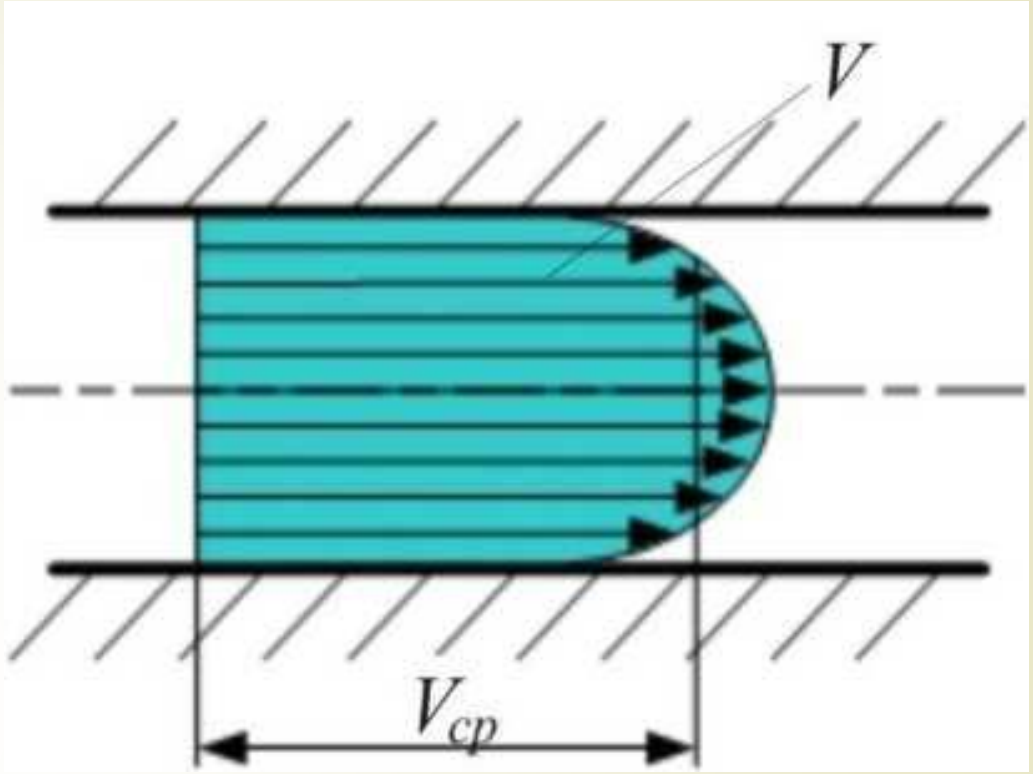


Рис. 9 Розподіл швидкості в перерізі труби

Похибку враховують коефіцієнтом нерівномірного розподілу швидкості по живому перерізу потоку α. Коефіцієнт α називають коефіцієнтом **кінетичної енергії або коефіцієнтом Коріоліса**: (відношення дійсної кінетичної енергії потоку до кінетичної енергії, обчисленої за середньою швидкістю).

$$\alpha = \frac{Kv}{Kv_{сер}}.$$

Тоді рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини має вигляд:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}$$

де a_1 і a_2 – коефіцієнти кінетичної енергії в перерізах;

$\sum h_{1-2}$ – сумарні втрати питомої енергії (напору).

Коефіцієнт а залежить від режиму руху рідини (а = 2 – для ламінарного, а = 1,05 – 1,1; а ≈ 1 – для турбулентного).

Ламінарний режим руху рідини – впорядкований рух рідини, за якого вона рухається паралельними шарами або струминками без перемішування та утворення вихорів.

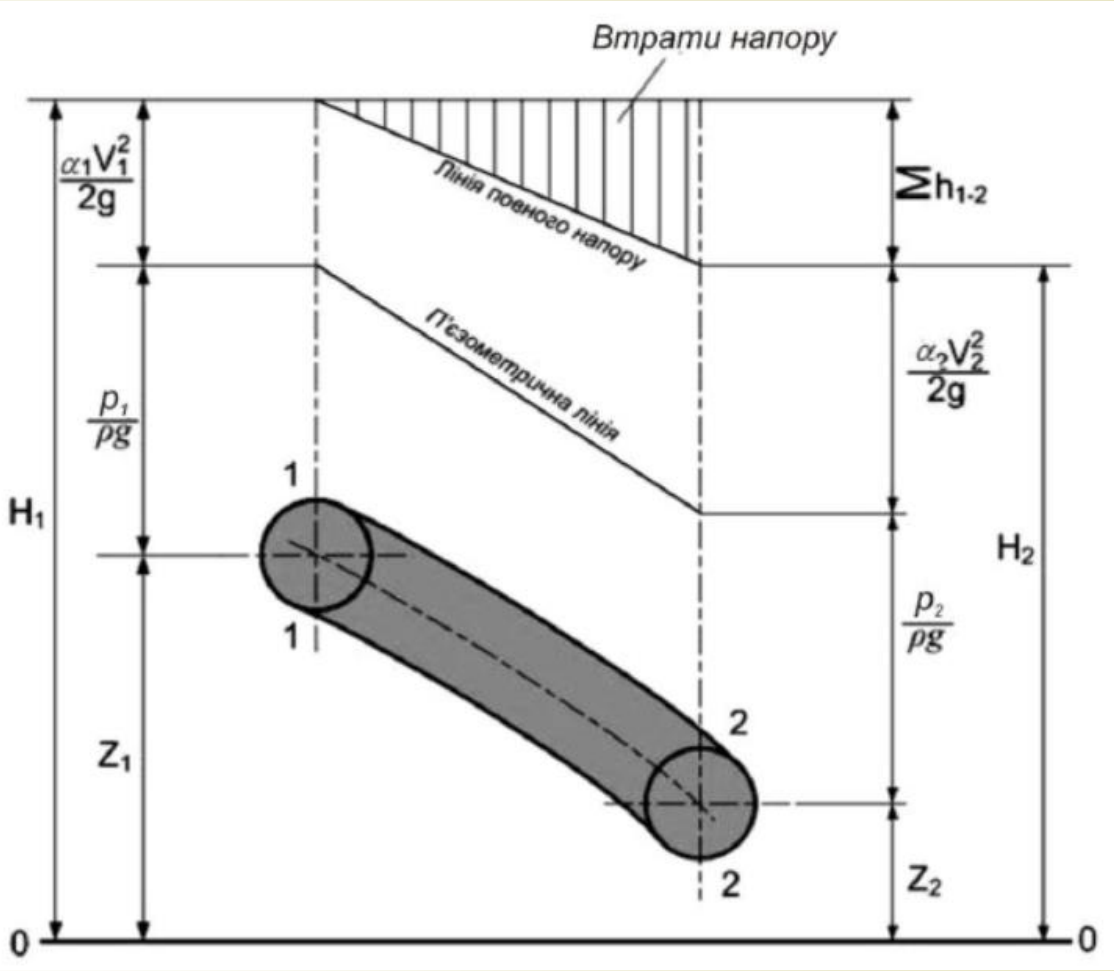


Рис. 10. Графічна ілюстрація рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини

Лінія, що з'єднує п'єзометричні напори, називається п'єзометричною, а та, що з'єднує повні напори, – лінією повного напору.