

ЛЕКЦІЯ 4

Булева алгебра, логічні функції та мінімізація

1. Булеві змінні та функції

Булева алгебра — математичний апарат для роботи зі змінними, які набувають лише двох значень: 0 і 1. Булева змінна може описувати логічну умову, стан входу або один біт даних. Булева функція ставить у відповідність кожному набору вхідних значень один вихід 0 або 1.

Якщо функція має n незалежних змінних, існує 2^n можливих наборів входів. Функцію можна задати формулою, таблицею істинності, переліком індексів наборів, логічною схемою або картою Карно. Усі ці форми описують ту саму залежність, якщо дають однаковий вихід для кожного набору.

2. Базові логічні операції

NOT (НЕ, заперечення) є унарною операцією, тобто має один операнд. У формулах заперечення позначається рискою над змінною: $\bar{A}$. AND (І, кон'юнкція), OR (АБО, диз'юнкція) та XOR (виключне АБО) є бінарними операціями над двома операндами.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$\bar{A}$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

2.1. Кон'юнкція AND

$A \wedge B$ дорівнює 1 лише тоді, коли $A=1$ і $B=1$. Кон'юнкція моделює одночасне виконання всіх умов. Наприклад, система запускається, якщо живлення ввімкнено AND дозвіл отримано.

2.2. Диз'юнкція OR

$A \vee B$ дорівнює 1, якщо хоча б один операнд дорівнює 1. Диз'юнкція моделює виконання однієї або кількох умов. Це включне АБО: для $A=1$ і $B=1$ результат також дорівнює 1.

2.3. Виключне АБО XOR

$A \oplus B$ дорівнює 1, коли два входи різні. Для однакових входів 00 або 11 результат 0. XOR використовується для порівняння бітів на нерівність, формування біта суми та контролю парності.

2.4. Заперечення NOT

$\bar{A}$ змінює логічне значення на протилежне: якщо $A=0$, то $\bar{A}=1$; якщо $A=1$, то $\bar{A}=0$. Риска стосується саме того символу або всього виразу, над яким вона розташована.

3. Пріоритет операцій і структура формули

Якщо дужки не задають інший порядок, спочатку виконується NOT, потім AND, далі XOR, а після нього OR. Дужки мають найвищий пріоритет і роблять структуру однозначною. Під час ручного обчислення доцільно виділяти кожний підвираз в окремий проміжний стовпець.

Докладний приклад: обчислення $F=(A \vee B) \wedge \bar{C}$

A	B	C	$A \vee B$	$\bar{C}$	F
---	---	---	------------	-----------	---

A	B	C	$A \vee B$	$\overline{C}$	F
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Для набору $A=0, B=1, C=0$ спочатку $A \vee B=1$, потім $\overline{C}=1$, тому $F=1 \wedge 1=1$. Для $A=1, B=0, C=1$ маємо $A \vee B=1$, $\overline{C}=0$, тому $F=0$. Проміжні стовпці показують, на якому саме кроці отримано кожне значення.

4. Таблиця істинності

Таблиця істинності містить усі можливі набори входів і відповідний вихід функції. Для трьох змінних використовують $2^3=8$ рядків. Якщо A вважається старшим бітом, порядок наборів 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 одночасно задає індекси 0...7.

Індекс	A	B	C	Двійковий набір ABC
0	0	0	0	000
1	0	0	1	001
2	0	1	0	010
3	0	1	1	011
4	1	0	0	100
5	1	0	1	101
6	1	1	0	110
7	1	1	1	111

Алгоритм побудови: зафіксувати порядок змінних; обчислити 2^n ; записати всі набори; створити проміжні стовпці відповідно до дужок і пріоритету; обчислити вихід; перевірити, що жодний набір не пропущено й не повторено.

5. Основні закони булевої алгебри

Назва	Для OR	Для AND	Зміст
Тотожність	$A \vee 0 = A$	$A \wedge 1 = A$	Нейтральний елемент не змінює A.
Домінування	$A \vee 1 = 1$	$A \wedge 0 = 0$	Домінувальний елемент визначає результат.
Ідемпотентність	$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$	Повторення змінної не впливає.
Доповнення	$A \vee \bar{A} = 1$	$A \wedge \bar{A} = 0$	Змінна й заперечення взаємодоповнюють одне одного.
Комутативність	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$	Операнди можна переставляти.
Асоціативність	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	Групування однакових операцій можна змінювати.
Поглинання	$A \vee (A \wedge B) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$	Додатковий терм не змінює результат.

Подвійне заперечення повертає початкове значення: заперечення $\bar{\bar{A}}$ дорівнює A. Дистрибутивність має дві форми: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ та $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Друга форма відрізняє булеву алгебру від звичайної арифметики.

5.1. Закони де Моргана

Закони де Моргана перетворюють заперечення складеного виразу: під час перенесення ризи всередину дужок AND замінюється на OR, OR — на AND, а кожний операнд заперечується.

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Риска в лівій частині кожної формули охоплює весь складений вираз. Наприклад, заперечення умови «A або B» істинне лише тоді, коли не виконується A і водночас не виконується B.

6. Алгебраїчне спрощення функцій

Докладний приклад 1: закон поглинання

$F = A \vee (A \wedge B)$. Якщо $A=1$, уся функція дорівнює 1 незалежно від B. Якщо $A=0$, то $A \wedge B=0$, і функція дорівнює 0. Отже, $F=A$. Це безпосередньо відповідає закону поглинання.

Докладний приклад 2: винесення спільного множника

1. Початковий вираз: $F = (A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$.
2. Виносимо A за дистрибутивним законом: $F = A \wedge (B \vee \bar{B})$.
3. За законом доповнення $B \vee \bar{B} = 1$.
4. За законом тотожності $A \wedge 1 = A$.
5. Отже, $F = A$.

Докладний приклад 3: закон де Моргана

Розглянемо заперечення виразу $A \vee \bar{B}$. Переносимо риску всередину дужок: операція OR переходить в AND, A стає $\bar{A}$, а заперечення $\bar{B}$ стає подвійним. Подвійне заперечення дорівнює B, тому результат $\bar{A} \wedge B$.

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

Алгебраїчне спрощення є правильним лише тоді, коли початковий і кінцевий вирази еквівалентні на всіх наборах входів. Кожний крок повинен спиратися на конкретний закон.

7. ДНФ, КНФ та літерали

Літерал — булева змінна або її заперечення, наприклад A, $\bar{B}$, C. Елементарна кон'юнкція — AND кількох літералів. Елементарна диз'юнкція — OR кількох літералів.

ДНФ (диз'юнктивна нормальна форма; DNF — Disjunctive Normal Form) є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій, наприклад $(A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge C)$. КНФ (кон'юнктивна нормальна форма; CNF — Conjunctive Normal Form) є кон'юнкцією елементарних диз'юнкцій, наприклад $(A \vee B) \wedge (\bar{B} \vee C)$. Звичайна ДНФ або КНФ не зобов'язана містити всі змінні в кожному термі.

8. Мінтерми, макстерми, ДДНФ і ДКНФ

Мінтерм — кон'юнкція, яка містить кожен змінну рівно один раз і дорівнює 1 лише на одному наборі. Для утворення мінтерма за рядком таблиці змінну зі значенням 1 записують прямо, а зі значенням 0 — із запереченням.

Макстерм — диз'юнкція, яка містить кожен змінну рівно один раз і дорівнює 0 лише на одному наборі. Для макстерма правило знаків протилежне: біт 0 дає пряму змінну, біт 1 — заперечену.

Набір ABC	Індекс	Мінтерм m_i	Макстерм M_i
000	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$A \vee B \vee C$
001	1	$\bar{A}\bar{B}C$	$A \vee B \vee \bar{C}$
010	2	$\bar{A}B\bar{C}$	$A \vee \bar{B} \vee C$
011	3	$\bar{A}BC$	$A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$
100	4	$A\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A} \vee B \vee C$
101	5	$A\bar{B}C$	$\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$
110	6	$AB\bar{C}$	$\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$
111	7	ABC	$\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

ДДНФ (досконала диз'юнктивна нормальна форма; PDNF — Perfect Disjunctive Normal Form) є OR усіх мінтермів, для яких $F=1$. Скорочено перелік записують як $\sum m(\dots)$. ДКНФ (досконала кон'юнктивна нормальна форма; PCNF — Perfect Conjunctive Normal Form) є AND усіх макстермів, для яких $F=0$, і скорочено записується $\prod M(\dots)$.

Докладний приклад: побудова ДДНФ і ДКНФ

Нехай $F=1$ для індексів 1, 2, 5, 7 і $F=0$ для індексів 0, 3, 4, 6. Для кожного одиничного рядка утворюємо мінтерм, а для кожного нульового — макстерм.

$$\text{ДДНФ: } F = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \vee (\bar{A}B\bar{C}) \vee (A\bar{B}\bar{C}) \vee (A\bar{B}C) = \sum m(1, 2, 5, 7).$$

$$\text{ДКНФ: } F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) = \prod M(0, 3, 4, 6).$$

Перевірка для набору 010: відповідний мінтерм $\bar{A}B\bar{C}$ дорівнює 1, а всі інші мінтерми — 0. Відповідний макстерм $A \vee \bar{B} \vee C$ дорівнює 0 саме на цьому наборі.

9. Принцип карти Карно

Карта Карно (Karnaugh map) — табличне розміщення значень функції, у якому сусідні клітинки відрізняються значенням лише однієї змінної. Це досягається кодом Грея (Gray code): послідовністю 00, 01, 11, 10, де кожна сусідня пара відрізняється одним бітом.

Для мінімальної ДНФ у групі об'єднують клітинки з 1. Розмір прямокутної групи повинен бути степенем двійки: 1, 2, 4, 8 або 16. Групу намагаються зробити якомога більшою, оскільки кожне подвоєння вилучає одну змінну. Кожна одиниця має бути покрита хоча б однією групою; перекриття дозволено. Діагональні клітинки не є сусідніми.

Карта має циклічне сусідство: крайні лівий і правий стовпці є сусідніми, як і верхній та нижній рядки. Під час утворення терма залишають лише змінні, що мають незмінне значення в усій групі. Стала 1 дає пряму змінну, стала 0 — заперечену.

10. Карта Карно для двох і трьох змінних

Докладний приклад для двох змінних: $F = \sum m(2, 3)$

A / B	0	1
0	0	0
1	1	1

Клітинки $m_2=10$ і $m_3=11$ утворюють пару. У них A завжди дорівнює 1, а B змінюється від 0 до 1, тому B вилучається. Мінімальний вираз: $F=A$.

Докладний приклад для трьох змінних: $F = \sum m(1, 3, 5, 7)$

A / BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

Чотири одиниці утворюють групу з клітинок m_1, m_3, m_5, m_7 . У цій групі A змінюється, B змінюється, а C завжди дорівнює 1. Тому A і B вилучаються, а мінімальний вираз дорівнює $F=C$.

11. Карта Карно для чотирьох змінних

Для чотирьох змінних карта має 4×4 клітинки. Рядки AB і стовпці CD впорядковано кодом Грея 00, 01, 11, 10. Кожна клітинка відповідає одному мінтерму, індекс якого визначається двійковим набором ABCD.

AB / CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Повний приклад мінімізації чотирьох змінних

Нехай $F(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,5,7,8,10,13,15)$. Після нанесення одиниць отримуємо дві групи по чотири клітинки.

1. Група $\{m_0, m_2, m_8, m_{10}\}$. У цих клітинках A і C змінюються, B=0 та D=0 залишаються сталими. Терм групи: $\overline{B}\overline{A}\overline{D}$.
2. Група $\{m_5, m_7, m_{13}, m_{15}\}$. У цих клітинках A і C змінюються, B=1 та D=1 стали. Терм групи: BAD .
3. Мінімальна ДНФ: $F=(\overline{B}\overline{A}\overline{D})\vee(BAD)$.
4. Змінні A і C вилучені, оскільки не впливають на результат у вибраних групах.

B	D	$\overline{B}\overline{A}\overline{D}$	BAD	F
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Перевірка показує: $F=1$, коли B і D однакові — 00 або 11. Для 01 та 10 функція дорівнює 0. Кожна з цих чотирьох пар B,D повторюється для всіх комбінацій A,C, тому отримуємо рівно задані вісім мінтермів.

12. Стани «байдуже»

Стан «байдуже» (don't care condition) позначають X і використовують для вхідних наборів, які фізично не виникають або для яких вихід не має значення. Під час мінімізації X можна розглядати як 1, якщо це збільшує групу, або як 0, якщо він не допомагає. X не потрібно обов'язково включати до групи.

Використання стану X є допустимим лише за наявності зовнішньої умови, що робить відповідний набір неважливим. Не можна самостійно замінювати звичайний визначений вихід на X заради спрощення.

13. Перевірка еквівалентності

Два булеві вирази еквівалентні, якщо їхні значення збігаються для всіх 2^n наборів входів. Перевірку виконують повною таблицею істинності, порівнянням множин мінтермів або послідовним алгебраїчним перетворенням за відомими законами. Перевірка лише кількох зручних рядків не доводить еквівалентності.

Для $F=(\overline{B}\overline{A}\overline{D})\vee(BAD)$ достатньо спочатку перевірити чотири комбінації B,D, оскільки A і C у спрощеному виразі відсутні. Після цього потрібно переконатися, що кожний результат повторюється для всіх чотирьох комбінацій A,C. Таким чином охоплюються всі 16 наборів чотирьох змінних.

14. Терміни та скорочення

Термін	Пояснення
AND / $\wedge$	І, кон'юнкція.
OR / $\vee$	АБО, диз'юнкція.
XOR / $\oplus$	Exclusive OR — виключне АБО.
NOT	НЕ, заперечення; позначається надрисковою рисою.
ДНФ / DNF	Диз'юнктивна нормальна форма / Disjunctive Normal Form.
КНФ / CNF	Кон'юнктивна нормальна форма / Conjunctive Normal Form.
ДДНФ / PDNF	Досконала диз'юнктивна нормальна форма / Perfect Disjunctive Normal Form.
ДКНФ / PCNF	Досконала кон'юнктивна нормальна форма / Perfect Conjunctive Normal Form.
Мінтерм	Кон'юнкція всіх змінних, істинна на одному наборі.
Макстерм	Диз'юнкція всіх змінних, хибна на одному наборі.
Код Грея	Порядок кодів, у якому сусідні комбінації відрізняються одним бітом.