2. Визначення числових значень показників надійності привідних клинових пасів

2.1. Короткі теоретичні відомості

Клинові паси – це вироби, що не ремонтуються, основними показниками їх надійності є: диференціальна $f(t)$ і інтегральна $F(t)$ функції розподілу напрацювання до першої відмови; ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$, середнє напрацювання до першої відмови T_1, інтенсивність відмов $\lambda(t)$.

Числові значення показників надійності визначають за результатами випробувань N однотипних виробів в заданих умовах, де фіксується напрацювання окремих виробів до першої відмови в годинах роботи під навантаженням. Результати випробувань подають у вигляді інтегрального статистичного ряду розподілу напрацювання виробів до першої відмови.

2.2. Завдання

Визначити числові значення показників надійності привідних клинових пасів за даними випробувань 40 взірців при відомих значеннях частот m_i відмов клинових пасів у i-х частотних інтервалах напрацювання до першої відмови, а також числових значеннях меж частотних інтервалів напрацювання до першої відмови T_1.

Вихідні дані для розрахунків вибирають наступним чином: за передостанньою цифрою індивідуального номера залікової книжки вибирають значення частот m_i відмов клинових пасів у i-х частотних інтервалах напрацювання до першої відмови (табл. 2.1), а за останньою – числові значення меж частотних інтервалів напрацювання до першої відмови T_1 (табл. 2.2).

Таблиця 2.1 – Значення частот m_i відмов привідних клинових пасів у i-х частотних інтервалах напрацювання до першої відмови

Передостання цифра номера залікової книжки	Номери частотних інтервалів					
	1	2	3	4	5	6
0	2	3	13	16	4	2
1	1	3	13	17	4	2
2	2	4	12	18	3	1
3	2	4	12	17	4	1
4	1	3	17	14	4	1
5	2	3	13	17	4	1
6	2	3	13	17	3	2
7	1	4	11	18	4	2
8	1	4	14	17	3	1
9	1	3	14	17	4	1

Таблиця 2.2 – Числові значення меж частотних інтервалів напрацювання T_1 привідних клинових пасів до першої відмови

Остання цифра номера залікової книжки	Номери частотних інтервалів					
	1	2	3	4	5	6
0	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
1	0-60	60-120	120-180	180-240	240-300	300-360
2	0-70	70-140	140-210	210-280	280-350	350-420
3	0-80	80-160	160-240	240-320	320-400	400-480
4	0-90	90-180	180-270	270-360	360-450	450-540
5	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600
6	0-110	110-220	220-330	330-440	440-550	550-660
7	0-120	120-240	240-360	360-480	480-600	600-720
8	0-130	130-260	260-390	390-520	520-650	650-780
9	0-140	140-280	280-420	420-560	560-700	700-840

2.3. Приклад виконання завдання

Визначимо числові значення показників надійності привідних клинових пасів за даними випробувань $N = 40$ взірців.

Спочатку визначаємо інтервальний статистичний ряд емпіричного розподілу напрацювання для умов завдання і, відповідно до свого варіанту завдання, заповнюємо перших три рядки в табл. 2.3.

Після цього визначаємо частості m_i/N і накопичених частостей $\sum m_i/N$ для кожного *i*-го інтервалу, де N – кількість пасів, що випробувано, тобто $N = 40$.

Сума частот $\sum m_i$ всіх інтервалів повинна дорівнювати N, а сума накопичених частостей $\sum m_i/N = 1$.

Таблиця 2.3 – Інтервальний статистичний ряд емпіричного розподілу напрацювання клинових пасів до відмови

Показник	Значення показника					
Межі частотних інтервалів, год	0...150	150...300	300...450	450...600	600...750	750...900
Середини інтервалів T_{ci}, год	75	225	375	525	675	825
Частоти m_i	1	4	14	17	3	1
Частості m_i/N	0,025	0,100	0,350	0,425	0,075	0,025
Накопичені частості $\sum m_i/N$	0,025	0,125	0,475	0,900	0,975	1,000

Дані табл. 2.3 використовуємо для побудови графіків, що характеризують емпіричний розподіл випадкової величини, гістограми і полігону.

При побудові гістограми на горизонтальній осі графіка відкладають значення, що відповідають межам частотних інтервалів, а на вертикальній – частоти або частості відповідних інтервалів. Після цього будують прямокутники, основи яких лежать на горизонтальній осі координат і дорівнюють величині частотних інтервалів, а висоти дорівнюють частотам або частостям відповідних інтервалів. В результаті отримуємо ступінчастий багатокутник, або гістограму.

Після цього, з’єднуємо прямими лініями середини верхніх горизонтальних сторін прямокутників гістограми і одержуємо полігон розподілу у вигляді ламаної лінії (рис. 2.1).

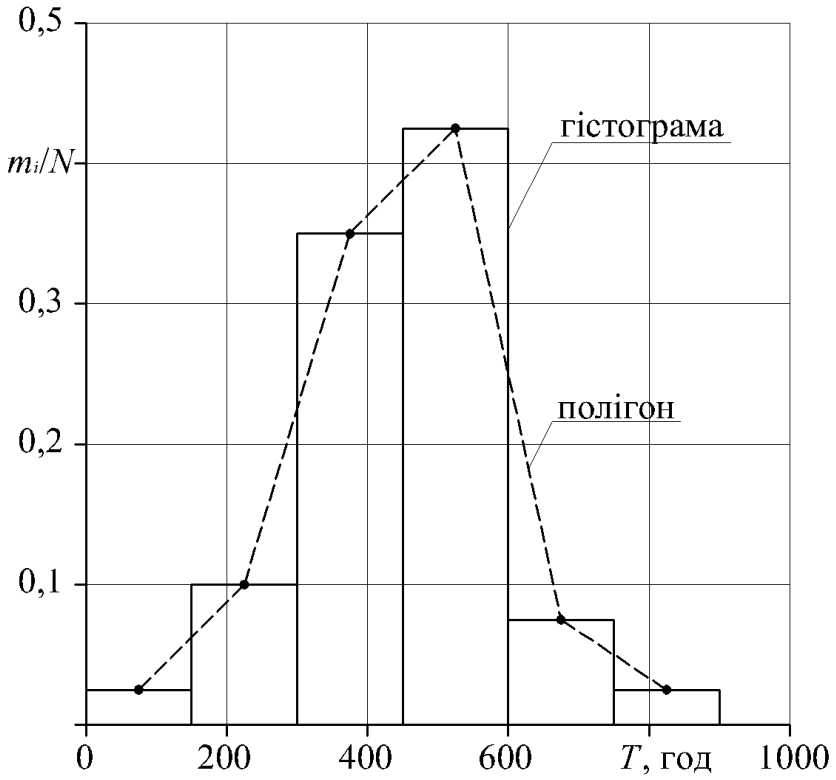


Рисунок 2.1 – Гістограма і полігон емпіричного розподілу напрацювання привідних клинових пасів до першої відмови

Аналізуючи одержані гістограму і полігон можна зробити висновок, що найбільш ймовірне напрацювання клинових пасів до першої відмови знаходиться в інтервалі від 300 до 600 год.

Числові значення статистичних характеристик розподілу випадкової величини, таких як середнє арифметичне значення $\overline{T}_1$, середнє квадратичне відхилення S і коефіцієнт варіації v визначають за такими залежностями:

$$\overline{T}_1 = \frac{\sum T_{ci} m_i}{N}; \tag{2.1}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum \left(T_{ci} - \overline{T}_1\right)^2 \cdot m_i}{N}}; \tag{2.2}$$

$$v = \frac{S}{\overline{T}_1}. \tag{2.3}$$

Для отримання значень $\overline{T}_1$ і S можна також скористатися більш простим методом сум. Для цього складають таблицю 2.4, у два перших стовпчика якої вносять значення другого і третього рядка табл. 2.3. В третьому стовпчику табл. 2.4 роблять прочерк навпроти найбільшого значення частоти m_i (для нашого прикладу – це 17), а в четвертому стовпчику – три прочерки: напроти прочерку у третьому стовпчику, а також зверху і знизу від нього.

Після цього в третьому стовпчику виконують послідовне додавання наростаючим підсумком значень m_i починаючи від першого до прочерку і від останнього до прочерку. Одержані значення сумують.

Таблиця 2.4 – Вихідні дані для визначення значень $\overline{T}_1$ і S методом сум

T_{ci}, год	m_i	Допоміжні коефіцієнти	
		$K_1 = 25$	$K_2 = 7$
75	1	1	1
225	4	5	6
375	14	19	-
525	17	-	-
675	3	4	-
825	1	1	1
	$N = 40$	$Л_1 = 5$	$Л_2 = 1$

В результаті складання верхньої частини значень в третьому стовпчику одержуємо значення коефіцієнта $K_1 = 1 + 5 + 19 = 25$, а в результаті складання нижньої частини значень в третьому стовпчику – значення коефіцієнта $Л_1 = 1 + 4 = 5$.

Значення коефіцієнтів K_2 і $Л_2$ одержують, користуючись тими самими правилами. Вихідними даними, при цьому є значення четвертого стовпчика.

Після цього підраховують допоміжні коефіцієнти M_1 і M_2, та визначають середнє арифметичне значення напрацювання клинових пасів до першої відмови T_1 і середнє квадратичне відхилення S за формулами:

$$M_1 = K_1 - Л_1; \tag{2.4}$$

$$M_2 = K_1 + Л_1 + 2K_2 + 2Л_2; \tag{2.5}$$

$$\overline{T}_1 = T_{c\max} - \frac{A \cdot M_1}{N}; \tag{2.6}$$

$$S = A \cdot \sqrt{\frac{M_2 - \frac{M_1^2}{N}}{N}}, \tag{2.7}$$

де $T_{c\max}$ – значення середини частотного інтервалу з максимальним числом відмов,

A – значення напрацювання в межах частотного інтервалу (в нашому випадку – це 150 год.)

Підставивши відповідні значення одержимо:

$$M_1 = 25 - 5 = 20;$$

$$M_2 = 25 + 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 46;$$

$$\overline{T}_1 = 525 - \frac{150 \cdot 20}{40} = 450 \text{ год};$$

$$S = 150 \cdot \sqrt{\frac{46 - \frac{400}{40}}{40}} = 142{,}3 \text{ год.}$$

Коефіцієнт варіації дорівнює

$$v = \frac{142}{450} = 0{,}316.$$

Коефіцієнт варіації використовують не лише у якості відносної характеристики ступеня розсіювання випадкової величини відносно середнього значення, але і для орієнтовного вибору теоретичного закону розподілу (ТЗР) випадкової величини. При $v \le 0{,}33$ вибирають нормальний закон розподілу, а при $v > 0{,}33$ – закон розподілу Вейбула.

Оскільки в нашому прикладі значення $v < 0{,}33$ для подальших розрахунків приймаємо нормальний закон розподілу напрацювання клинових пасів, до першої відмови, цей орієнтовний висновок в подальшому буде перевірено з застосуванням критерію узгодженості λ (А. Н. Колмогорова).

Статистичні оцінки ймовірності безвідмовної роботи $\overline{P}(t)_i$ та інтенсивності відмов $\overline{\lambda}(t)_i$ клинових пасів для *i*-х частотних інтервалів визначають за наступними залежностями:

$$\overline{P}(t)_i = \frac{N - \sum m_i}{N}; \tag{2.8}$$

$$\overline{\lambda}(t)_i = \frac{m_i}{\Delta t \cdot N(t)_i}, \tag{2.9}$$

де N – кількість виробів на початку випробувань;

$\sum m_i$ – кількість виробів, що відмовили до кінця *i*-го інтервалу;

Δt – значення напрацювання в частотному інтервалі (в нашому випадку Δt=150)

$N(t)_i$ – кількість працездатних виробів на початок *i*-го частотного інтервалу.

Вихідні дані для розрахунків, а також їх результати зводимо в табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Визначення статистичних оцінок $\overline{P}(t)_i$ і $\overline{\lambda}(t)_i$

Показники	Значення показників					
	0...150	150...300	300...450	450...600	600...750	750...900
Число відмов в інтервалі, m_i	1	4	14	17	3	1
Число виробів, що відмовили до кінця інтервалу, $\sum m_i$	1	5	19	36	39	40
Число працездатних виробів на початок інтервалу, $N(t)_i$	40	39	35	21	4	1
Статистична оцінка $\overline{P}(t)_i$	0,975	0,875	0,525	0,100	0,025	0
Статистична оцінка $\overline{\lambda}(t)_i$	0,0002	0,0007	0,0027	0,0054	0,0050	0,0067

Графіки (рис. 2.2) зміни дослідної ймовірності безвідмовної роботи $\overline{P}(t)_i$ та емпіричної інтегральної функції $F_e = \dfrac{\sum m_i}{N}$ будуємо з використанням відповідних значень з таблиць 2.3 і 2.5.

Інтегральна функція розподілу може бути задана аналітично, або представлена у вигляді графіка.

Значення теоретичної інтегральної функції $F(t)$ для нормального розподілу з відомими параметрами $\overline{X}$ та S визначають за табличним інтегралом $\Phi(t)$, який безпосередньо вказує на ймовірність того, що значення випадкової величини знаходяться в межах від 0 до t. Значення функції $F(t)$ в кінці i-го інтервалу приймають рівними значенням інтегралу $\Phi(x)$ (табл. 2.6).

Для нашого прикладу

$$X_i = \frac{T_{вi} - \overline{T}_1}{S}, \tag{2.10}$$

де $T_{вi}$ – верхня межа i-го інтервалу значень напрацювання клинових пасів до першої відмови. Для першого інтервалу $T_{вi}$ – 150.

$$X_i = \frac{150 - 450}{142,3} = -2,11.$$

Скориставшись табл. 2.6, методом інтерполяції визначаємо

$$\Phi(-2,11) = 0,0175 \approx 0,018.$$

Отже значення теоретичної інтегральної функції в кінці першого інтервалу дорівнює 0,018. Аналогічно визначаються значення $F(t)$ для інших інтервалів. Дані вносять в табл. 2.7, а знайдені значення використовують для побудови рисунка 2.2, отримуючи графік теоретичної інтегральної функції розподілу $F(t)$.

Таблиця 2.6 – Значення табличного інтегралу $\Phi(x_i)$ $\Phi\left(x_i\right)$ нормальної функції розподілу ймовірностей

x_i	$\Phi(x_i)$	x_i	$\Phi(x_i)$	x_i	$\Phi(x_i)$	x_i	$\Phi(x_i)$
0,0	0,5000	2,0	0,9772	-3,9	0,0001	-1,9	0,0287
0,1	0,5398	2,1	0,9821	-3,8	0,0001	-1,8	0,0359
0,2	0,5793	2,2	0,9861	-3,7	0,0001	-1,7	0,0446
0,3	0,6179	2,3	0,9893	-3,6	0,0002	-1,6	0,0548
0,4	0,6554	2,4	0,9918	-3,5	0,0002	-1,5	0,0668
0,5	0,6915	2,5	0,9938	-3,4	0,0003	-1,4	0,0808
0,6	0,7257	2,6	0,9953	-3,3	0,0005	-1,3	0,0968
0,7	0,7580	2,7	0,9965	-3,2	0,0007	-1,2	0,1151
0,8	0,7881	2,8	0,9974	-3,1	0,0010	-1,1	0,1357
0,9	0,8159	2,9	0,9981	-3,0	0,0013	-1,0	0,1587
1,0	0,8413	3,0	0,9987	-2,9	0,0019	-0,9	0,1841
1,1	0,8643	3,1	0,9990	-2,8	0,0026	-0,8	0,2119
1,2	0,8849	3,2	0,9993	-2,7	0,0035	-0,7	0,2420
1,3	0,9032	3,3	0,9995	-2,6	0,0047	-0,6	0,2743
1,4	0,9192	3,4	0,9997	-2,5	0,0062	-0,5	0,3085
1,5	0,9332	3,5	0,9998	-2,4	0,0082	-0,4	0,3446
1,6	0,9452	3,6	0,9998	-2,3	0,0107	-0,3	0,3821
1,7	0,9554	3,7	0,9999	-2,2	0,0139	-0,2	0,4207
1,8	0,9641	3,8	0,9999	-2,1	0,0179	-0,1	0,4602
1,9	0,9713	3,9	0,9999	-2,0	0,0228	-0,0	0,5000

Таблиця 2.7 – Дані для перевірки відповідності емпіричного і теоретичного розподілу за критерієм λ

Показники	Значення показників					
	0...150	150...300	300...450	450...600	600...750	750...900
Верхня межа інтервалу $T_{вi}$, год	150	300	450	600	750	9001
X_i	– 2,11	– 1,05	0	1,05	2,11	3,16
$F\left(t\right)_i = \Phi\left(X_i\right)$	0,018	0,147	0,500	0,853	0,982	0,999
$F_e\left(t\right)_i$	0,025	0,125	0,475	0,900	0,975	1,000
$D = \left\|F_e\left(t\right)_i - F\left(t\right)_i\right\|$	0,007	0,022	0,025	0,047	0,007	0,001

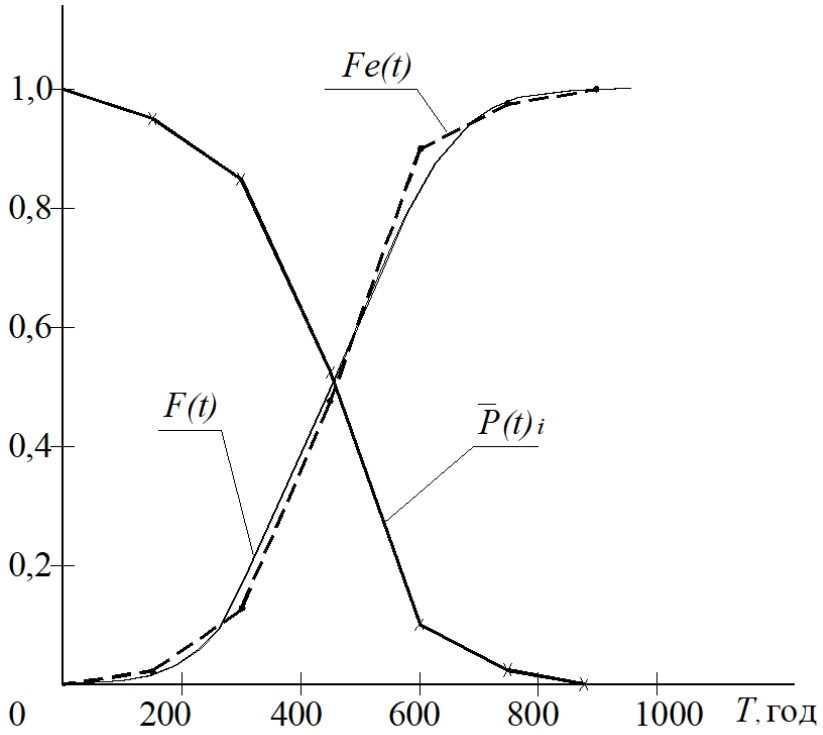


Рисунок 2.2 – Емпірична $F_e(t)$ і теоретична $F(t)$ інтегральні функції розподілу напрацювання клинових пасів до відмови та ймовірність $\overline{P}(t)_i$ їх безвідмовної роботи за даними випробувань на надійність

Перевірку відповідності між вибраним теоретичним законом розподілу і емпіричним розподілом можна провести за допомогою одного з критеріїв відповідності, що підтверджує або спростовує статистичну гіпотезу про вид вибраного теоретичного закону розподілу з прийнятим рівнем значущості α. Зазвичай в технічних розрахунках приймають $\alpha = 0{,}10$. тобто допускають в десяти випадках зі 100 можливість помилки першого роду, що пов'язана з ризиком відкинути правильну статистичну гіпотезу.

В даній роботі рекомендується проводити перевірку відповідності емпіричного і теоретичного розподілу за критеріями відповідності λ (А. Н. Колмогорова). Для цього за табл. 2.7 визначають максимальне абсолютне значення різниці $D_{\max}$ між емпіричною і теоретичною інтегральними функціями розподілу для окремих i-х інтервалів, тобто

$$D_{\max} = \left|F_e(t)_i - F(t)_i\right|. \qquad (2.11)$$

Для нашого випадку $D_{\max} = 0{,}047$. Тоді розрахункове значення критерію відповідності

$$\lambda = D_{\max}\sqrt{N}; \tag{2.12}$$

$$\lambda = 0,047\sqrt{40} = 0,297.$$

Для $\lambda = 0,297$ за табл. 2.8 знаходимо значення $P(\lambda)$, яке дорівнює 1,0. Оскільки значення $P(\lambda)$ більше за прийнятий рівень значущості $\alpha = 0,10$, то попередньо прийнята гіпотеза щодо можливості застосування закону нормального розподілу до емпіричного розподілу напрацювання клинових пасів до першої відмови не відхиляється.

Таблиця 2.8 – Значення критерію відповідності Колмогорова λ

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,00	1,000	0,60	0,8643	1,40	0,0397
0,05	1,000	0,65	0,7920	1,50	0,0222
0,10	1,000	0,70	0,7112	1,60	0,0122
0,15	1,000	0,75	0,6272	1,70	0,0062
0,20	1,000	0,80	0,5441	1,80	0,0032
0,25	1,000	0,85	0,4653	1,90	0,0015
0,30	1,000	0,90	0,3927	2,00	0,0007
0,35	0,9997	0,95	0,3275	2,10	0,0003
0,40	0,9972	1,00	0,2700	2,20	0,0001
0,45	0,9874	1,10	0,1777	2,30	0,0001
0,50	0,9639	1,20	0,1122	2,40	0,0000
0,55	0,9228	1,30	0,0681	2,50	0,0000

У випадку (коли $P(\lambda) < \alpha$) розрахунки необхідно проводити для іншого закону розподілу.

Інтегральна оцінка середнього напрацювання клинових пасів до першої відмови на відміну від точкової оцінки (шляхом підрахунку середнього арифметичного значення) дозволяє отримати результат з наперед заданою достовірністю γ, яку в практичних розрахунках приймають рівною 0,8 або 0,9. Нижню $m_{н1}$ і верхню $m_{в1}$ границі довірчого інтервалу для середнього напрацювання $\overline{T}_1$ визначають за формулами:

$$m_{н1} = \overline{T}_1 - \frac{t_\gamma(v)}{\sqrt{N}} \cdot S; \tag{2.13}$$

$$m_{в1} = \overline{T}_1 + \frac{t_\gamma(\nu)}{\sqrt{N}} \cdot S, \qquad (2.14)$$

де $t_\gamma(\nu)$ – так званий γ - квантіль t розподілу Ст'юдента з $\nu = n - 1$ ступенями вільності для статистичної вибірки з n значень.

Для $\gamma = 0{,}9$ і $N = 40$ квантіль

$$\frac{t_{90}(39)}{\sqrt{40}} = 0{,}206.$$

Для нашого прикладу

$$m_{н1} = 450 - 0{,}206 \cdot 142{,}3 = 421{,}7 \text{ год};$$
$$m_{в1} = 450 + 0{,}206 \cdot 142{,}3 = 479{,}3 \text{ год}.$$

Таким чином, з ймовірністю 0,9 можна стверджувати, що значення середнього напрацювання клинових пасів до першої відмови буде знаходитись в інтервалі від 421,7 до 479,3 год.