

Практична робота № 2

Спільна та умовна ентропія

Мета роботи: Вивчити поняття спільної та умовної ентропії, опанувати програмні засоби їх розрахунку в MATLAB.

1.1. Теоретичні відомості

Спільна та умовна ентропії дозволяють враховувати статистичні зв'язки між алфавітами двох або кількох джерел, між алфавітами на вході та виході каналу зв'язку, між послідовними символами на виході однієї джерела.

Об'єднання джерел з алфавітами $A = \{a_i\}$ і $B = \{b_j\}$, що мають обсяги m і n відповідно, повністю характеризується матрицею спільних ймовірностей появи символів a_i і b_j , яка має вигляд:

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} p(a_1, b_1) & p(a_1, b_2) & \cdots & p(a_1, b_n) \\ p(a_2, b_1) & p(a_2, b_2) & \cdots & p(a_2, b_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p(a_m, b_1) & p(a_m, b_2) & \cdots & p(a_m, b_n) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де $p(a_i, b_j)$ – ймовірність спільної появи символів a_i та b_j .

Сума всіх елементів матриці (2.1)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) = 1 \quad (2.2)$$

за формулою сумарної ймовірності повної групи подій.

Безумовні ймовірності появи символів для кожного алфавіту визначаються співвідношеннями:

– для алфавіту A (підсумовування елементів матриці $\mathbf{P}_{(A,B)}$ по рядкам)

$$p(a_i) = \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2.3)$$

– для алфавіту B (підсумовування елементів матриці $\mathbf{P}_{(A,B)}$ по стовпцях)

$$p(b_j) = \sum_{i=1}^m p(a_i, b_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Ймовірності $p(a_i, b_j)$ можна виразити через безумовні ймовірності $p(a_i)$ або $p(b_j)$ та умовні ймовірності $p(b_j|a_i)$ або $p(a_i|b_j)$ відповідно до того, які стани прийняти за причину, а які за слідство

$$p(a_i, b_j) = p(a_i)p(b_j|a_i) = p(b_j)p(a_i|b_j) \quad (2.5)$$

де $p(b_j|a_i)$ – умовна ймовірність появи символу b_j після того, як з'явився символ a_i ; $p(a_i|b_j)$ – умовна ймовірність появи символу a_i після того, як з'явився символ b_j .

Спільна ентропія (ентропія об'єднання) двох статистично пов'язаних ансамблів A і B знаходиться за формулою

$$H(A, B) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \log p(a_i, b_j) \quad (2.6)$$

і є ентропією спільної появи символів з цих алфавітів.

З використанням співвідношень (2.2) (2.5) спільну ентропію можна представити у двох еквівалентних формах.

Перша форма запису має вигляд

$$H(A, B) = H(A) + H(B|A). \quad (2.7)$$

У сумі (2.7) відповідні доданки являють собою такі ентропії:

– ентропія джерела з алфавітом A

$$H(A) = - \sum_{i=1}^m p(a_i) \log p(a_i); \quad (2.8)$$

– умовна ентропія алфавіту B відносно алфавіту A

$$\begin{aligned} H(B|A) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \log p(b_j|a_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^m p(a_i) \sum_{j=1}^n p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i), \end{aligned} \quad (2.9)$$

яка являє собою середню додаткову інформацію, що міститься в символі алфавіту B після того, як стала відома інформація, яка в середньому міститься в символі алфавіту A і також може бути записана у вигляді

$$H(B|A) = - \sum_{i=1}^m p(a_i) H(B|a_i), \quad (2.10)$$

де

$$H(B|a_i) = - \sum_{j=1}^n p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i), \quad (2.11)$$

– часткова умовна ентропія алфавіту B по відношенню до символу a_i , яка являє собою випадкову величину, що характеризує невизначеність, що припадає на один символ ансамблю B за умови, що реалізувався конкретний стан a_i ансамблю A .

Як впливає із співвідношення (2.9), величина умовної ентропії $H(B|A)$ визначається видом розподілу ймовірностей $p(a_i)$ символів алфавіту A та величинами елементів матриці умовних ймовірностей $p(b_j|a_i)$

$$\mathbf{P}_{(B|A)} = \begin{pmatrix} p(b_1|a_1) & p(b_2|a_1) & \cdots & p(b_n|a_1) \\ p(b_1|a_2) & p(b_2|a_2) & \cdots & p(b_n|a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p(b_1|a_m) & p(b_2|a_m) & \cdots & p(b_n|a_m) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Друга форма запису визначається виразом

$$H(A, B) = H(B) + H(A|B) \quad (2.13)$$

і включає наступні ентропії:

– ентропію алфавіту B

$$H(B) = -\sum_{j=1}^n p(b_j) \log p(b_j); \quad (2.14)$$

– умовну ентропію алфавіту A відносно алфавіту B

$$\begin{aligned} H(A|B) &= -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \log p(a_i|b_j) = \\ &= -\sum_{j=1}^n p(b_j) \sum_{i=1}^m p(a_i|b_j) \log p(a_i|b_j). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ентропія $H(A|B)$ являє собою середню додаткову інформацію, яку дає символ алфавіту A після того, як стала відома інформація, яка в середньому міститься в символі алфавіту B і може бути записана у еквівалентному вигляді

$$H(A|B) = -\sum_{j=1}^n p(b_j) H(A|b_j), \quad (2.16)$$

де

$$H(A|b_j) = -\sum_{i=1}^m p(a_i|b_j) \log p(a_i|b_j), \quad (2.17)$$

– часткова умовна ентропія алфавіту A по відношенню до символу b_j , що характеризує невизначеність, що припадає на один символ ансамблю A за умови, що реалізувався конкретний стан b_j ансамблю B .

Співвідношення (2.15) показує, що умовна ентропія $H(A|B)$ залежить від розподілу ймовірностей $p(b_j)$ символів алфавіту B та величин елементів матриці умовних ймовірностей $p(a_i|b_j)$

$$\mathbf{P}_{(A|B)} = \begin{pmatrix} p(a_1|b_1) & p(a_1|b_2) & \cdots & p(a_1|b_n) \\ p(a_2|b_1) & p(a_2|b_2) & \cdots & p(a_2|b_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p(a_m|b_1) & p(a_m|b_2) & \cdots & p(a_m|b_n) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Уявленню співвідношень між розглянутими ентропіями дискретних джерел із залежними алфавітами A і B сприяє їх графічне відображення у вигляді так званих діаграм Венна - Ейлера, показаних на рис. 2.1.

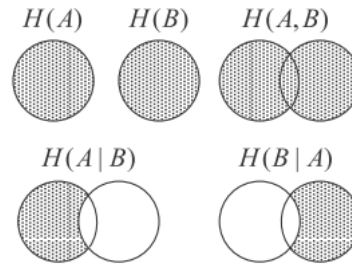


Рис. 2.1. Співвідношення між ентропіями

На цих діаграмах заштрихованими областями позначені ентропії $H(A)$ і $H(B)$ алфавітів A і B , спільна ентропія $H(A,B)$, а також умовні ентропії $H(A|B)$ та $H(B|A)$.

Умовна ентропія має такі властивості:

1. Умовна ентропія є величина, обмежена нерівностями

$$0 \leq H(A|B) \leq H(A); \quad (2.19)$$

$$0 \leq H(B|A) \leq H(B). \quad (2.20)$$

2. Якщо між алфавітами A і B є однозначний зв'язок, то умовна ентропія перетворюється на нуль

$$H(A|B) = H(B|A) = 0, \quad (2.21)$$

3. Якщо алфавіти A і B статистично незалежні, то умовна ентропія дорівнює безумовній

$$H(A|B) = H(A); \quad (2.22)$$

$$H(B|A) = H(B). \quad (2.23)$$

Властивості спільної ентропії:

1. Спільна ентропія має властивість симетрії

$$H(A|B) = H(B|A). \quad (2.24)$$

2. Спільна ентропія є не негативною (невід'ємною) величиною, зверху обмеженою нерівністю

$$H(A,B) \leq H(A) + H(B). \quad (2.25)$$

3. Якщо між алфавітами A і B є однозначний зв'язок (при цьому $H(A) = H(B)$), то спільна ентропія становить

$$H(A,B) = H(A) = H(B). \quad (2.26)$$

4. Якщо алфавіти A і B статистично незалежні, то спільна ентропія дорівнює сумі їх ентропій

$$H(A,B) = H(A) + H(B). \quad (2.27)$$

2.2. Розрахункові завдання

Завдання 2.1. Матриця спільних ймовірностей об'єднання алфавітів A і B має вигляд.

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} p(a_1, b_1) & p(a_1, b_2) \\ p(a_2, b_1) & p(a_2, b_2) \\ p(a_3, b_1) & p(a_3, b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,25 \\ 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A, B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

```
%Script_2_1
%Розрахунок умовної та спільної ентропії алфавітів
A і B
%при заданій матриці спільних ймовірностей P(A,B)
clear all; close all; clc
%Завдання анонімної функції
%-----
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%-----
%Значення спільних ймовірностей
P_AB=[.1 .25;.2 0;.3 .15];
disp('Матриця спільних ймовірностей P(A,B):')
disp(P_AB)
%Визначення обсягів алфавітів
[m, n]=size(P_AB);
disp('Обсяг алфавіту A:')
disp(m)
disp('Обсяг алфавіту B:')
disp(n)
%Розрахунок ймовірностей символів алфавіту A
p_a=sum(P_AB,2);
disp('Ймовірності символів алфавіту A:')
disp(p_a)
%Розрахунок ентропії алфавіту A
H_A=sum(fun(p_a));
disp('Ентропія алфавіту A, біт/символ:')
disp(H_A)
%Розрахунок ймовірностей символів алфавіту B
p_b=sum(P_AB,1);
disp('Ймовірності символів алфавіту B:')
disp(p_b)
%Розрахунок ентропії алфавіту B
```

```

H_B=sum(fun(p_b));
disp('Ентропія алфавіту, біт/символ:')
disp(H_B)
%Спільна ентропія H(A,B) - перша форма
%Розрахунок елементів матриці умовних ймовірностей
P(B|A)
P_B_A=bsxfun(@rdivide,P_AB,p_a(:));
disp('Матриця умовних ймовірностей P(B|A):')
disp(P_B_A)
%Розрахунок часткових умовних ентропій H(B|a)
H_b_a=sum(fun(P_B_A),2);
disp('Часткові умовні ентропії H(B|a),
біт/символ:')
disp(H_b_a)
%Розрахунок умовної ентропії H(B|A)
H_B_A=sum(p_a.*H_b_a);
disp('Умовна ентропія H(B|A), біт/символ:')
disp(H_B_A)
%Розрахунок спільної ентропії H(A,B)
H_AB=H_A+H_B_A;
disp('Спільна ентропія H(A,B), біт/символ - перша
форма:')
disp(H_AB)
%Спільна ентропія H(A,B) - друга форма
%Розрахунок елементів матриці умовних ймовірностей
P(A|B)
P_A_B=bsxfun(@rdivide,P_AB,p_b(:));
disp('Матриця умовних ймовірностей P(A|B):')
disp(P_A_B)
%Розрахунок часткових умовних ентропій H(A|b)
H_A_b=sum(fun(P_A_B),1);
disp('Часткові умовні ентропії H(A|b),
біт/символ:')
disp(H_A_b)
%Розрахунок умовної ентропії H(A|B)
H_A_B=sum(p_b.*H_A_b);
disp('Умовна ентропія H(A|B), біт/символ:');
disp(H_A_B)
%Розрахунок спільної ентропії H(A,B)
H_AB=H_B+H_A_B;
disp('Спільна ентропія H(A,B), біт/символ - друга
форма:')
disp(H_AB)
%Розрахунок спільної ентропії H(A,B)

```

```

H_AB=sum(sum(fun(H_AB),1));
disp('Спільна ентропія H(A,B), біт/символ -
загальна формула:')
disp(H_AB)

```

Завдання 2.2. Матриця спільних ймовірностей об'єднання алфавітів A і B має вигляд.

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A,B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

Вказівка: використовувати Script_2_1.

Завдання 2.3. Матриця спільних ймовірностей об'єднання алфавітів A і B має вигляд.

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A,B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16). Чи відрізняються величини ентропій $H(A)$, $H(B)$, $H(B|A)$, $H(A|B)$ та $H(A,B)$ від значень відповідних ентропій системи, розглянутої в попередньому завданні?

Вказівка: використовувати Script_2_1.

Завдання 2.4. Матриця спільних ймовірностей об'єднання алфавітів A і B має вигляд.

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A,B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

Вказівка: використовувати Script_2_1.

Завдання 2.5. Матриця спільних ймовірностей об'єднання алфавітів A і B має вигляд.

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A, B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

Вказівка: використовувати Script_2_1.

Завдання 2.6. Матриця спільних ймовірностей об'єднання алфавітів A і B має вигляд.

$$\mathbf{P}_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,1 & 0,08 & 0,05 & 0,03 \\ 0,02 & 0,04 & 0,12 & 0,04 & 0,02 \\ 0,03 & 0,05 & 0,08 & 0,1 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A, B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

Вказівка: використовувати Script_2_1.

Завдання 2.7. Імовірності появи символів джерела з алфавітом A становлять: $p(a_1) = 0,2$; $p(a_2) = 0,3$; $p(a_3) = 0,5$. Матриця умовних ймовірностей появи символів джерела B після появи символів з алфавіту A має вигляд

$$\mathbf{P}_{(B|A)} = \begin{pmatrix} p(b_1|a_1) & p(b_2|a_1) & p(b_3|a_1) \\ p(b_1|a_2) & p(b_2|a_2) & p(b_3|a_2) \\ p(b_1|a_3) & p(b_2|a_3) & p(b_3|a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,666 & 0,334 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A, B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

```
%Script_2_7
%Розрахунок умовної та спільної ентропії алфавітів
А та В
%при заданому векторі ймовірностей символів
алфавіту А
%і матриці умовних ймовірностей P(B|A)
```

```

clear all; close all; clc
%Завдання анонімної функції
%-----
fun=@(x) -x.*log2(x+(x==0));
%-----
%Значення ймовірностей символів алфавіту A
p_a=[.2.3.5];
disp('Ймовірності символів алфавіту A:')
disp(p_a)
%Значення умовних ймовірностей
P_B_A=[.5.50; 0.666.334; 0.4.6];
disp('Матриця умовних ймовірностей P(B|A):')
disp(P_B_A)
%Визначення обсягів алфавітів
[m, n]=size(P_B_A);
disp('Обсяг алфавіту A:')
disp(m)
disp('Обсяг алфавіту B:')
CФзр(n)
%Розрахунок ентропії алфавіту A
H_A=sum(fun(p_a));
disp('Ентропія алфавіту A, біт/символ:')
disp(H_A)
Розрахунок часткових умовних ентропій H(B|a)
H_B=sum(fun(P_B_A),2);
disp('Часткові умовні ентропії H(B|a),
біт/символ:')
disp(H_B_a)
%Розрахунок умовної ентропії H(B|A)
H_B_A=sum(p_a'.*H_B_a);
disp('Умовна ентропія H(B|A), біт/символ:')
disp(H_B_A)
%Розрахунок елементів матриці спільних ймовірностей
P(A,B)
P_AB=bsxfun(@times,P_B_A,p_a(:));
disp('Матриця спільних ймовірностей P(A,B):')
disp(P_AB)
%Розрахунок ймовірностей символів алфавіту B
P_b=sum(P_AB,1);
disp('Ймовірності символів алфавіту B:')
disp(p_b)
%Розрахунок ентропії алфавіту B
H_B=sum(fun(p_b));
disp('Ентропія алфавіту, біт/символ:')

```

```

disp(H_B)
%Розрахунок елементів матриці умовних ймовірностей
P(A|B)
P_A_B=bsxfun(@rdivide,P_AB,p_b(:)');
disp('Матриця умовних ймовірностей P(A|B):')
disp(P_A_B)
%Розрахунок часткових умовних ентропій H(A|B)
H_A_b=sum(fun(P_A_B),1);
disp('Часткові умовні ентропії H(A|B),
біт/символ:')
disp(H_A_B)
%Розрахунок умовної ентропії H(A|B)
H_A_B=sum(p_b.*H_A_b);
disp('Умовна ентропія H(A|B), біт/символ:');
disp(H_A_B)
%Розрахунок спільної ентропії H(A,B)
H_AB=H_A+H_B_A;
disp('Спільна ентропія H(A,B), біт/символ - перша
форма:')
disp(H_AB)
%Розрахунок спільної ентропії H(A,B)
H_AB=H_B+H_A_B;
disp('Спільна ентропія H(A,B), біт/символ - друга
форма:')
disp(H_AB)
%Розрахунок спільної ентропії H(A,B)
H_AB=sum(sum(fun(P_AB),1));
disp('Спільна ентропія H(A,B), біт/символ -
загальна формула:')
disp(H_AB)

```

Завдання 2.8. Імовірності появи символів джерела з алфавітом A становлять: $p(a_1)=1/2$; $p(a_2)=1/3$; $p(a_3)=1/6$. Матриця умовних ймовірностей появи символів джерела B після появи символів з алфавіту A має вигляд

$$\mathbf{P}_{(B|A)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/10 & 1/5 & 1/5 & 3/10 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати: ентропії алфавітів $H(A)$ і $H(B)$; часткові умовні ентропії $H(B|a_i)$ і $H(A|b_j)$; умовні ентропії $H(B|A)$ і $H(A|B)$; спільну ентропію $H(A,B)$ за формулами (2.6), (2.10) та (2.16).

Вказівка: використовувати Script_2_7.

2.3. Звіт та контрольні питання

Звіт з лабораторної роботи оформляється у вигляді документа MS Word і повинен містити:

1. Назва лабораторної роботи (шрифт Times New Roman).
2. Результати виконання всіх розрахункових завдань, включаючи лістинги m-файлів, що копіюються з вікна **Editor**, результати їх виконання, що копіюються з вікна **Command Window** (шрифт Courier New), а також отримані графіки, що копіюються з вікна **Figure** за командою **Edit | Copy Figure**.

Захист лабораторної роботи проводиться на основі поданого звіту та відповідей на контрольні питання з наступного списку:

1. Дайте визначення матриці $\mathbf{P}_{(A,B)}$ спільних імовірностей появи символів двох статистично пов'язаних алфавітів $A = \{a_i\}$ і $B = \{b_i\}$, що мають обсяги m і n відповідно
2. Чому дорівнює сума всіх елементів матриці $\mathbf{P}_{(A,B)}$?
3. Чому рівні суми всіх елементів рядків матриці $\mathbf{P}_{(A,B)}$?
4. Чому дорівнюють суми всіх елементів стовпців матриці $\mathbf{P}_{(A,B)}$?
5. Запишіть вираз, що пов'язує спільні ймовірності символів алфавітів A і B з безумовними та умовними ймовірностями.
6. Запишіть загальний вираз для спільної ентропії двох статистично зв'язаних алфавітів.
7. Наведіть першу форму запису для спільної ентропії.
8. Наведіть другу форму запису для спільної ентропії.
9. Дайте визначення приватної умовної ентропії.
10. Дайте визначення матриці $\mathbf{P}_{(B|A)}$ умовних ймовірностей появи символів алфавітів A і B .
11. Зобразіть діаграми Венна - Ейлера, які пояснюють співвідношення між ентропіями.
12. Перерахуйте властивості умовної ентропії.
13. У яких випадках умовна ентропія набуває найменшого і найбільшого значення?
14. Перерахуйте властивості спільної ентропії.
15. У яких випадках спільна ентропія набуває найменшого і найбільшого значення?