

Лекція 2. Елементи лінійної алгебри.

§1. Матриці та дії над ними.

1.1. Основні означення.

Означення. Множину дійсних чисел, записану у вигляді прямокутної таблиці, яка має n рядків і m стовпців, називають матрицею розміру $n \times m$ і позначають

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$; $A = \|a_{ij}\|$.

Числа a_{ij} називають елементами матриці. Перший індекс i числа a_{ij} вказує на номер рядка, в якому він перебуває, другий індекс j – на номер стовпця.

Матриця називається нульовою, якщо всі її елементи рівні нулю. Нульова матриця позначається літерою O .

Якщо в матриці A (1.1) $n = m$, то вона називається квадратною матрицею порядку n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ квадратної матриці (1.2), а елементи $a_{n1}, a_{n-1,2}, a_{n-2,3}, \dots, a_{1n}$ – її побічну діагональ.

Кожній квадратній матриці $A = (a_{ij})$ порядку n ставиться у відповідність деяке число, правило обчислення якого буде сформульовано нижче. Це число називають визначником (детермінантом) n -го порядку і позначають

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається одиничною і позначається літерою E . Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Матриця розміру $1 \times n$ називається матрицею-рядком, а розміру $n \times 1$ – матрицею-стовпцем.

Дві матриці $A_{n \times m} = (a_{ij})$ та $B_{n \times m} = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакового розмірів і всі їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, де $i = \overline{1, n}$ та $j = \overline{1, m}$.

1.2. Дії над матрицями.

1°. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число β називають матрицю βA , елементи якої дорівнюють добутку числа β на всі відповідні елементи матриці A :

$$\beta A = \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \cdots & \beta a_{1m} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \cdots & \beta a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta a_{n1} & \beta a_{n2} & \cdots & \beta a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Приклад 1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ -6 & 12 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

2°. Операція додавання матриць визначена лише для матриць однакового розміру. Сумою двох матриць $A_{n \times m} = (a_{ij})$ та $B_{n \times m} = (b_{ij})$ називають матрицю $C_{n \times m} = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B , тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.6)$$

Приклад 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+(-1) & -2+3 \\ 5+4 & -1+2 & 3+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3°. Різницею матриць A та B називається сума матриці A і матриці B , помноженої на -1 : $A - B = A + (-1)B$.

4°. Операція множення двох матриць визначена лише для узгоджених матриць. Матриця A називається узгодженою з матрицею B , якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B . Якщо матриця A узгоджена з матрицею B , то звідси не впливає те, що матриця B узгоджена з матрицею A .

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $n \times p$ називають матрицю $C = (c_{ij})$ розміру $m \times p$, елементи якої визначаються за формулою ($C = AB$)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}; \quad (1.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p)$$

тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B .

В загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 3. Знайти добуток матриць AB , де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Матриця A розміру 2×3 , а матриця B розміру 3×3 . Тому матриця A узгоджена з матрицею B і добуток AB можна обчислити. Матриця $C = AB$ має розмір 2×3 .

Маємо

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -4 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -4 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 & -10 \\ -8 & 22 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матриці B і A перемножити не можна, бо вони не узгоджені.

Операція множення матриць не комутативна, тобто $AB \neq BA$. Покажемо це на прикладі. Нехай маємо матриці

$$A \text{ і } B, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже $AB \neq BA$.

Слід зауважити, що для того, щоб добутки AB і BA були не тільки визначені, але й мали однаковий розмір, необхідно і достатньо, щоб обидві матриці A та B були квадратними матрицями одного і того ж порядку.

Легко також перевірити, що дії над матрицями задовольняють наступним властивостям:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A, A - A = 0$
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $A(B + C) = AB + AC$
8. $(AB)C = A(BC)$
9. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$
10. $AE = EA = A$
11. $A \cdot 0 = 0, 0 \cdot A = 0$
12. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Тут α та β - довільні числа, а A, B, C - матриці, E - одинична матриця, 0 - нульова матриця.

§ 2. Визначники.

2.1. Визначники другого та третього порядку та їх властивості.

$$\text{Вираз } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (2.1)$$

називається визначником (детермінантом) другого порядку. Для його обчислення потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів другої діагоналі.

Приклади 4. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = 6 + 20 = 26.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Вираз

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} -$$

$$- a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11} \quad (2.2)$$

називається визначником (детермінантом) третього порядку.

Нижче запишемо схему обчислення визначника третього порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Визначник третього порядку (2.2) обчислюється за правилом трикутника (2.3): перший доданок в правій частині формули є добуток елементів, що стоять на головній діагоналі, другий і третій доданки є добутками елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно знаходяться доданки зі знаком мінус, де за основу береться друга діагональ.

Приклад 5. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - \\ - (-2) \cdot 3 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 \cdot 1 = -6 - 10 + 48 - 8 - 18 - 20 = -14.$$

Розглянемо на прикладі визначників третього порядку основні властивості визначників. Всі вони доводяться безпосередньою перевіркою. Пропонується зробити це самостійно.

Властивості визначників:

1⁰. Якщо у визначнику замінити всі його рядки відповідними стовпцями (транспонувати) то величина визначника при цьому не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дана властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців визначника.

2⁰. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить свій знак на протилежний. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3⁰. Якщо у визначнику є нульовий рядок (стовпець), то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4⁰. Якщо у визначнику є два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

5⁰. Спільний множник, що міститься в усіх елементах довільного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6⁰. Якщо у визначнику елементи будь-яких двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7⁰. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких вказаний рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого з других. Інші рядки (стовпці) усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

8⁰. Якщо до елементів довільного рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то визначник при цьому не зміниться. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$