

Математичний аналіз.

Тема: Функції.

1.3. Означення функції.

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом f поставлене у відповідність єдине число y з деякої числової множини Y , то кажуть, що задана функція $f: X \rightarrow Y$ або $y = f(x)$, $x \in X$.

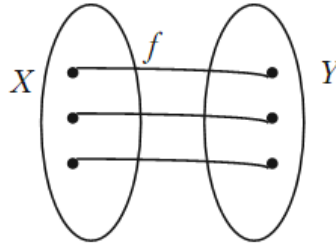


Рис 2.

Змінна x називається *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінна y — *залежною змінною*, або *функцією*; під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y , або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина X називається *областю визначення функції*. Множина Y усіх чисел y , таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається *множиною значень функції*.

1.4. Способи задання функцій.

Основні способи задання функції:

1. Аналітичний;
2. Графічний;
3. Табличний.

При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При графічному способі функція задається своїм графіком, тобто множиною точок площини з координатами $(x; f(x))$.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певні функції, які характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, \dots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

1.5. Класифікація елементарних функцій.

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. Степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α .

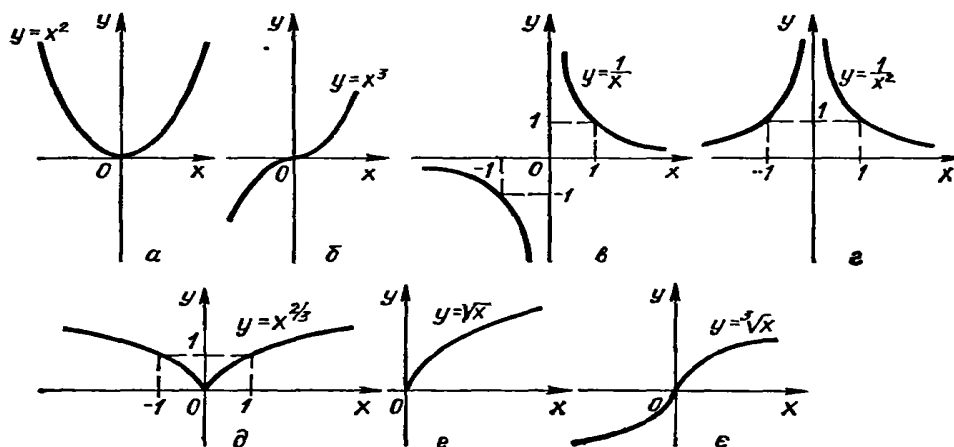


Рис 3.

2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

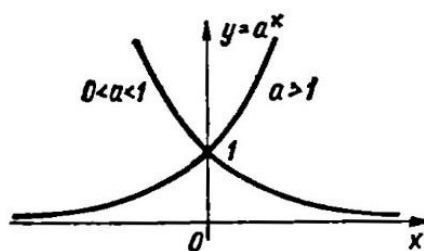


Рис 4.

4. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

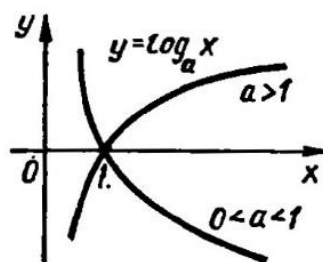


Рис 5.

5. Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

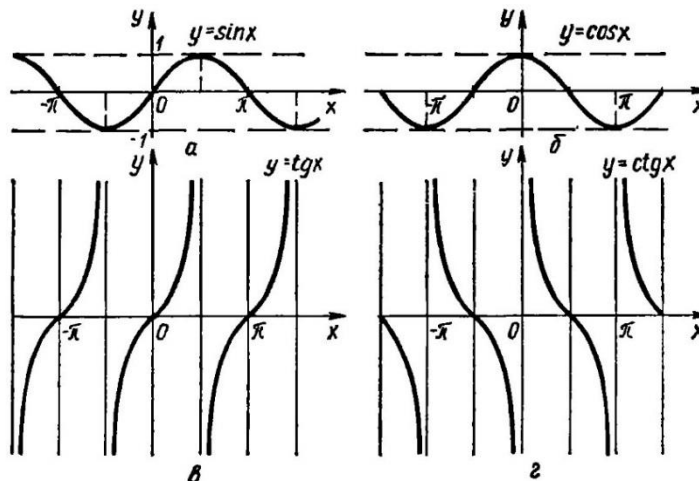


Рис 6.

5. *Обернені тригонометричні функції:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

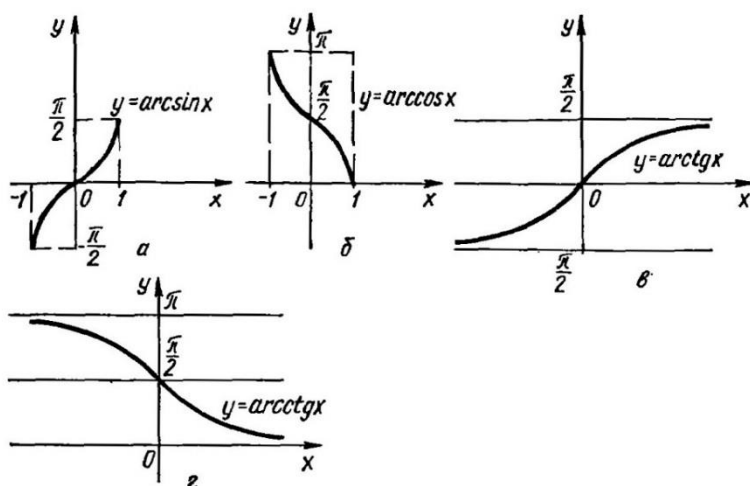


Рис 7.

1.6. Складена функція (суперпозиція функцій).

Над функціями виконують і так звану операцію *суперпозиції*, або *накладання*. Нехай функція $z = g(y)$ визначена на множині Y , а функція $y = f(x)$ — на множині X , причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $y = f(x) \in Y$. Тоді на множині X визначена функція $g(f(x))$, яку називають *складеною функцією* від x , або *суперпозицією* заданих функцій, або *функцією від функції*.

Змінну $y = f(x)$ функції $z = g(y)$ називають *проміжним аргументом*, або *внутрішньою функцією*, а змінну $z = g(y)$ *зовнішньою функцією*.

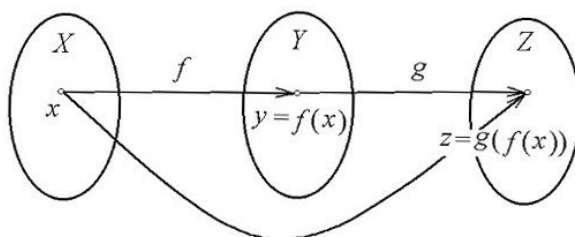


Рис 8.

Приклади.

1. Функція $y = \sqrt[5]{\cos x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій — степеневі $y = \sqrt[5]{u}$, $u \in [-1; 1]$ та тригонометричної $u = \cos x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

2. Функцію $y = 3^{\sin x^7}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій: $y = 3^u$, $u \in [-1; 1]$, $u = \sin v$, $v \in (-\infty; +\infty)$, $v = x^7$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними*.

Приклад.

$$y = \sqrt[9]{\frac{2^{\operatorname{arctg} 2x} - 7 \sin \log_4(3x^2 - 5x + 4)}{6 + (\operatorname{tg}(9x + \ln x) - 8 \cos x)^3}}$$

1.7. Обмежені функції.

Означення. Функцію $f(x)$, визначену на множині A , називають обмеженою на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

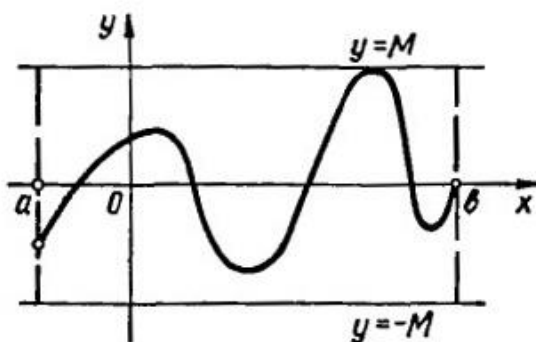
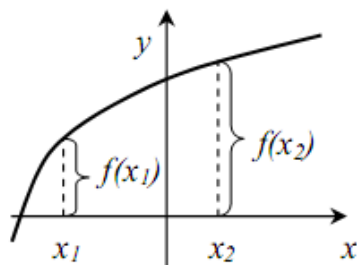


Рис 9.

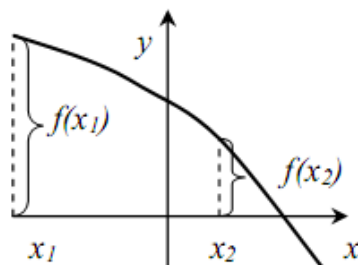
1.8. Монотонні функції.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A . Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A , з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

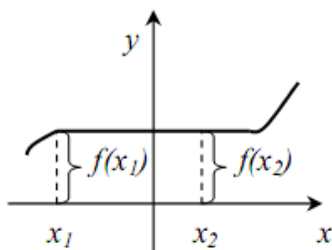
- а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається зростаючою;
- б) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається спадною;
- в) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається неспадною;
- г) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається незростаючою.



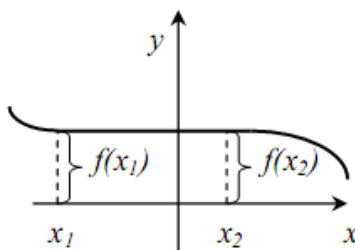
а) зростаюча



б) спадна



в) неспадна



г) незростаюча

Рис 10.

1.9. Парні і непарні функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox , розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Означення. Функцію $f(x)$ називають парною, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$.

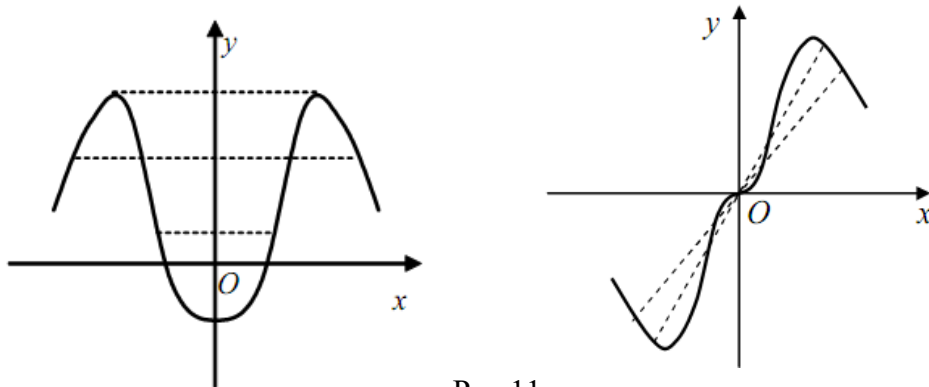


Рис 11.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат; графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають функцією загального вигляду.

1.10. Періодичні функції.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T , $f(x + T) = f(x)$. Число T називається періодом функції. Якщо T — період функції, то її періодами є також числа kT , де $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X , називається періодичною на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$ і $f(x + T) = f(x)$, $x \in X$.

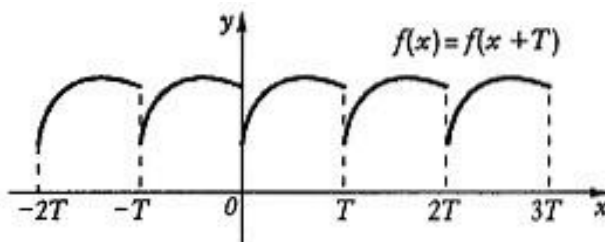


Рис 12.

1.11. неявно задані функції.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $\cos y - y^2 \sin x + xy = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y . Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають неявною.

1.12. Обернені функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y . Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$ (рис. 13). При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1 і x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1 (рис. 14). Додатково вимагатимемо, щоб функція $f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y . Тоді кожному значенню $y \in Y$

відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ з області визначення Y і множиною значень X . Ця функція називається оберненою функцією до даної.

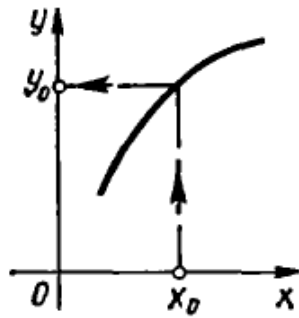


Рис 13.

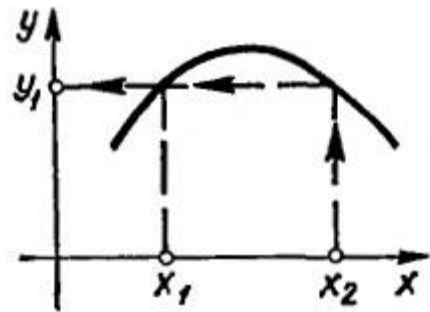


Рис 14.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:

- 1) областю визначення функції φ є множина значень функції f ;
- 2) множина значень функції φ є областю визначення функції f ;
- 3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції взаємно обернені.

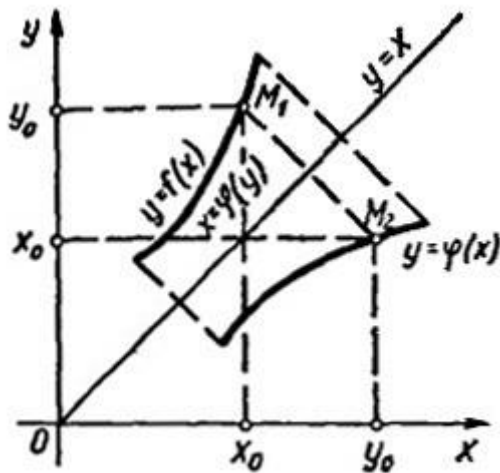


Рис 15.

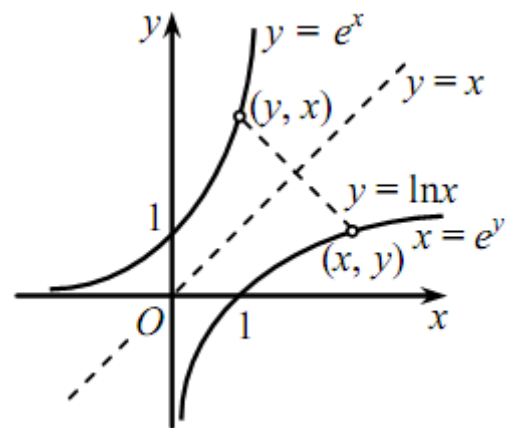


Рис 16.