

Лекція 1.

§ 1. Комплексні числа

1.1. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма запису комплексного числа.

Комплексним числом називається вираз

$$z = a + bi, \quad (1)$$

де a та b — дійсні числа, а символ i — уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$. При цьому число a називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $a = \operatorname{Re} z$, а b — уявною частиною z , $b = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: réel — дійсний, imaginaire — уявний).

Вираз, що стоїть справа у формулі (1), називається *алгебраїчною формою запису комплексного числа*.

Іноколи, зокрема в радіотехніці, уявна одиниця може позначатися літерою j .

Два комплексні числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються рівними ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні частини і рівні їхні уявні частини: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + bi$ дорівнює нулю ($z = a + bi = 0$) тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$.

Комплексні числа можна зображати на площині. Якщо користуватись декартовою системою координат, то число (1) зображується точкою $M(a; b)$.

Така площина умовно називається *комплексною площиною* змінної z , вісь Ox — *дійсною віссю*, а Oy — *уявною*.

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ збігається з дійсним числом a : $z = a + 0i = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображуються точками осі Ox .

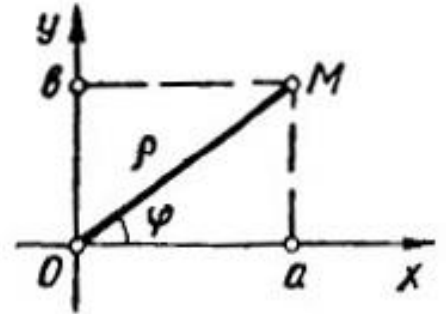


Рис. 1

Комплексні числа $z = a + bi$, в яких $a = 0$, називаються *суто уявними*; такі числа зображуються точками осі Oy .

1.2. Тригонометрична форма запису комплексного числа.

Полярні координати точки $M(a; b)$ на комплексній площині називаються *модулем* і *аргументом* комплексного числа і позначаються

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z$$

Оскільки $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$ (рис. 1), то з формули (1) маємо

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

Вираз, який стоїть справа у формулі (2), називається *тригонометричною формою комплексного числа* $z = a + bi$.

Модуль $|z| = \rho$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент φ — з точністю до $2\pi k$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тут під $\operatorname{Arg} z$ розуміють загальне значення аргументу; на відміну від нього, $\arg z$ — головне значення аргументу, воно знаходиться на проміжку $[0; 2\pi)$ і відраховується від

додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки (іноді розглядають і від'ємні аргументи φ).

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а $\arg z$ — невизначений.

1.3. Основні дії над комплексними числами заданими в алгебраїчній формі.

Основні дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$, заданими в алгебраїчній формі, визначаються такими рівностями:

$$1) z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$2) z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$3) z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + b_1a_2i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i;$$

$$4) \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i) \cdot (a_2 - b_2i)} = \\ = \frac{a_1a_2 + b_1a_2i - a_1b_2i - b_1b_2i^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Таким чином, арифметичні дії над комплексними числами виконуються за звичайними правилами дій над двочленами з урахуванням того, що $i^2 = -1$.

Очевидно, що добуток $z \cdot \bar{z}$ завжди є дійсним числом:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Неважко перевірити, що коли в рівностях 1) — 4) кожне комплексне число z замінити спряженим $\bar{z}$, то і результати вказаних дій заміняться спряженими числами.

Піднесення числа $z = a + bi$ до цілого натурального степеня виконується за формулою бінома Ньютона з урахуванням того, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$ справедливі рівності

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Приклад.

Виконати дії: а) $z_1 - z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$ в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) $(z_1)^3$, де $z_1 = 3 + 5i$, га $z_2 = 2 - 4i$.

Розв'язання.

$$а) z_1 - z_2 = (3 + 5i) - (2 - 4i) = 3 + 5i - 2 + 4i = 1 + 9i;$$

$$б) z_1 z_2 = (3 + 5i) \cdot (2 - 4i) = 6 - 12i + 10i - 20i^2 = 26 - 2i;$$

$$в) \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+5i}{2-4i} = \frac{(3+5i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{6+12i+10i+20i^2}{4-16i^2} = \frac{-14+22i}{20} = -0,7 + 1,1i;$$

$$г) (z_1)^3 = (3 + 5i)^3 = 3^3 + 135i + 225i^2 + 125i^3 = 27 + 135i - 225 - 125i = -198 + 10i$$

1.4. Основні дії над комплексними числами заданими в тригонометричній формі.

Формула Муавра.

Розглянемо дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Нехай $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ та $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тоді

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ = \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Отже, під час множення комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.

Це правило поширюється на довільно скінченне число множників. Зокрема, якщо всі n множників рівні, то

$$z^n = (\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3)$$

Ця формула називається формулою Муавра.

При діленні комплексних чисел маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Отже, модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника; аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

1.5. Добування кореня з комплексного числа.

Розглянемо добування кореня з комплексного числа. Якщо для даного числа $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ треба знайти число $\omega = \sqrt[n]{z} = r (\cos \psi + i \sin \psi)$, то за означенням кореня і формулою Муавра маємо

$$z = \omega^n = r^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси $r^n = \rho$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Оскільки $r > 0$ і $\rho > 0$, то $r = \sqrt[n]{\rho}$, де під коренем потрібно розуміти його арифметичне значення; тому

$$\sqrt[n]{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). \quad (4)$$

Надаючи k значень $0, 1, 2, \dots, n-1$, дістанемо n різних значень кореня. Для інших значень k аргументи відрізнятимуться від знайдених на число, кратне 2π , тому значення кореня збігатимуться з уже знайденими.

Приклади.

1. Знайти $(1 - \sqrt{3}i)^6$.

Розв'язання. Запишемо дане число в тригонометричній формі (рис. 2):

$$z = 1 - \sqrt{3}i, \rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \varphi = \frac{5}{3}\pi, z = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$$

За формулою Муавра маємо

$$z^6 = (1 - \sqrt{3}i)^6 = 2^6 (\cos 10\pi + i \sin 10\pi) = 64.$$

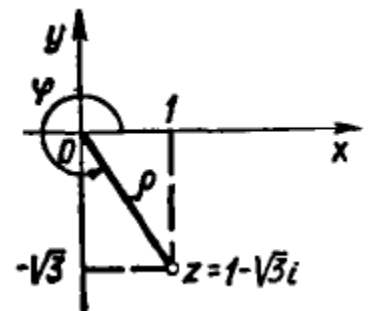


Рис. 2

2. Розв'язати рівняння $z^4 + 1 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (4), дістаємо $z^4 = -1$, $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$;

$$z = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}; k = 0, 1, 2, 3.$$

Поклавши k рівним $0, 1, 2, 3$, знайдемо всі чотири корені даного рівняння:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

1.6. Показникова форма запису комплексного числа.

Відомо, що показникову функцію з уявним показником можна виразити через тригонометричні функції за формулою

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (5)$$

яка була відкрита Ейлером в 1743 р.

З формул (3) і (2) випливає, що всяке комплексне число можна записати в показниковій формі: $z = \rho e^{i\varphi}$.

Приклад 1,

Записати в показниковій формі числа: а) $z = 1$; б) $z = -1$; в) $z = 7i$; г) $z = 1 + i$.

Розв'язання.

а) $1 = \cos 0 + i \sin 0 = e^{0 \cdot i}$;

б) $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{\pi i}$;

в) $7i = 7 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 7e^{\frac{\pi}{2}i}$

г) $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Приклад 2. Виразити $\cos 2x$ та $\sin 2x$ через $\cos x$ та $\sin x$.

Розв'язання. Розглянемо комплексне число $z = \cos x + i \sin x$.

Піднесемо його до квадрату. З одного боку за формулою

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ми отримаємо:

$$z^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x.$$

З іншого боку за формулою Муавра отримаємо:

$$z^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини в обох рівностях отримаємо шукані формули, відомі вам з шкільного курсу тригонометрії:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ та } \sin 2x = 2 \cos x \sin x.$$

ДОДАТКОВІ ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Нехай $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 4 - 3i$. Виконайте дії:

а) $z_1 + z_2$; б) $3z_1 - 2z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $(z_1)^3$.

Розв'язання.

а) $z_1 + z_2 = (3 + i) + (4 - 3i) = 7 - 2i$;

б) $3z_1 - 2z_2 = 3(3 + i) - 2(4 - 3i) = 9 + 3i - 8 + 6i = 1 + 9i$;

в) $z_1 z_2 = (3 + i)(4 - 3i) = 12 + 4i - 9i - 3i^2 = 12 - 5i + 3 = 15 - 5i$;

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{4 - 3i} = \frac{(3 + i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{12 + 4i + 9i + 3i^2}{16 - 9i^2} = \frac{9 + 13i}{25} = \frac{9}{25} + \frac{13}{25}i$;

д) $(z_1)^3 = (3 + i)^3 = 27 + 27i + 9i^2 + i^3 = 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i$.

2. Обчисліть $i^{18} + i^{25} + i^{36} + i^{-1}$.

Розв'язання. Ураховуючи рівності $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, маємо

$$\begin{aligned} i^{18} + i^{25} + i^{36} + i^{-1} &= i^{16+2} + i^{24+1} + i^{36} - i = \\ &= (i^4)^4 \cdot i^2 + (i^4)^6 \cdot i + (i^4)^9 - i = i^2 + i + 1 - i = 0. \end{aligned}$$

3. Знайдіть дійсну та уявну частини комплексного числа $z = \frac{(2-3i)^2}{i+2} + (2i-1)^3$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-3i)^2}{i+2} + (2i-1)^3 = \frac{4-12i+9i^2}{2+i} + 8i^3 - 12i^2 + 6i - 1 = \\ &= \frac{4-12i-9}{2+i} - 8i + 12 + 6i - 1 = \frac{-5-12i}{2+i} - 2i + 11 = \\ &= \frac{(-5-12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} - 2i + 11 = \frac{-10+5i-24i+12i^2}{4-i^2} - 2i + 11 = \\ &= \frac{-10-19i-12}{4+1} - 2i + 11 = \frac{-22-19i}{5} - 2i + 11 = \frac{-22-19i-10i+55}{5} \\ &= \frac{33-29i}{5} = \frac{33}{5} - \frac{29}{5}i = 6,6 - 5,8i. \end{aligned}$$

Отже, $Re z = 6,6$, $Im z = -5,8$.

4. Знайдіть $(-\sqrt{3} + i)^{10}$.

Розв'язання. Подано задане комплексне число $z = -\sqrt{3} + i$ у тригонометричній формі

$$z = a + bi = -\sqrt{3} + i, a = Re z = -\sqrt{3}, b = Im z = 1.$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

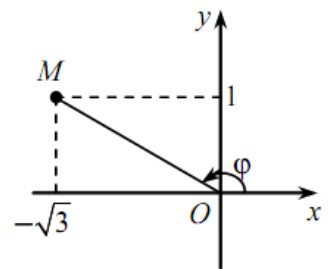
$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Тоді маємо

$$z = -\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

За формулою Муавра дістанемо:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} + i)^{10} &= 2^{10} \left(\cos \left(10 \cdot \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{5\pi}{6} \right) \right) = \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{25\pi}{3} + i \sin \frac{25\pi}{3} \right) = 2^{10} \left(\cos \left(8\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1024 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 512 + 512\sqrt{3}i. \end{aligned}$$



5. Нехай $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$. Виконайте дії: а) $z_1 z_2$; б) $(z_1)^4$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 z_2 &= 5e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 20e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = 20e^{i(\frac{3\pi}{4})} = 20e^{i\frac{3\pi}{4}} = \\ &= 20 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 20 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

$$\text{б) } (z_1)^4 = \left(5e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^4 = 5^4 e^{i\pi} = 625(\cos \pi + i \sin \pi) = 625(-1 + i \cdot 0) = -625.$$