

Неперервність функції. Приклад.

Дослідити функцію на неперервність і встановити характер розривів:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 1, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } 1 \leq x < 2, \\ x + 1, & \text{якщо } x \geq 2, \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція не є елементарною. Але складається з елементарних функцій. Вона визначена при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, тобто точка $x = 0$ не належить області визначення функції. Отже, в цій точці функція має розрив. Дослідимо характер розриву функції у точці $x = 0$. Розглянемо односторонні границі.

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Обидві односторонні границі в точці $x = 0$ рівні нескінченності, тому вона є точкою розриву другого роду.

Функції $y = x^2 - 1$ та $y = x + 2$ є неперервними в межах відповідних проміжків їх задання. Тому інші точки розриву заданої функції можливі в точках, у яких вона змінює свій аналітичний вираз. Тобто при $x = 1$ та $x = 2$. Розглянемо односторонні границі у цих точках. При $x = 1$ маємо:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0,$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0.$$

Оскільки $f(1-0) \neq f(1+0)$, то функція $f(x)$ має у точці $x = 1$ неусувний розрив першого роду зі стрибком $\delta(1) = |f(1-0) - f(1+0)| = |1 - 0| = 1$.

Знайдемо тепер односторонні границі в точці $x = 2$.

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x + 1) = 2 + 1 = 3,$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3.$$

Оскільки $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 3$, то функція неперервна у точці $x = 2$.

Схематичний графік функції $f(x)$ наведено на рис. 1.

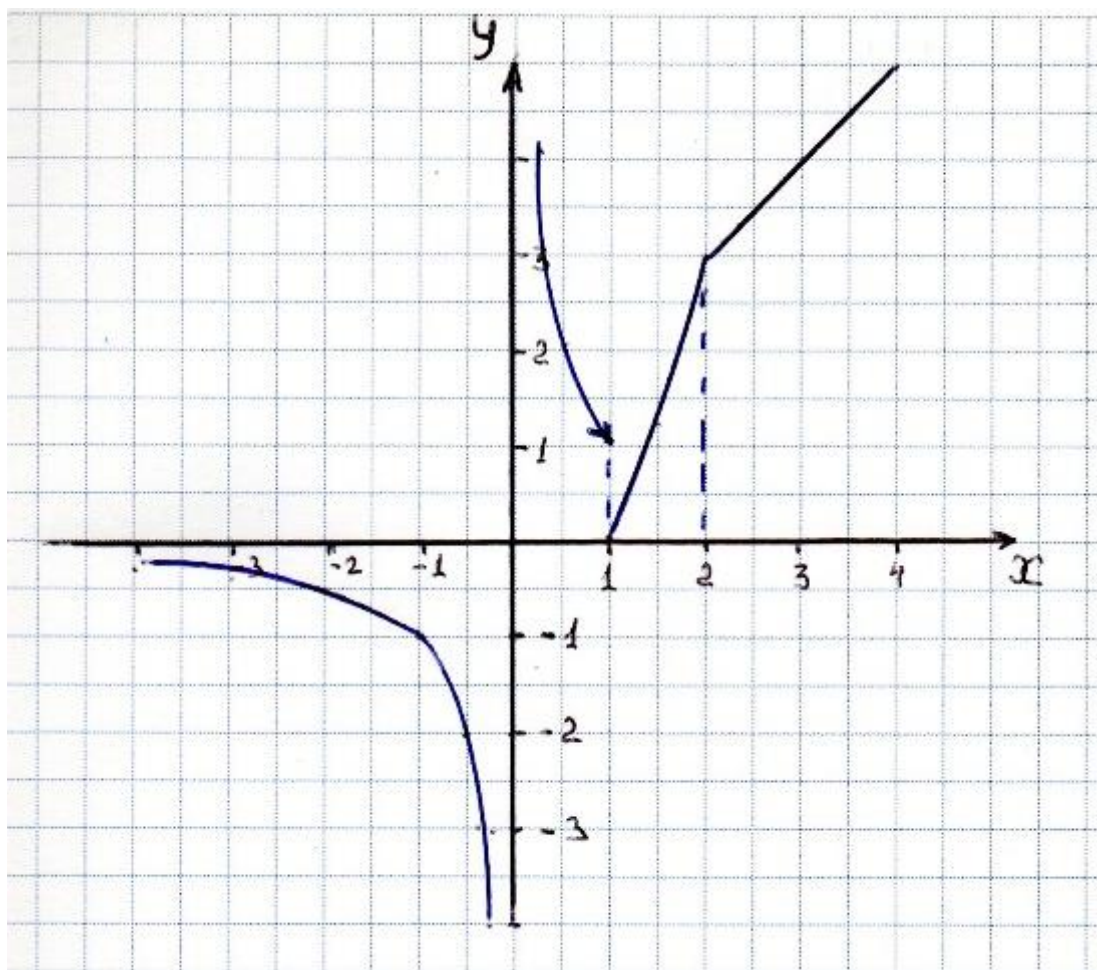


Рис. 1.