

Математичний аналіз.

Лекція 2

З цим пов'язане друге означення границі. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Означення границі за Коші. Число A називається границею функції в точці x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Геометрично це ілюструється так: число A є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного ε -околу точки A знайдеться δ -оکیل точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε -околі точки A (рис. 18).

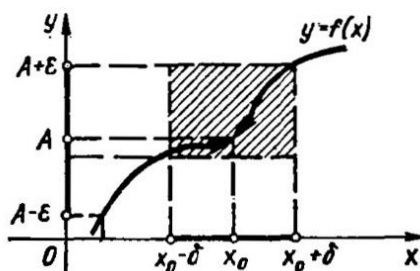


Рис 18.

2.7. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю. Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією) при $x \rightarrow x_0$ або $x \rightarrow \infty$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0.$$

2.8. Властивості нескінченно малих величин.

1. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

2. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \rightarrow x_0$ ($\alpha \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \rightarrow x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \rightarrow x_0$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є величиною нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величиною нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величиною нескінченно мала.

2.9. Односторонні границі.

У деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва (або лівою границею) в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення. Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Ліву і праву границі функції називають односторонніми границями і позначають

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B.$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0) = B.$$

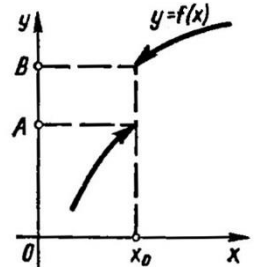


Рис. 19.

2.10. Основні теореми про границі.

Теорема 1 (про границю суми, різниці, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці x_0 , то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Дана теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Наслідки. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), c \in R;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n.$$

Приклад. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 5x + 8)$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ ($D(f) = (-\infty, +\infty)$) є елементарною, то підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 3, одержимо

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 5x + 8) = 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 = 36 - 15 + 8 = 29.$$

Теорема 2 (про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ і $\psi(x)$ і виконуються нерівності

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$,

то таку саму границю має функція $f(x)$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

§3. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ.

1.1. Важливі границі.

3.1.1. Перша важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Наслідки:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \sin 9x}{9x} = 9 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} = 9 \cdot 1 = 9.$$

2. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{3 \operatorname{tg} 3x} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю. Для цього використаємо формулу: $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.1.2. Друга важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5-5-4}{3x+5}\right)^{2-7x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9}{3x+5}\right)^{2-7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(3x+5)/-9}\right)^{2-7x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(3x+5)/-9}\right)^{\frac{3x+5}{-9} \cdot \frac{-9}{3x+5} (2-7x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(3x+5)/-9}\right)^{\frac{3x+5}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3x+5} (2-7x)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9}{3x+5} (2-7x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{63x-18}{3x+5}} = e^{21} \end{aligned}$$

Окремо знайдемо $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{63x-18}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{63-\frac{18}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{63-0}{3+0} = 21$.

2. Знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{5x}{3-x}}$.

Розв'язання. Дана границя має невизначеність виду 1^∞ і обчислюється з використанням формули $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Для цього нам потрібно у прикладі перейти від границі при $x \rightarrow 3$ до границі при $x \rightarrow 0$, що можна зробити здійснивши заміну $y = x - 3$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{5x}{3-x}} &= \left| \begin{matrix} y = x - 3, \\ x = y + 3 \end{matrix} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} (7-2(y+3))^{\frac{5(y+3)}{3-(y+3)}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (7-2y-6)^{\frac{5y+15}{3-y-3}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1-2y)^{\frac{5y+15}{-y}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (1+(-2y))^{\frac{5y+15}{-y}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+(-2y))^{\frac{1}{-2y} \cdot (-2y) \cdot \frac{5y+15}{-y}} = \\ &= \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1+(-2y))^{\frac{1}{-2y}} \right]^{(-2y) \cdot \frac{5y+15}{-y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} (-2y) \cdot \frac{5y+15}{-y}} = e^{2 \lim_{y \rightarrow 0} (5y+15)} = \\ &= e^{2(5 \cdot 0 + 15)} = e^{30}. \end{aligned}$$

3.1.3. Розкриття деяких невизначеностей.

Як уже вказувалось, у найпростіших випадках знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0 . Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

- 1) відношення двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;
- 2) різниця двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\infty - \infty$;
- 3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику — невизначеність виду $0 \cdot \infty$;
- 4) відношення двох нескінченно малих величин — невизначеність виду $\frac{0}{0}$;
- 5) якщо $\alpha_1(x) \rightarrow 0$ та $\alpha_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, то вираз $\alpha_1^{\alpha_2}$ — невизначеність виду 0^0 ;
- 6) якщо $\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то вираз β^α — невизначеність виду ∞^0 ;
- 7) якщо $f(x) \rightarrow 1$, $\beta(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то вираз f^β — невизначеність виду 1^∞ (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу f^β , де $f \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow \infty$).

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x^2 + 8}{9x^3 + 3x - 2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x^2 + 8}{9x^3 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} + \frac{8}{x^3}}{\frac{9x^3}{x^3} + \frac{3x}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^3}}{9 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \frac{6 - 0 + 0}{9 + 0 - 0} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Застосований прийом є загальним: щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь x у цих многочленах.

2. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6}$.

Розв'язання. Підстановкою значення $x = 1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2 + x - 3 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 1$ та $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Тому за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$$2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x + 3).$$

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, одержимо $x_1 = 1$, $x_2 = -6$ та представимо $x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$.

Тому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x + 3)}{(x - 1)(x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3}{x + 6} = \frac{2 \cdot 1 + 3}{1 + 6} = \frac{5}{7}.$$

Це загальний прийом. Скорочення на $x - 1$ тут можливе, тому що при визначенні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ значення $x \neq x_0$.

Множник $x - x_0$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, іноді називають критичним множником.

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$.

Розв'язання. Тут невідомість $\frac{0}{0}$, $x-3$ — критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+7-16}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4} = \frac{3+3}{\sqrt{3^2+7}+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

2. Невизначеності виду $\infty - \infty$ задані ірраціональними виразами.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2+x} - 3x)$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+x} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+x} - 3x)(\sqrt{9x^2+x} + 3x)}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2+x - (3x)^2}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.2. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_2(x) = 0.$$

Введемо такі означення:

1) функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, \quad A \in R;$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty;$$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою k -го порядку відносно $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{[\alpha_2(x)]^k} = A \neq 0, \quad A \in R;$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються непорівнянними при $x \rightarrow x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0 . Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ та при $x \rightarrow x_0 \pm 0$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклади.

1. Функції $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} 7x$ нескінченно малі одного порядку при $x \rightarrow 0$, тому що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{7 \operatorname{tg} 7x} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\operatorname{tg} 7x} = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}.$$

2. Функція $\alpha_1(x) = x^3$ при $x \rightarrow 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = \sin x$, тому що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = \sin x$ при $x \rightarrow 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^3$.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$, називаються еквівалентними нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \rightarrow x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Теорема 2. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ і ці границі рівні між собою.

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожен з них (або тільки одну) замінити іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$$\sin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$\arcsin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$\log_a(1 + \alpha) \sim \alpha \log_a e, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$\arctg \alpha \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \rightarrow 0;$$

$$(1 + \alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad k > 0.$$

Зазначимо, що ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою правила Лопіталя, яке ми вивчимо в подальшому курсі вищої математики.

Теорема 3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Приклади. 1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{\sin 3x}$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} 9x \sim 9x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{3x} = \frac{9}{3} = 3.$$

2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{x^2-7x+10}$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{arctg}(x-5) \sim x-5$ при $x \rightarrow 5$ та $x^2-7x+10 = (x-5)(x-2)$, то

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{x^2-7x+10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

§ 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу — поняття неперервності функції.

4.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (4.1)$$

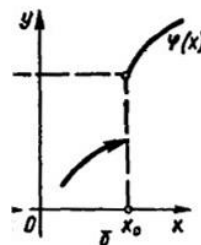
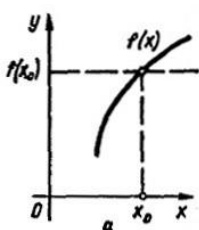


Рис. 1.

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею A .

Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 і значення функції в цій точці x_0 збігаються, тобто виконується рівність (4.1).

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через Δx («дельта x »):

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{або} \quad x = x_0 + \Delta x.$$

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається *приростом функції* в точці x_0 і позначається через Δy :

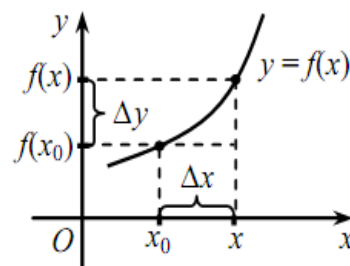


Рис. 2.

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Очевидно, приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy — довільним числом. Запишемо рівність (4.1) в нових позначеннях, для чого перенесемо в ній значення $f(x_0)$ в

ліву частину і внесемо його під знак границі. Оскільки умови $x \rightarrow x_0$ і $x - x_0 \rightarrow 0$ однакові, то рівність (4.1) набуває вигляду

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \text{ або } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (4.2)$$

Рівність (4.2) і є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так.

Означення. Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0 , називається неперервною в точці x_0 , якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \rightarrow 0$.

Часто зустрічається поняття односторонньої неперервності.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0; x_0 + \varepsilon)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною в точці x_0 справа.

Використовуючи ці поняття, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0). \quad (4.3)$$

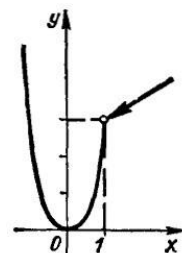
Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0 , а сама точка x_0 називається точкою розриву функції.

Розрізняють такі види розривів. Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив в точці x_0 називають розривом першого роду, точку x_0 — точкою розриву першого роду.

Рис. 3.



Зокрема, якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то розрив в точці x_0 називають усувним, а точку x_0 — точкою усувного розриву. У цьому випадку досить до визначити функцію лише в одній точці x_0 , поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0 .

Якщо $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то розрив в точці x_0 називають неусувним, а точку x_0 — точкою неусувного розриву. Величину $\delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називають стрибком функції.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (4.3) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається розривом другого роду, а сама точка x_0 — точкою розриву другого роду.

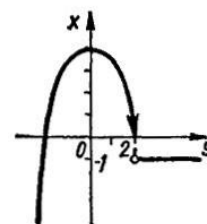


Рис. 4.

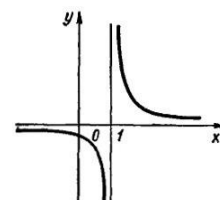


Рис. 5.

4.2. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x), f(x) g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (4.4)$$

(остання за умови, що $g(x) \neq 0$).

Теорема 2. Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ неперервна в точці x_0 .

Теорема 3. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Означення. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Означення. Функція називається неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b .

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Сформулюємо деякі з них.

Теорема 1. (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює, нулю: $f(c) = 0, a < c < b$.

Геометричний зміст цієї теореми такий (рис. 6): неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox , перетинає цю вісь.

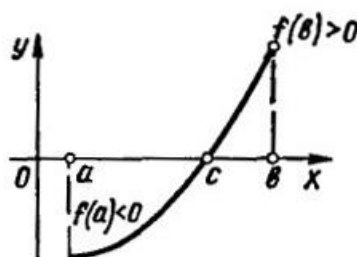


Рис. 6.

Теорема 2 (друга теорема Больцано — Коші). Нехай функція неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває, на його кінцях різних значень: $f(a) = A, f(b) = B, A \neq B$. Тоді для довільного числа $\mu \in (A; B)$ знайдеться таке число $c \in (a; b)$, що $f(c) = \mu$.

Отже, неперервна функція при переході від одного значення до другого набуває також всіх проміжних значень.

Зміст теореми 2 ілюструється на рис. 7.

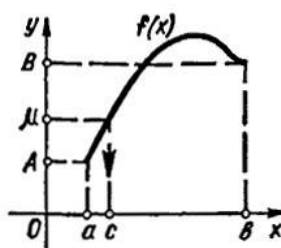


Рис. 7.

Теорема 3 (Вейерштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.

Отже, неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ і найменшого значення $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ (рис. 8).

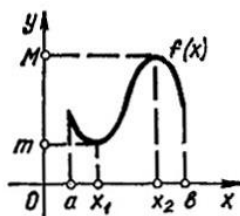


Рис. 8.