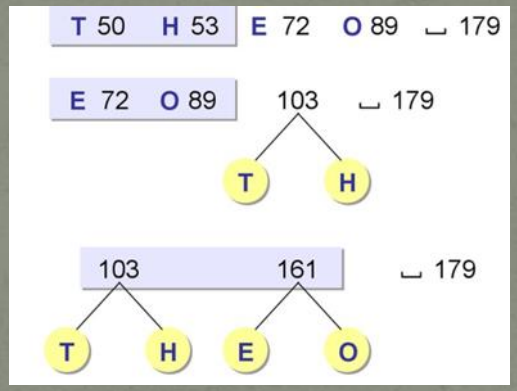
# Лекція 3*2. Практичні прийоми оцінювання ефективності коду.

1. Умова оптимальності коду. Теорема Фано.
2. Приклади оцінювання ефективності коду.


| | % | | % | | % |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 8.1 | K | 0.4 | U | 2.4 |
| B | 1.4 | L | 3.4 | V | 0.9 |
| C | 2.7 | M | 2.5 | W | 1.5 |
| D | 3.9 | N | 7.2 | X | 0.2 |
| E | 13.0 | O | 7.9 | Y | 1.9 |
| F | 2.9 | P | 2.0 | Z | 0.1 |
| G | 2.0 | Q | 0.2 | | |

алгоритм стиснення даних Шеннона - Фано




Девід Хаффман

Кафедра КІ та кібербезпеки
Ю.Бродський

# 1. Умова оптимальності коду. Теорема Фано.

Якщо дано джерело з обсягом алфавіту $N$ та ентропією $H(X)$, то, застосовуючи код з основою $m$, можливо забезпечити середнє число двійкових символів на літеру алфавіту джерела, що лежить у межах

теорема Фано

$$\frac{H(X)}{\log_2 N} \le n_{сер} < \frac{H(X)}{\log_2 N} + 1.$$

Зокрема, при $N$=2 (3.2) набуває вигляду

$$H(X) \le n_{сер} < H(X) + 1. \qquad (3.3)$$

Іншими словами, середня кількість двійкових елементів коду, що відображає символи алфавіту джерела, принаймні дорівнює ентропії джерела і може перевищувати її на одиницю. Якщо ймовірність кодових слів $p(x_k)$ задовольняє умові

$$p(x_k) = N^{-n(x_k)}.$$

можливо побудувати оптимальний код, у якого

$$n_{сер} = \frac{H(X)}{\log_2 N}.$$

## 2. Приклади оцінювання ефективності коду.

Надмірність:

**Приклад 3.1.** Джерело має алфавіт із чотирьох символів А, Б, В, Г із ймовірностями $p(\text{А})=0,5$; $p(\text{Б})=0,25$; $p(\text{В})=p(\text{Г})=0,125$. Визначити надмірність повідомлень, складених із цього алфавіту.

*Рішення*. Ентропія джерела

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i) =$$

$$= -0,5\log_2 0,5 - 0,25\log_2 0,25 - 0,125\log_2 0,125 - 0,125\log_2 0,125 =$$

$$= 0,5 + 0,5 + 0,375 + 0,375 = 1,75 \quad \textit{біт / символ}$$

Максимальна ентропія $H_{\max} = \log_2 4 = 2$.

Надмірність повідомлень складе

$$D = \frac{H_{\max}(X) - H(X)}{H_{\max}(X)} = \frac{2 - 1,75}{2} = 0,125. \blacksquare$$

**Приклад 3.2.** Відносні частоти появи букв українського алфавіту у зв'язному тексті відповідно до [5] зведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Відносні частоти вживання букв української алфавіту

| Літера | Частота | Літера | Частота | Літера | Частота | Літера | Частота |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | 0,138 | Е | 0,042 | Я | 0,019 | Ю | 0,008 |
| О | 0,086 | С | 0,037 | Ь | 0,016 | Ж | 0,007 |
| Н | 0,068 | К | 0,033 | Б | 0,013 | Ш | 0,005 |
| А | 0,064 | М | 0,029 | Г | 0,013 | Є | 0,005 |
| И | 0,055 | У | 0,027 | Ч | 0,011 | Щ | 0,004 |
| В | 0,046 | Д | 0,027 | Х | 0,011 | Ф | 0,003 |
| Т | 0,045 | Л | 0,027 | Ї | 0,010 | Ґ | <0,001 |
| І | 0,044 | П | 0,025 | Ц | 0,010 | | |
| Р | 0,043 | З | 0,020 | Й | 0,009 | | |

Визначити ентропію та середню надмірність тексту українською мовою.

*Рішення.* Ентропія текстового повідомлення:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{34} p(x_i)\log_2 p(x_i) =$$

$$= -0{,}138\log_2 0{,}138 - 0{,}086\log_2 0{,}086 - \ldots - 0{,}003\log_2 0{,}003 =$$

$$= 4{,}5356 \quad біт/символ$$

Максимальна ентропія $H_{max} = \log_2 34 = 5{,}0874$.

Надмірність повідомлень складе

$$D = \frac{H_{max}(X) - H(X)}{H_{max}(X)} = \frac{5{,}0874 - 4{,}5356}{5{,}0874} = 0{,}1085. \blacksquare$$

Усунення надмірності може досягатися використанням саме нерівномірних кодів, які враховують ймовірність появи літер у повідомленні. Літери, що мають велику ймовірність, кодуються більш короткими кодовими послідовностями, а більш довгі комбінації присвоюються рідкісними літерами.

Ю. Бродський Кафедра КІ та кібербезпеки

**Приклад 3.3.** Розглянемо джерело з прикладу 3.1, що має алфавіт з чотирьох символів А, Б, В, Г з ймовірностями p(А)=0,5; p(Б)=0,25; p(В)=p(Г)=0,125. Для передачі каналом використовується нерівномірний код А→0, Б→10, В→110, Г→111.

Визначити середню кількість двійкових символів, що припадають на один символ джерела. Порівняти з ентропією джерела.

Характеристики нерівномірного коду

| Символ $x_i$ | $x_1$ =А | $x_2$=Б | $x_3$ =В | $x_4$ =Г |
|---|---|---|---|---|
| Ймовірність $p_i$ | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,125 |
| Код | 0 | 10 | 110 | 111 |
| Число біт $n_i$ | 1 | 2 | 3 | 3 |

Середня кількість двійкових символів, що припадають на один символ джерела:

$$n_{сер} = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot n_i = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 + 0{,}125 \cdot 3 = 1{,}75 \text{ біт/сим}$$

Таким чином, середня кількість двійкових розрядів, що припадають на один символ, що передається в канал, дорівнює ентропії джерела $H(X)=n_{ср}=1,75$, тобто. для даного джерела нерівномірний код виявляється більш економічним, ніж рівномірний і оптимальним. При цьому коефіцієнт стиснення

$$\mu = \frac{\log_2 N}{n_{ср}} = \frac{\log_2 4}{1,75} = \frac{2}{1,75} = 1,1429,$$

тобто швидкість передачі по каналу зв'язку при використанні нерівномірного кодування може бути в 1,1429 разів більше ніж при рівномірному кодуванні. ■

**Приклад 3.4.** Символи українського алфавіту закодовані відповідно до табл. 3.3. (принципи побудови кодової таблиці будуть розглянуті нижче). Визначити середню кількість двійкових символів, що припадають на один символ джерела. Порівняти з ентропією джерела.

Розв'язок

Таблиця 3.3 – Нерівномірне кодування букв українського алфавіту

| Літера | Ймовірність $p_i$ | Код | Число біт $n_i$ | Літера | Ймовірність $p_i$ | Код | Число біт $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | 0,138 | 101 | 3 | З | 0,020 | 110111 | 6 |
| О | 0,086 | 1111 | 4 | Я | 0,019 | 110100 | 6 |
| Н | 0,068 | 1001 | 4 | Ь | 0,016 | 011110 | 6 |
| А | 0,064 | 1000 | 4 | Б | 0,013 | 010100 | 6 |
| И | 0,055 | 0110 | 4 | Г | 0,013 | 001001 | 6 |
| В | 0,046 | 0011 | 4 | Ч | 0,011 | 001000 | 6 |
| Т | 0,045 | 0001 | 4 | Х | 0,011 | 1101101 | 7 |
| І | 0,044 | 0000 | 4 | Ї | 0,010 | 1101100 | 7 |
| Р | 0,043 | 11101 | 5 | Ц | 0,010 | 1101011 | 7 |
| Е | 0,042 | 11100 | 5 | Й | 0,009 | 0111111 | 7 |
| С | 0,037 | 11001 | 5 | Ю | 0,008 | 0111110 | 7 |
| К | 0,033 | 11000 | 5 | Ж | 0,007 | 0101011 | 7 |
| М | 0,029 | 01110 | 5 | Ш | 0,005 | 11010101 | 8 |
| У | 0,027 | 01001 | 5 | Є | 0,005 | 11010100 | 8 |
| Д | 0,027 | 01000 | 5 | Щ | 0,004 | 01010101 | 8 |
| Л | 0,027 | 01011 | 5 | Ф | 0,003 | 010101001 | 9 |
| П | 0,025 | 00101 | 5 | Ґ | 0,000 | 010101000 | 9 |

*Рішення.* Середня кількість двійкових символів, що припадають на один символ джерела

$$n_{сер} = \sum_{i=1}^{34} p_i \cdot n_i = 0{,}138 \cdot 3 + 0{,}086 \cdot 4 + \ldots + 0{,}002 \cdot 9 + 0{,}000 \cdot 9 = 4{,}5720.$$

Таким чином, середня кількість двійкових розрядів на один символ, що передається в канал, $n_{сер}$=4,572, що дещо більше, ніж визначена в прикладі 3.2. ентропії джерела $H(X)$=4,5356. Однак $n_{сер}$ менше максимальної ентропії $H_{max}=\log_2 34=5{,}0874$, тобто для зазначеного джерела нерівномірний код виявляється більш економічним, ніж рівномірний. При цьому коефіцієнт стиснення

$$\mu = \frac{\log_2 N}{n_{ср}} = \frac{\log_2 34}{4{,}572} = \frac{5{,}0875}{4{,}572} = 1{,}1128,$$

тобто швидкість передачі по каналу зв'язку при використанні нерівномірного кодування може бути в 1,1128 разів більше ніж при рівномірному кодуванні.

**Приклад 3.5.** Нехай ймовірності появи кожного з дев'яти повідомлень зведено в табл. 3.5. Побудувати код Шеннона-Фано, визначити максимальну ентропію *Hmax*, ентропію джерела *H(X)*, середнє число біт на символ nсер, коефіцієнт стиснення μ.

Рішення. Побудову коду зведемо у табл. 3.5.

| Символ $x_i$ | $p(x_i)$ | Розбиття повідомлень на групи | | | | | Код | $n(x_i)$ | $n(x_k)\cdot p(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,35 | 1 | 1 | | | | 11 | 2 | 0,7 |
| $x_2$ | 0,15 | 1 | 0 | | | | 10 | 2 | 0,3 |
| $x_3$ | 0,13 | 0 | 0 | 1 | | | 001 | 3 | 0,39 |
| $x_4$ | 0,09 | 0 | 0 | 0 | | | 000 | 3 | 0,27 |
| $x_5$ | 0,09 | 0 | 1 | 1 | 1 | | 0111 | 4 | 0,36 |
| $x_6$ | 0,08 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 0110 | 4 | 0,32 |
| $x_7$ | 0,05 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 0100 | 4 | 0,2 |
| $x_8$ | 0,04 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 01011 | 5 | 0,2 |
| $x_9$ | 0,02 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 01010 | 5 | 0,1 |

Доведемо, що знайдений код близький до оптимального. Ентропія джерела повідомлення:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{9} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -(0{,}35\log_2 0{,}35 + 0{,}15\log_2 0{,}15 + 0{,}13\log_2 0{,}13 +$$
$$+ 0{,}09\log_2 0{,}09 + 0{,}09\log_2 0{,}09 + 0{,}08\log_2 0{,}08 + 0{,}05\log_2 0{,}05 +$$
$$+ 0{,}04\log_2 0{,}04 + 0{,}02\log_2 0{,}02) = 2{,}75 \quad \textit{біт / символ}$$

Середня довжина кодового слова або середня кількість біт на символ

$$n_{ср} = \sum_{i=1}^{9} p(x_i)n(x_i) = 0{,}7 + 0{,}3 + 0{,}39 + 0{,}27 + 0{,}36 + 0{,}32 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0.1 = 2{,}84 \text{ бит/сим.}$$

$H(X) \approx n_{ср}$, отже, отриманий код задовольняє умові Фано (3.3) і дуже близький до оптимального, проте не досягає лівої межі (3.3).

Максимальна ентропія $H_{max} = \log_2 N = \log_2 9 = 3{,}1699.$

Коефіцієнт стиснення $\mu = \dfrac{\log_2 N}{n_{ср}} = \dfrac{\log_2 9}{2{,}84} = \dfrac{3{,}1699}{2{,}84} = 1{,}1162.$ ■

**Приклад 3.6.** Нехай алфавіт джерела містить вісім елементів: А, Б, В, Р, Д, Е, Ж, З, що з'являються з ймовірностями: $p$(А)=0,16; $p$(Б)=0,11; $p$(В)=0,09; $p$(Г)=0,03; $p$(Ґ)=0,39; $p$(Д)=0,13; $p$(Е)=0,03; $p$(Є)=0,06. Побудувати код Шеннона-Фано і Гаффмана, визначити максимальну ентропію $H\max$, ентропію джерела $H(X)$, середнє число біт на символ $n_{сер}$, коефіцієнт стиснення $\mu$. Порівняти ефективність кодів Шеннона-Фано та Гаффмана.

*Рішення.* Розташуємо літери алфавіту повідомлень у порядку зменшення ймовірностей і надамо їм для зручності позначення $x1$, … $x8$. $x1$ відповідає літері Ґ, $x2$ ~А, $x3$ ~Д, $x4$ ~Б, $x5$ ~В, $x6$ ~ Є, $x7$ ~Е, $x8$~Г.

Побудову коду Шеннона-Фано зведемо у таблицю

| $x_i$ | $p(x_i)$ | Розбиття повідомлень на підгрупи | | | | | Код | $n(x_i)$ | $n(x_k)\cdot p(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,39 | 1 | 1 | | | | 1 1 | 2 | 0,78 |
| $x_2$ | 0,16 | 1 | 0 | | | | 1 0 | 2 | 0,32 |
| $x_3$ | 0,13 | 0 | 1 | 1 | | | 0 1 1 | 3 | 0,39 |
| $x_4$ | 0,11 | 0 | 1 | 0 | | | 0 1 0 | 3 | 0,33 |
| $x_5$ | 0,09 | 0 | 0 | 0 | | | 0 0 0 | 3 | 0,27 |
| $x_6$ | 0,06 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 0 0 1 1 | 4 | 0,24 |
| $x_7$ | 0,03 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 0 1 0 1 | 5 | 0,15 |
| $x_8$ | 0,03 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 0 1 0 0 | 5 | 0,15 |

## Ентропія джерела повідомлення

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{8} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -(0{,}39\log_2 0{,}39 + 0{,}16\log_2 0{,}16 + 0{,}13\log_2 0{,}13 +$$

$$+ 0{,}11\log_2 0{,}11 + 0{,}09\log_2 0{,}09 + 0{,}06\log_2 0{,}06 + 0{,}03\log_2 0{,}03 + 0{,}03\log_2 0{,}03 =$$

$$= 2{,}5455 \quad бім / \text{СИМВОЛ}$$

## Середня кількість біт на символ

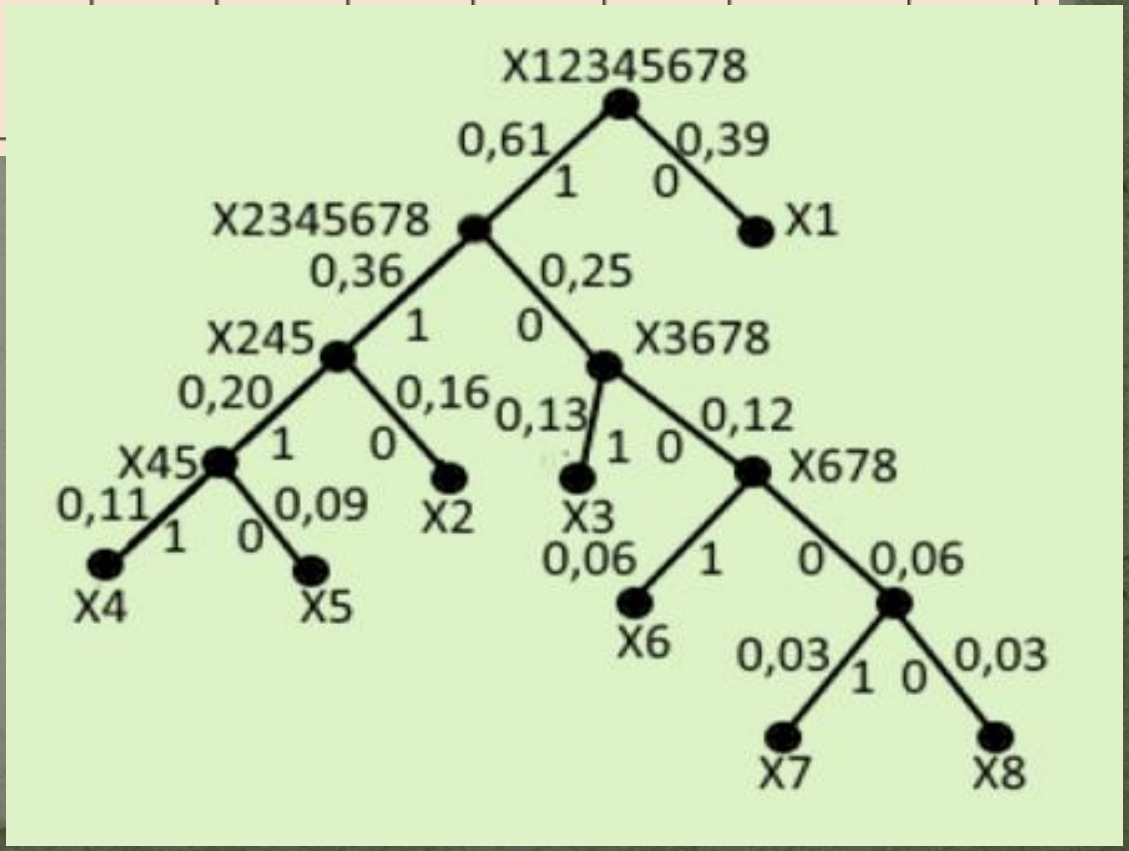
$$n_{серш} = \sum_{i=1}^{8} p(x_i)n(x_i) = 0{,}78 + 0{,}32 + 0{,}39 + 0{,}33 + 0{,}27 + 0{,}15 + 0{,}15 = 2{,}63 \text{ біт/сим.}$$

Максимальна ентропія $H_{\max} = \log_2 N = \log_2 8 = 3.$

Коефіцієнт стиснення $\mu = \dfrac{\log_2 N}{n_{ср}} = \dfrac{\log_2 8}{2{,}63} = \dfrac{3,}{2{,}63} = 1{,}1407.$

# Побудову коду Гаффмана зведемо в таблицю і збудуємо кодове дерево

| Крок 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $p(x_i)$ | $x_i$ | $p(x_i)$ | $x_i$ | $p(x_i)$ | $x_i$ | $p(x_i)$ | $x_i$ | $p(x_i)$ | $x_i$ | $p(x_i)$ | $x_i$ | $p(x_i)$ |
| $x_1$ | 0,39 | $x_1$ | 0,39 | $x_1$ | 0,39 | $x_1$ | 0,39 | $x_1$ | 0,39 | $x_1$ | 0,39 | $x_{2453678}$ | **0,61** |
| $x_2$ | 0,16 | $x_2$ | 0,16 | $x_2$ | 0,16 | $x_{45}$ | **0,20** | $x_{3678}$ | **0,25** | $x_{245}$ | **0,36** | $x_1$ | 0,39 |
| $x_3$ | 0,13 | $x_3$ | 0,13 | $x_3$ | 0,13 | $x_2$ | 0,16 | $x_{45}$ | 0,20 | $x_{3678}$ | 0,25 | | |
| $x_4$ | 0,11 | $x_4$ | 0,11 | $x_{678}$ | **0,12** | $x_3$ | 0,13 | $x_2$ | 0,16 | | | | |
| $x_5$ | 0,09 | $x_5$ | 0,09 | $x_4$ | 0,11 | $x_{678}$ | 0,12 | | | | | | |
| $x_6$ | 0,06 | $x_6$ | 0,06 | $x_5$ | 0,09 | | | | | | | | |
| $x_7$ | 0,03 | $x_{78}$ | **0,06** | | | | | | | | | | |
| $x_8$ | 0,03 | | | | | | | | | | | | |



Кодові символи, одержані з таблиці коду Хафмана та рисунку кодового дерева мають такий вигляд:

| Літера | Г | А | Д | Б | В | Є | Е | Г |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
| Код | 0 | 110 | 101 | 1111 | 1110 | 1001 | 10001 | 10000 |

Для коду Гаффмана середня кількість біт на символ:

$$n_{серх} = \sum_{i=1}^{8} p(x_i)n(x_i) = 0{,}39 + 0{,}48 + 0{,}39 + 0{,}44 + 0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}15 + 0{,}15 = 2{,}60 \text{ біт/сим.}$$

Коефіцієнт стиснення $\mu = \dfrac{\log_2 N}{n_{ср}} = \dfrac{\log_2 8}{2{,}60} = \dfrac{3}{2{,}60} = 1{,}1538.$

Аналіз отриманих результатів показує, що відоме з теорії співвідношення $H(X) \le n_{серх} \le n_{серш} \le H_{\max}$ виконується.