

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 141.00.1/Б /ОК6-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 4 / 1

## **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Державного університету  
«Житомирська політехніка»  
протокол від 12 вересня 2024 р.  
№ 5

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

### **до практичних робіт з дисципліни «ФІЗИКА»**

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»  
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»  
освітньо-професійна програма «Комп'ютеризоване управління енергетичними  
системами»  
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і  
робототехніки  
кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації  
ім. проф. Б.Б. Самотокіна

Рекомендовано на засіданні  
кафедри робототехніки,  
електроенергетики та  
автоматизації  
ім. проф. Б.Б. Самотокіна  
23 серпня 2024 р., протокол № 7

Розробники: к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій у медицині та  
телекомунікаціях Роман КОЛОМІЄЦЬ

Житомир  
2024

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 141.00.1/Б /ОК6-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 4 / 2

Методичні вказівки до практичних робіт з дисципліни «Фізика» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» освітньо-професійна програма «Комп'ютеризоване управління енергетичними системами» [Електронне видання]. – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 54 с.

**Розробники:** к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій у медицині та телекомунікаціях Роман КОЛОМІЄЦЬ

**Рецензенти:**

*Анна ГУМЕНЮК* – кандидат технічних наук, доцент кафедри кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна.

*Олександр ДОБРЖАНСЬКИЙ* – кандидат технічних наук, доцент кафедри кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна.

Затверджено Вченою радою факультету комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки  
(протокол № 6 від «28» серпня 2024 р.)

Методичні рекомендації призначені для забезпечення підготовки, виконання та захисту практичних робіт з дисципліни «Фізика» студентами освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» освітньо-професійна програма «Комп'ютеризоване управління енергетичними системами»

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 141.00.1/Б /ОК6-1-2024
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 4 / 3</i>

## ЗМІСТ

Практична робота № 1 .....	5
Практична робота № 2 .....	6
Практична робота № 3 .....	10
Практична робота № 4 .....	15
Практична робота № 5 .....	21
Практична робота № 6 .....	24
Практична робота № 7 .....	26
Практична робота № 8 .....	29

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 141.00.1/Б /ОК6-1-2024
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 4 / 4</i>

## ВСТУП

Дані методичні рекомендації розраховані на студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Практичні роботи охоплюють окремі розділи лекційного курсу з навчальної дисципліни «Фізика».

Звіти з практичних робіт оформлюються на стандартних аркушах формату А4 під загальним титульним.

Захисти робіт передбачаються на наступних практичних або лабораторних заняттях і є необхідною умовою допуску до екзамену.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 5

## Практична робота № 1

### Тема: Задачі на перевірку розмірностей фізичних величин.

#### Порядок виконання роботи

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки вздовж осі  $x$ :

$$x = f(t),$$

де  $f(t)$  - деяка функція від часу.

Шлях:

$$s = s(t),$$

де  $s(t)$  - відрізок траєкторії (завжди додатній), пройдений тілом за час  $t$ .

Миттєва швидкість:

$$V_x = \frac{dx}{dt}.$$

Середня шляхова (скалярна) швидкість:

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

де  $\Delta s$  - шлях, пройдений точкою за інтервал часу

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Миттєве прискорення:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Середнє прискорення:

$$\langle w_x \rangle = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}.$$

#### Приклад розв'язування задач.

Приклад 1.1. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням

$$s = 3 + 2t + 0.1t^2 + 0.2t^3 + 0.5t^4 \text{ (м)}$$

Знайти величину швидкості та прискорення тіла для моменту часу  $t_1=0$  і  $t_2=5$ с. Визначити середню швидкість і середнє прискорення в інтервалі від 0 до 5с.

Розв'язок:

Знаходимо швидкість і прискорення так:

$$V = \frac{ds}{dt}; w = \frac{dv}{dt}$$

$$V = 2 + 0.2t + 0.6t^2 + 2t^3 \text{ (1.1)}$$

$$w = 0.2 + 1.2t + 6t^2 \text{ (1.2)}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 6

Обчислюємо числові значення  $v$  і  $w$  для моментів часу  $t_1 = 0$  і  $t_2 = 5c$ .

$$V_1 = 2m / c; \quad w_1 = 0.2m / c^2$$

$$V_2 = 2 + 0.2 \cdot 5 + 0.6 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 = 268m / c$$

$$w_2 = 0.2 + 1.2 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 = 156.2m / c^2$$

З формул (1.1) і (1.2) бачимо, що рух не буде рівнозмінним, і спрощені формули

$$\langle V \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad \langle w \rangle = \frac{w_1 + w_2}{2}$$

для знаходження середньої швидкості і середнього прискорення застосувати не можна.

Середню швидкість і середнє прискорення знаходимо по загальних формулах:

$$\langle V \rangle = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}; \quad \langle w \rangle = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (1.3)$$

Підставивши у формули (1.3) числові значення  $s$  і  $v$ , визначимо середні значення швидкості і прискорення:

$$\langle V \rangle = \frac{3 + 2 \cdot 5 + 0.1 \cdot 5^2 + 0.2 \cdot 5^3 + 0.5 \cdot t^4}{5} = 70'' / -$$

$$\langle w \rangle = \frac{258 - 2}{5} = 130.5'' / -^2$$

Відповідь:

$$v_1 = 2'' / -; V_2 = 268'' / -;$$

$$w_1 = 0.2'' / -^2; w_2 = 156.2'' / -^2;$$

$$\langle V \rangle = 70'' / -; \langle w \rangle = 130.5'' / -^2$$

## Практична робота 2

### Задачі з класичної механіки на дії з векторними величинами

#### Основні формули.

Кут повороту:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t), \quad \mathbf{p} \perp \mathbf{r} = const.$$

Кутова швидкість:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Кутове прискорення:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 7

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Модуль тангенціального прискорення:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \beta \cdot R,$$

де  $v$  – модуль лінійної швидкості точки, яка обертається,  $R$  – радіус обертання.

Модуль нормального прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}$$

Кут між повним прискоренням  $\vec{a}$  і нормальним  $\vec{a}_n$

$$\varphi = \arccos \frac{a_n}{a}$$

#### Приклад розв'язування задач

Приклад 1.2. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням:

$$\varphi = A + B \cdot t + C \cdot t^2 + D \cdot t^3,$$

де  $B = 1 \text{ рад/с}$ ,  $C = 1 \text{ рад/с}^2$ ,  $D = 1 \text{ рад/с}^3$ .

Знайти кутову швидкість, кутове, тангенціальне і повне прискорення колеса, його радіус і лінійну швидкість, якщо відомо, що до кінця другої секунди руху нормальне прискорення точок, що лежать на ободі колеса,  $w_n = 3.46 \cdot 10^2 \text{ м/с}^2$

Розв'язок. Кутову швидкість знаходимо як першу похідну по часу від кута  $\varphi$ :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2 \cdot C \cdot t + 3 \cdot D \cdot t^2$$

$$\omega = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 17 \text{ (рад/с)}$$

Кутове прискорення знаходимо як першу похідну від  $\omega$ :

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 2 \cdot C + 6 \cdot D \cdot t =$$

$$= 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 14 \left( \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} \right).$$

Кутова швидкість  $\omega$  і доцентрове прискорення зв'язані таким співвідношенням:

$$w_n = \omega^2 \cdot R$$

звідки знаходимо радіус

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 8

$$R = \frac{w_n}{\omega^2}$$

Перевіримо розмірність  $R$ :

$$[R] = \frac{[w_n]}{[\omega^2]} = \frac{m/c^2}{1/c^2} = m$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$R = \frac{3.46 \cdot 10^2}{17^2} = 1.2 (m)$$

Знаходимо лінійну швидкість за формулою:

$$V = \omega \cdot R$$

$$[V] = [1/c] \cdot [m] = [m/c]$$

Обчислюємо:

$$v = 17 \cdot 1.2 = 20.4 (m/c)$$

Використовуючи зв'язок між кутовим і тангенціальним прискоренням, знайдемо:

$$w_\tau = \beta \cdot R$$

$$[w_\tau] = [\beta] \cdot [R] = 1/c^2 \cdot m = m/c^2$$

Обчислюємо:

$$w_\tau = 1.2 \cdot 14 = 16.8 (m/c^2)$$

Знаходимо повне прискорення:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{(346)^2 + (16.8)^2} = 346.4 (m/c^2)$$

Відповідь:

$$\omega = 16 \text{ рад/с}; \beta = 14 \text{ рад/с}^2;$$

$$R = 1.2 \text{ м}; v = 20.4 \text{ м/с};$$

$$w_\tau = 16.8 \text{ м/с}^2; w = 346.4 \text{ м/с}^2$$

### Закони Ньютона.

Імпульс (кількість руху) матеріальної точки масою  $m$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Другий закон Ньютона:

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

$$\text{або: } m \cdot \vec{w} = \vec{F}, \text{ при } m = \text{const},$$

де  $\vec{F}$  - сила, що діє на точку.

В механіці розрізняють такі види сил:

1) сила пружності:

$$F = -k \cdot x,$$

де  $k$  - жорсткість (коефіцієнт пружності),  $x$  - абсолютна деформація;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 9

2) сила тяжіння

$$F_T = mg,$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння;

3) сила гравітаційного притягання

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

де  $G$  - гравітаційна постійна;  $m_1$  і  $m_2$  - маси взаємодіючих тіл;  $r$  - відстань між ними;

4) сила тертя ковзання

$$F = k \cdot N,$$

де  $k$  - коефіцієнт тертя ковзання;  $N$  - сила нормального тиску.

### Приклад розв'язування задач.

Приклад 1.3. Невагомий блок закріплений на вершині двох похилих площин, що складають з горизонтом кути  $\alpha = 45^\circ$  і  $\beta = 30^\circ$ . Тягарі А і В рівної маси з'єднані ниткою, перекинутою через блок. Коефіцієнти тертя ковзання тягарів по похилих площинах однакові  $k_1 = k_2 = 0.1$

Знайти: 1) прискорення, з яким рухаються гирі; 2) натяг нитки. Тертям в блоці знехтувати.

Дано:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$m_1 = m_2 = m = 1 \text{ кг}$$

$$k_1 = k_2 = k = 0.1$$

$$w - ?; \quad T - ?$$

Розв'язок. Нехай система рухається в напрямку, вказаному стрілкою

Зобразимо всі сили, діючі на тягарі, причому сили тяжіння розкладемо на перпендикулярні до площини і паралельні площинам ковзання складові відповідно

$$m_1 \cdot \vec{g} = \vec{N}_1 + \vec{F}_1, \quad m_2 \cdot \vec{g} = \vec{N}_2 + \vec{F}_2.$$

Розглянемо рух системи двох зв'язаних тягарів під дією рівнодійної всіх сил, що діють на тягарі. За третім законом Ньютона

$$\vec{N}_1 = -\vec{N}'_1, \quad \vec{N}_2 = -\vec{N}'_2$$

тому ці сили в рівнодійну ніякого вкладу не вносять. Величина рівнодійної всіх сил:

$$F = F_1 - F_{TP1} - F_{TP2} - F_2.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 10

З рисунка видно, що (1.4)

$$F_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha, \quad F_2 = m_2 \cdot g \cdot \sin \beta$$
(1.5)

За означенням: сили тертя ковзання

$$F_{TP1} = N_1 \cdot k_1, \quad F_{TP2} = N_2 \cdot k_2,$$
(1.6)

де

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha, \quad N_2 = m_2 \cdot g \cdot \cos \beta,$$

$g$  - прискорення вільного падіння.

Враховуючи (1.5) і (1.6), запишемо вираз для рівнодійної сили:

$$F = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - m_2 \cdot g \cdot \sin \beta - k_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha - k_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \beta$$
(1.7)

Для даної задачі вираз (1.6) спрощується тому, що  $m_1 = m_2 = m, \quad k_1 = k_2 = k$ :

$$F = m \cdot g \cdot (\sin \alpha - \sin \beta) - k \cdot m \cdot g \cdot (\cos \alpha + \cos \beta)$$
(1.8)

Запишемо другий закон Ньютона для системи з двох тягарів:

$$F = (m_1 + m_2) \cdot w = 2 \cdot m \cdot w$$
(1.9)

і визначимо прискорення:

$$w = \frac{F}{2 \cdot m}$$
(1.10)

Підставивши  $F$  (1.8) в вираз (1.10), знаходимо:

$$w = g \cdot \frac{(\sin \alpha - \sin \beta) - k(\cos \alpha + \cos \beta)}{2}$$
(1.11)

Підставляємо числові дані і обчислюємо:

$$w = 9.8 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 0.1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \approx 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Так як  $w > 0$ , то напрям руху вибрано вірно.

Для того, щоб визначити натяг нитки, розглянемо окремо рух тягаря В під дією прикладених до нього сил. Рівнодійна всіх сил, прикладених до цього тягаря дорівнює:

$$F' = T - m_2 \cdot g \cdot (\sin \beta + k \cdot \cos \beta)$$
(1.12)

Запишемо другий закон Ньютона для тягаря В:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 11

$$F' = m_2 \cdot w \quad (1.13)$$

Підставляємо  $F'$  із (1.13) в вираз (1.12)

$$m_2 \cdot w = T - m_2 \cdot g \cdot (\sin \beta + k \cdot \cos \beta) \quad (1.14)$$

З виразу (1.14) знаходимо натяг нитки.

$$T = m_2 \cdot (w + g(\sin \beta + k \cdot \cos \beta)) \quad (1.15)$$

Підставляємо дані і проводимо обчислення:

$$T = 1 \cdot (2.5 \cdot 10^{-2} + 9.8 \cdot (0.5 + 0.1 \cdot 0.5 \frac{\sqrt{3}}{2})) \approx 5.8 (Н)$$

Відповідь:

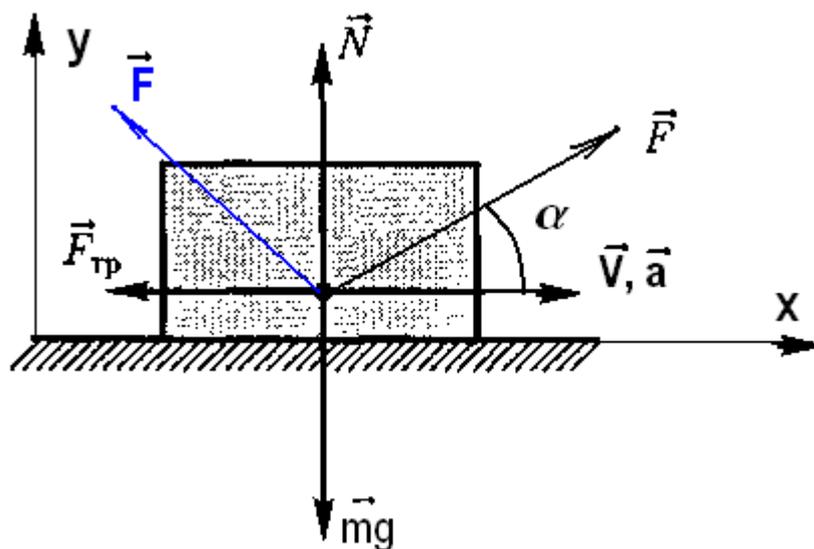
$$w = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2, T = 5.8 \text{ Н}$$

### Практична робота 3

#### Задачі з динаміки поступального руху

##### Приклад розв'язування задач

Приклад 3.1. Тіло рухається під дією сили  $\vec{F}$ , що спрямована під кутом альфа до горизонту. Див рис. Маса тіла  $m$ . Коефіцієнт тертя тіла о площину, по який рухається тіло  $\mu$ . Знайти прискорення, з яким воно рухається.



Записуємо рівняння руху тіла в формі 2-го закону Ньютона:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 12

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер}}.$$

Обговорюємо вибір напрямку осей координат.

Переходимо до скалярних рівнянь:

$$\text{На вісь } X : \quad ma = F \cos \alpha - F_{\text{тер}}.$$

$$\text{На вісь } Y: \quad 0 = F \sin \alpha - mg + N.$$

Для рішення недостатньо рівнянь, тому що рівнянь 2, а треба знайти 3 змінні.

Необхідне рівняння просте. Це взаємозв'язок сили тертя з силою нормального тиску:

$$F_{\text{тер}} = \mu N.$$

Таким чином маємо систему з 3 рівнянь з 3 шуканими змінними. Шукаємо розв'язки и обговорюємо методи пошуку розв'язок. Працюємо за методом Гаусса ( підстановка):

$$N = -F \sin \alpha + mg$$

$$F_{\text{тер}} = \mu N = \mu(-F \sin \alpha + mg).$$

Повертаємося до 1-го рівняння та отримаємо:

$$ma = F \cos \alpha - F_{\text{тер}}.$$

$$a = \frac{1}{m} (F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)).$$

Це і є відповідь,

Обговоримо, що відбудеться якщо сила діє в іншому напрямку ( новий напрям сили наведено на рис синім коляром):

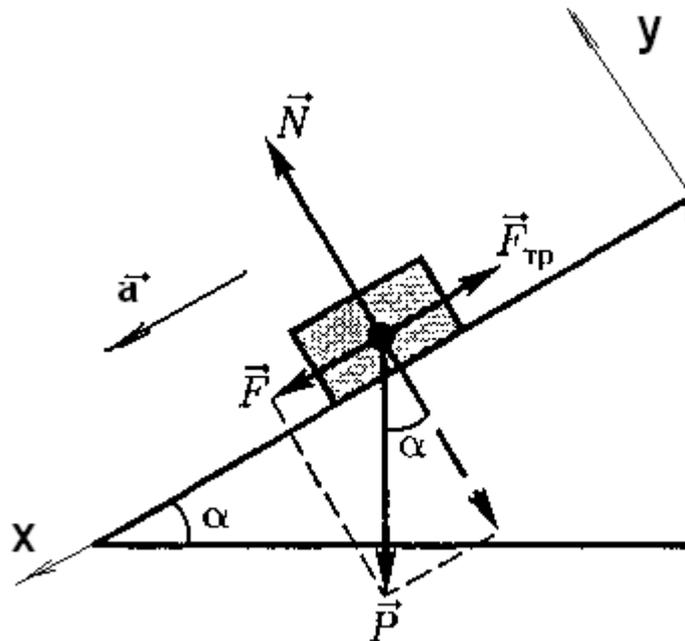
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 13

$$a = \frac{1}{m} (F \cos \alpha - \mu(mg + F \sin \alpha)).$$

Перевірте самостійно цю відповідь.

Обговоримо наслідки цього виразу

Приклад 3.2. Тіло рухається по похилій площині, що має нахил кут альфа до горизонту. Див рис. Маса тіла  $m$ . Коефіцієнт тертя тіла о площину, по якій рухається тіло  $\mu$ . Знайти прискорення, з яким воно рухається.



$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Записуємо векторне рівняння руху тіла в формі 2-го закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер}.$$

Обговорюємо вибір напрямку осей координат.

Переходимо до скалярних рівнянь:

$$\text{На вісь X : } ma = mg \sin \alpha - F_{тер}.$$

$$\text{На вісь Y: } 0 = -mg \cos \alpha + N.$$

Для рішення недостатньо рівнянь, тому що рівнянь 2, а треба знайти 3 параметра.

Необхідне рівняння просте. Це взаємозв'язок сили тертя з силою нормального тиску:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 14

$$F_{\text{тер}} = \mu N.$$

Таким чином маємо систему з 3 рівнянь з 3 шуканими змінними.  
Шукаємо розв'язки и обговорюємо методи пошуку розв'язок.  
Працюємо за методом Гаусса ( підстановка):

$$N = mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тер}} = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha.$$

Повертаємося до 1-го рівняння та отримаємо:

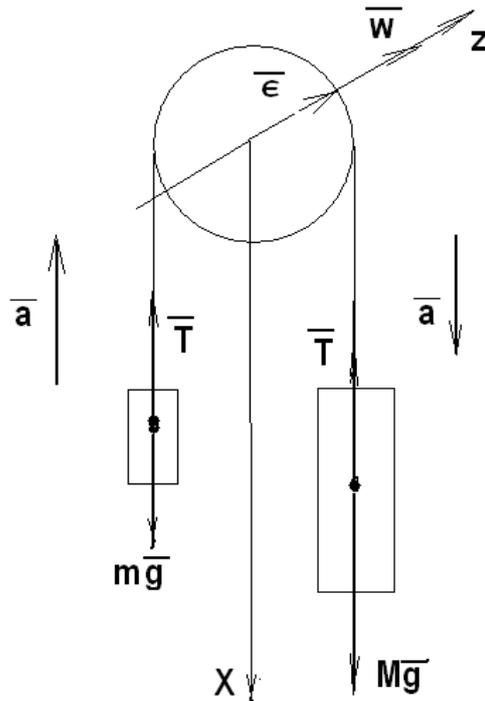
$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тер}}.$$

$$ma = mg \sin \alpha - \mu \cdot mg \cos \alpha.$$

Відповідь:

$$a = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Приклад 3.3. Невагова та нерозтяжна нитка перекинута через невагомий блок. Блок може обертатися без тертя. До кінців нитки прикріплено дві маси  $m$  і  $M$ . Див рис. Знайти прискорення, з яким рухаються тіла та силу натягу нитки.



Записуємо векторні рівняння руху кожного тіла в формі 2-го закону Ньютона:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 15

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T}.$$

Обговорюємо вибір напрямку осей координат.

Переходимо до скалярних рівнянь:

$$\text{На вісь X : } -ma = mg - T$$

$$Ma = Mg - T$$

Обраховуємо кількість змінних ( a, T) та порівнюємо з кількістю рівнянь.

Система нон варіантна . 2 рівняння – 2 шуканих параметра.

Шукаємо розв'язок:

$$(M + m)a = Mg - mg$$

$$a = (Mg - mg)/(M + m) = g \cdot (M - m)/(M + m)$$

Обговорюємо отриманий результат.

Знаходимо силу натягу T:

$$T = ma + mg$$

Це і є відповіді даної задачі.

Обговорюємо малюнок відносно векторів, що спрямовано вздовж осей Z.

#### Практична робота 4.

##### Задачі з динаміки обертального руху

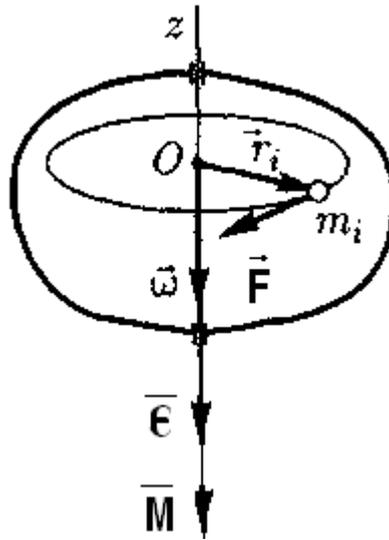
##### Основні формули.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі:

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon}$$

де J - момент інерції тіла,  $\omega$  та  $\varepsilon$  – кутова швидкість та кутове прискорення.

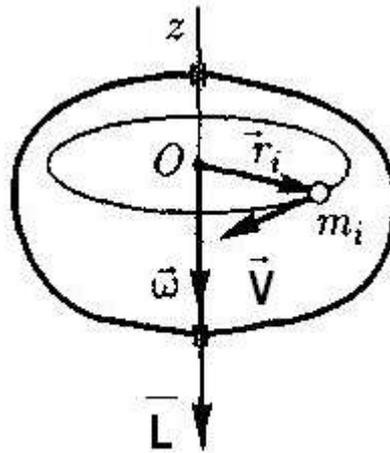
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 16



Моментом імпульсу матеріальної точки А відносно нерухомої точки О зветься фізична величина, яка знаходиться як векторний добуток:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}],$$

де  $\mathbf{r}$  - радіус-вектор, проведений з точки О в точку А;  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  - імпульс матеріальної точки (див.рис.);  $\mathbf{L}$  - вектор моменту імпульсу.



Напрямок вектору моменту імпульсу  $\mathbf{L}$  при обертання тіла за часовою стрілкою.

Приклад 1. Маховик, момент інерції якого  $245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , обертається, роблячи 20 об/с. Через хвилину після того, як на нього перестав діяти обертовий момент, він зупинився. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) число обертів, які зробив маховик до зупинки.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 17

### Розв'язок

Обертальний рух маховика проходить тільки під дією моменту сил тертя і є рівносповільненим. Запишемо для нього основний закон динаміки обертального руху.

$$M = \beta \cdot J \quad (1)$$

Кутове прискорення зручно знайти з формули:

$$\beta = \frac{\omega_0 - \omega_k}{t} \quad (2)$$

Підставивши  $\beta$  з формули (1) в формулу (2) і врахувавши, що  $\omega_k = 0$ , маємо:

$$M = \frac{J \cdot \omega_0}{t}$$

За означенням  $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \nu_0$ , тому:

$$M = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu_0 \cdot J}{t}$$

Перевіримо розмірність:

$$[M] = \frac{[J] \cdot [\nu_0]}{[t]} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}}{\text{с}} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Проводимо обчислення:

$$M = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 20 \cdot 245}{60} = 513 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$$

Кількість обертів знайдемо за формулою:

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}$$

де  $\varphi$  -кутовий шлях, здійснений маховиком за час  $t$ .

$$\varphi = \beta \cdot t^2 / 2;$$

Враховуючи це, знаходимо число обертів:

$$N = \frac{\beta \cdot t^2}{4\pi}$$

Обчислення проводимо самостійно :

Відповідь:  $M = 513 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $N = 600$

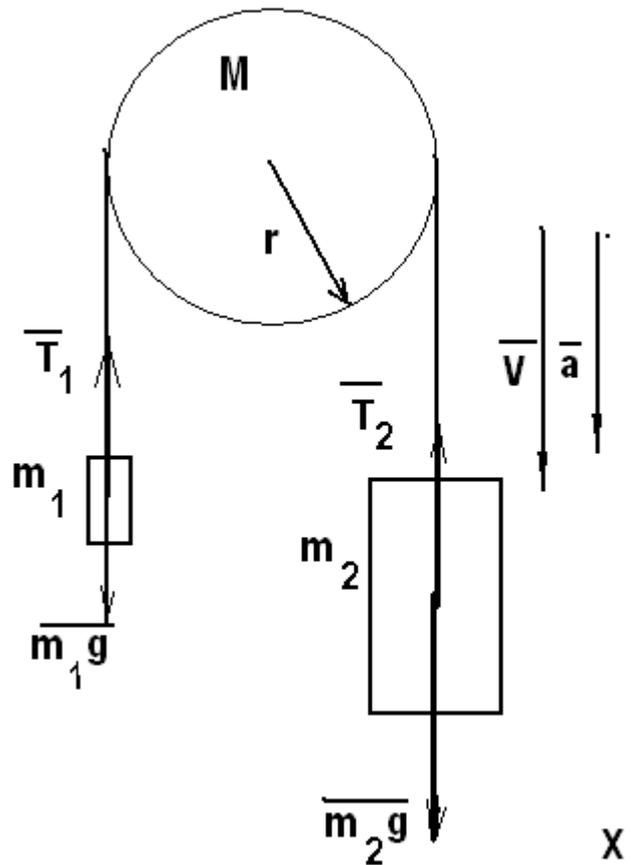
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 18

$$m_1 < m_2$$

M

$$d = 0.6 \text{ м}$$

$$T_1, T_2, \varepsilon, a - ?$$



Класична задача на застосування законів динаміки поступального та обертового рухів. Розв'язка задачі іде відповідно до правила, що ми з вами використовували при аналізі задач на закону Ньютона.

Записуємо векторні рівняння руху кожного тіла ( у нас рухається 3 маси).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 19

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1$$

$$m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$$

$$J \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

де  $J$  - момент інерції барабану, маса якого розподілена по всьому диску,  
 $\vec{\varepsilon}$  - кутове прискорення.

Відповідно плану пошуку розв'язок задач на закони динаміки вводимо в розгляд координатну вісь «Х», що спрямована по напрямку руху тіл.

Тоді можна отримати скалярну форму рівнянь:

$$-m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2$$

$$J \varepsilon = -M_1 + M_2$$

Момент інерції твердого тіла маса, що має форму диска, може бути розраховано за виразом з табл. відповідних формул для цього параметру. Обираємо тверде тіло - тонкостінний циліндр (диск) :

$$J_{\text{диску}} = M \cdot r^2 / 2$$

Моменти сил, що діють в системі неважко зв'язати з силами та з координатами їх прикладення. Це робиться відповідно формулам для означення моменту сили:

$$M = F \cdot l$$

Відповідно до нашої задачі ця формула записується в вигляді:

$$M_1 = T_1 \cdot r \quad M_2 = T_2 \cdot r$$

Кутове прискорення маховика можна зв'язати з його лінійним прискоренням  $a$ . Формула такого зв'язку має вигляд:

$$a = \varepsilon \cdot r$$

Якщо підставити всі наведені вирази до вхідної системи рівнянь, то можна отримати систему з трьох рівнянь з трьома шуканими змінними. Ці змінні: сили натягу нитки  $T_1$  та лінійне прискорення  $a$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 20

Спробуйте розв'язати систему рівнянь самостійно. Рекомендації. Починайте з 3-го рівняння.

$$J\varepsilon = -M_1 + M_2 \quad Mr^2 a / 2r = -T_1 r + T_2 r$$

Після скорочення на радіус:  $Ma = -T_1 + T_2$

Та система має вигляд:

$$-m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2$$

$$Ma / 2 = -T_1 + T_2$$

Якщо підставити величини сил  $T_i$  з перших двох рівнянь в третє:

$$-m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2$$

$$Ma / 2 = -m_1 a - m_1 g - m_2 a + m_2 g$$

можна отримати рівняння для прискорення:

$$a = \frac{-m_1 g + m_2 g}{M / 2 + m_1 + m_2}$$

Вирази для сил натягу нитки знайдіть самостійно з перших двох рівнянь вхідної системи рівнянь.

Розрахунки шуканих параметрів виконайте самостійно та порівняйте отримані величини з типовими.

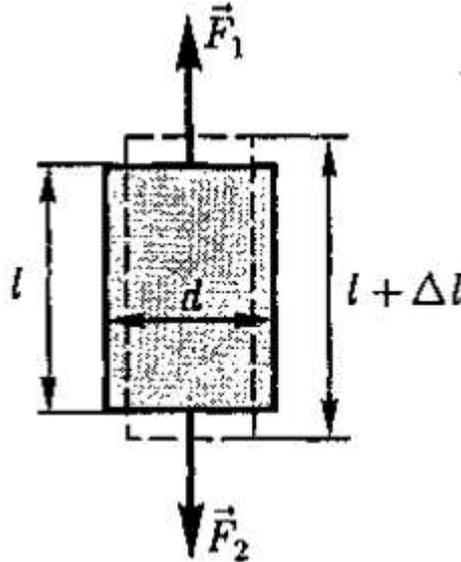
Для обговорення та самостійної роботи: Тонкий стержень довжиною  $l = 40\text{см}$  і масою  $m = 0,6\text{кг}$  обертається навколо осі, яка проходить через середину стержня перпендикулярно його осі. Рівняння руху стержня  $\varphi = At + Bt^3$ , де  $A = 1\text{рад/с}$ ,  $B = 0,1\text{рад/с}^3$ . Знайти обертовий момент  $M$  в момент часу  $t = 2\text{с}$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 21

## Практична робота 5. Розрахунок механічної напруженості при деформації

### Основні положення та формули.

Всі реальні тіла під дією сил змінюють свою форму і розміри, тобто деформуються. Деформація називається пружною, якщо після припинення дії зовнішніх сил тіло приймає початкові розміри і форму.



відносна деформація :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

Механічне напруження :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

де  $S$  - площа поперечного перерізу;  $F$  - сила, що діє в перерізі.

Закон Гука в узагальненій формі:

$$\sigma = E\epsilon,$$

$E$ - модуль Юнга.

Потенціальна енергія пружно деформованої пружини:

$$U = \frac{k \cdot x^2}{2},$$

де  $k$  - жорсткість пружини,  $x$  - абсолютна деформація.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 22

Робота, виконана зовнішніми силами:

$$A = E_2 - E_1.$$

Приклад розв'язування задач.

Приклад 1. Пружина жорсткістю  $k = 10^3 \text{ Н/м}$  була стиснута на  $x_1 = 5 \text{ см}$ . Яку треба виконати роботу, щоб стиснення пружини збільшити до  $x_2 = 15 \text{ см}$ ?

$$k = 10^3 \text{ Н / м}$$

$$x_1 = 5 \text{ см}$$

$$x_2 = 15 \text{ см}$$

---


$$A - ?$$

Розв'язок

Задачі такого класу можливо найпростіше розв'язати з використанням поняття енергії пружної деформації. Відомо, що взаємозв'язок енергії кінцевого та початкового стану системи зв'язані в виконаною роботою виразом:

$$A = U_2 - U_1. \quad (1)$$

Значення потенційної енергії  $U_i$  знайдемо за відомими величинами деформації пружини в кожному стані та властивостями самої пружини:

Загальний вираз для розрахунку енергії пружини має вигляд

$$U_i = \frac{k \cdot x_i^2}{2}$$

Застосуємо наведену формулу до початкового стану та остаточного стану пружини. В такому випадку:

$$U_1 = \frac{k \cdot x_1^2}{2}; \quad U_2 = \frac{k \cdot x_2^2}{2}$$

Якщо підставити вирази для енергії в першу формулу задачі, то отримуємо наступний результат:

$$A_{2-1} = \frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 23

Розрахунки виконати самостійно і надати відповідь.

Приклад 2. Пружина жорсткістю  $k = 10^4 \text{ Н/м}$  стиснута силою  $F = 200 \text{ Н}$ . Знайти роботу зовнішньої сили, яка додатково стискує цю пружину ще на  $\Delta l = 1 \text{ см}$ .

$$k = 10^4 \text{ Н / м}$$

$$F = 200 \text{ Н}$$

$$\Delta l = 1 \text{ см}$$

$$A_{1-2} = ?$$

### Розв'язок

Запропонована задача схожа з попередньою, але з особливості. Як і раніше використовуємо, що енергії кінцевого та початкового стану системи зв'язані в виконану роботу виразом:

$$A = U_2 - U_1 \quad (3)$$

Значення потенційної енергії  $U_i$  треба шукати за відомими величинами деформації пружини в кожному стані та властивостями самої пружини відповідно виразу:

$$U_i = \frac{k \cdot x_i^2}{2}$$

В той же час величини деформації пружини в кожному зі станів невідомі. Їх слід шукати. Якщо є дані за силою, що діє на пружину, то знайти її деформацію можливо відповідно до закону Гука в його найпростішій формі:

$$F_{\text{пруж}} = k \cdot x$$

Стосовно початкового стану можна записати:  $x_1 = F / k$

Що стосується кінцевого стану, то відповідно до умов задачі в цьому стані деформація пружини є наступною:  $x_2 = x_1 + \Delta l$

Якщо відома деформація в кінцевому стані, то вираз для роботи має вигляд

$$A = \frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2} = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{k}{2} ((F / k + \Delta l)^2 - (F / k)^2)$$

Розрахунки виконати самостійно і надати відповідь.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідас ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 24

**Практична робота 6.**  
**Задачі, пов'язані з обчисленням моментів інерції.**

Основні формули

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ	ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ
$\vec{\omega}$ -кутова швидкість	$\vec{V}$ -лінійна швидкість
$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$ -кутове прискорення	$\vec{w} = \dot{\vec{v}}$ -лінійне прискорення
$J$ -момент інерції	$m$ -маса
$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ -момент імпульсу	$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ -імпульс тіла
$\varphi = \omega \cdot t$ -кут повороту при рівномірному обертанні	$s = v \cdot t$ -шлях при рівномірному русі
$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\beta \cdot t^2}{2}$ - кут повороту при рівнозмінному обертанні по колу	$s = s_0 + v_0 \cdot t \pm \frac{a \cdot t^2}{2}$ -шлях при рівнозмінному прямолінійному русі
$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ або $J \cdot \vec{\beta} = \vec{M}$ -основний закон динаміки обертального руху	$\dot{\vec{P}} = \vec{F}$ або $m \cdot \vec{w} = \vec{F}$ ( $m = const$ ) -другий закон Ньютона
$T = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$ - кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі	$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ -кінетична енергія при поступальному русі
$dA = M \cdot d\varphi$ -робота при обертанні	$dA = F_s \cdot ds$ -робота при поступальному русі

Приклад розв'язування задач.

Приклад 5. Маховик, момент інерції якого  $245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  обертається, роблячи 20 об/с. Через хвилину після того, як на нього перестав діяти обертовий момент, він зупинився. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) число обертів, які зробив маховик до зупинки.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 25

Обертальний рух маховика проходить тільки під дією моменту сил тертя і є рівносповільненим. Запишемо для нього основний закон динаміки обертального руху.

$$M = \beta \cdot J \quad (1.26)$$

Кутове прискорення зручно знайти з формули:

$$\beta = \frac{\omega_0 - \omega_k}{t} \quad (1.27)$$

Підставивши  $\beta$  з формули (1.27) в формулу (1.26) і врахувавши, що  $\omega_k = 0$ , маємо:

$$M = \frac{J \cdot \omega_0}{t}$$

За означенням  $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot v_0$ , тому:

$$M = \frac{2 \cdot \pi \cdot v_0 \cdot J}{t}$$

Перевіримо розмірність:

$$[M] = \frac{[J] \cdot [v_0]}{[t]} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}}{\text{с}} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Проводимо обчислення:

$$M = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 20 \cdot 245}{60} = 513 (\text{Н} \cdot \text{м})$$

Кількість обертів знайдемо за формулою:

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}$$

де  $\varphi$  - кутовий шлях, здійснений маховиком за час  $t$ .

$$\varphi = \omega_{cp} \cdot t; \quad \omega_{cp} = \frac{\omega_0}{2} = \pi \cdot v_0$$

Враховуючи це, знаходимо число обертів:

$$N = \frac{v_0 \cdot t}{2}$$

Проводимо обчислення:

$$N = \frac{20 \cdot 60}{2} = 600$$

Відповідь:  $M = 513 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $N = 600$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 26

## Практична робота 7.

### Газові закони

#### Основні формули

#### 1. Рівняння стану ідеального газу

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

де  $P$ ,  $V$ ,  $T$  - відповідно тиск, об'єм та температура газу;  
 $m$  - його маса;  $\mu$  - молекулярна маса;  $R$  - універсальна газова стала.

#### 2. Густина газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}$$

#### 3. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

$$P = nkT,$$

де  $n$  - число частинок в одиниці об'єму;  $k$  - постійна Больцмана.

#### 4. Тиск суміші газів (закон Дальтона)

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

де  $P_i$  - тиск  $i$ -ої компоненти газової суміші,

$$P_i = \frac{m_i RT}{\mu_i V}$$

#### 5. Молярна маса суміші газів

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_i}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_i}{\mu_i}}$$

де  $m_i$ ,  $\mu_i$  - маса і молекулярна маса  $i$ -ої компоненти газової суміші.

#### 6. Газові закони: ( $m = const$ )

$PV = const$  - закон Бойля-Маріотта

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ - закон Шарля} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ - закон Гей-Люссака}$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \text{ - об'єднаний газовий закон.}$$

**Приклад 1.** Скільки молекул містить в собі один кубічний метр газу при температурі  $27^\circ\text{C}$  та тиску  $5 \text{ Н/м}^2$ ?

$$T = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$p = 5 \text{ Н/м}^2$$

$$V = 1 \text{ м}^3$$

---


$$n, N, - ?$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 27

$$n = p/kT,$$

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

Розрахунки шуканих параметрів виконайте самостійно та порівняйте отримані величини з типовими.

**Приклад 2.** При тиску 10 ат густина кисню дорівнює 12,2 кг/м<sup>3</sup>. Визначити температуру газу.

$p = 10 \text{ атм.} = xxx \text{ Н / м}^2$ $\text{O}_2$ $\mu = xxx$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $T, - ?$
--

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}$$

Розрахунки шуканих параметрів виконайте самостійно та порівняйте отримані величини з типовими.

**Приклад 3.** В закритій посудині знаходиться газ, молярна маса якого  $\mu = 32$  кг/кмоль, тиск  $P = 10^7$  Па. Визначити густину  $\rho$  цього газу, концентрацію молекул  $n_0$ , якщо при нагріванні посудини з газом до температури 100<sup>0</sup>С тиск зростає до  $P_1 = 2 \cdot 10^7$  Па.

**Розв'язок.** З рівняння стану ідеального газу

$$PV = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T \quad (1)$$

знаходимо, що густина газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT} \quad (2)$$

Нагриваючи газ ізохорно ( $V = const$ ), між тиском  $P$  і  $P_1$  і температурами  $T$  і  $T + \Delta T$  встановлюємо наступну залежність (закон Шарля):

$$\frac{P}{P_1} = \frac{T}{T + \Delta T} \quad (3)$$

звідки

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 28

$$T = \frac{p\Delta T}{p_1 - p} \quad (4)$$

Тепер з (4) та (2), маємо

$$\rho = \frac{p\mu(p_1 - p)}{Rp\Delta T} = \frac{\mu(p_1 - p)}{R\Delta T}.$$

З основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

$$p = n_0 k T \quad (5)$$

знаходимо

$$p = n_0 k T \Rightarrow n_0 = \frac{p}{k T} = \frac{p(p_1 - p)}{k p \Delta T} = \frac{p_1 - p}{k \Delta T}$$

де  $k$  - стала Больцмана.

Перевіряємо розмірність:

$$[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad [n_0] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{К}} = \text{м}^{-3}.$$

Підставляємо числові значення величин і знаходимо

$$\rho = \frac{32 \cdot 10^{-3} (2 \cdot 10^7 - 10^7)}{1,31 \cdot 10^2} = 3,85 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$$

$$n_0 = \frac{2 \cdot 10^7 - 10^7}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^2} = 0,72 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

**Приклад 4.** Балон ємністю 20л містить 4г азоту та 10г гелію при температурі 17°C. Визначити тиск суміші газів.

$$t = 17^\circ \text{C}$$

$$V = 20 \text{ л} = xxx \text{ м}^3$$

$$m_{\text{N}} = 4 \text{ г}$$

$$m_{\text{He}} = 10 \text{ г}$$

$$\text{N}_2, \text{ He}$$

$$\mu_1 = 28 \text{ xxxxxxxx}$$

$$\mu_2 = 2 \text{ xxxxxxxx}$$

---


$$P_{\text{общ}} - ?$$

Тиск суміші газів описується законом Дальтона

$$P = P_{\text{N}_2} + P_{\text{He}} \quad (1)$$

де  $P_i$  - тиск  $i$  - ої компоненти газової суміші.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 29

Дуже важливо, що кожний з компонентів суміші веде себе незалежно від другого (гази не заважають один одному і кожний компонент газу займає повний об'єм сосуду)

$$P_i = \frac{m_i RT}{\mu_i V} \quad (2)$$

Підстановка (2) в (1) дозволяє отримати остаточну формулу для розрахунків:

$$P = \left( \frac{m_N}{\mu_N} + \frac{m_{He}}{\mu_{He}} \right) \frac{RT}{V}$$

Розрахунки шуканих параметрів виконайте самостійно та порівняйте отримані величини з типовими.

## Практична робота 8.

### Задачі на радіоактивний розпад (правило Содді)

#### Основні формули.

Повна механічна енергія не взаємодіючої частинки в полі консервативних сил

$$E_i = T_i + U_i = const,$$

де  $T_i$  - кінетична енергія,  $U_i$  - потенціальна енергія частинки.

Потенціальна енергія тіла в полі тяжіння Землі:

$$U = m \cdot g \cdot h$$

де  $h$  - висота тіла над рівнем, прийнятим за початок відліку потенціальної енергії.

Потенціальна енергія пружно деформованої пружини:

$$U = \frac{k \cdot x^2}{2},$$

де  $k$  - жорсткість пружини,  $x$  - абсолютна деформація.

Робота, виконана зовнішніми силами:

$$A = E_2 - E_1$$

Закон збереження імпульсу системи  $N$  тіл ( $\vec{p}_i$  - імпульс одного тіла)

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const$$

Швидкість двох куль після абсолютно не пружного центрального удару:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Швидкість двох куль після абсолютно пружного центрального удару:

$$\vec{u}_1 = \frac{2 \cdot m_2 \cdot \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad \vec{u}_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot \vec{v}_1 + (m_2 - m_1) \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 30

де  $m_1$  і  $m_2$  - маси куль;  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  - їх швидкості до удару.

### Приклад розв'язування задач.

Приклад 1. Визначити коефіцієнт пружності пружини буферів залізничного вагона вагою  $2,5 \cdot 10^6$  н, якщо він, рухаючись зі швидкістю 8 м/с, наштовхнеться на перешкоду, внаслідок чого пружина стискується на 10 см.

$$P = mg = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Н}$$

$$V = 8 \text{ м/с}$$

$$\Delta l = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

---


$$k - ?$$

### Розв'язок

Класична задача на застосування закону збереження енергії в механічних явищах. Розглянемо фізичні процеси, що відбуваються в задачі.

Вагон, що рухається, володіє кінетичною енергією:

$$T = \frac{mV^2}{2} \quad \text{- це слід вважати початковим станом системи.}$$

Це енергія за результатом взаємодії перетворюється в енергію деформованої пружини двох буферів. Потенційна енергія такого стану, який будемо вважати кінцевим, можливо розрахувати за формулою для енергії деформованої пружини:

$$P = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$$

Закон збереження енергії для випадку, коли вся кінетична енергія вагона, що рухається, перетворилася в енергію 2-х деформованих пружин, має наступний вигляд:

$$P = K; \quad 2 \cdot \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$$

Множник «2» з'явився в наведеному рівнянні тому, що у вагона є дві пружини.

Останній вираз дозволяє знайти шукану величину коефіцієнту жорсткості пружин буфера:

$$k = \frac{mV^2}{2 \cdot \Delta l^2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 31

Розрахунки виконайте самостійно та порівняйте отриману величину з типовими (взяти з умов задач, що рекомендовано для самостійної роботи)

Приклад 1. З пружинного пістолета вистрелили кулю, маса якої 5 г. Жорсткість пружини  $k = 1.25 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ . Пружина була стиснута на  $\Delta l = 8 \text{ см}$ . Якої максимальної висоти досягне куля, якщо кінець дула пістолета знаходиться на висоті  $h_0 = 1.5 \text{ м}$  від поверхні Землі і розташований під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до горизонту. Опором повітря знехтувати.

Дано:

$$m = 5 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$k = 1.25 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$$

$$\Delta l = 8 \text{ см} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

---


$$h_m = ?$$

#### Розв'язок

Рух кулі зручно розглядати в плоскій декартовій системі координат, початок якої співпадає з точкою вильоту кулі, вісь  $OX$  паралельна поверхні Землі, а вісь  $OY$  перпендикулярна до неї. Як видно з рисунка, висота кулі над поверхнею Землі в довільний момент часу:

$$h = h_0 + y \quad (1.16)$$

Максимальна висота підйому:

$$h_m = h_0 + H_m \quad (1.17)$$

Значення  $H_m$  знайдемо, розглядаючи рух кулі як рух тіла, кинутого під кутом  $\alpha$  до горизонту.

Складний криволінійний рух по параболі можна зобразити як суму двох незалежних прямолінійних рухів: рівномірного зі швидкістю  $v_2 = v_0 \cdot \cos \alpha$  вздовж осі  $OX$ , і рівнозмінного вздовж осі  $OY$ , причому при підйомі кулі цей рух являється рівносповільненим з прискоренням  $g$ .

Проекція швидкості  $v_0$  в довільний момент часу на вісь  $OY$ :

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t,$$

(1.18)

а координата

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 32

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2};$$

$$y = H_m \text{ при } t = t_{\text{підйому}}.$$

Значення  $t_{\text{підйому}}$  знайдемо з умови, що в найвищій точці траєкторії  $v_y = 0$ :

:

$$v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t_{\text{підйому}} = 0$$

(1.19)

звідки

$$t_{\text{підйому}} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

(1.20)

Підставивши значення  $t_{\text{підйому}}$ , знаходимо:

$$H_m = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}.$$

(1.21)

Тоді

$$h_m = h_0 + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$$

(1.22)

Невідому початкову швидкість, що входить у вираз (1.22), знайдемо із закону збереження енергії, який полягає в тому, що потенціальна енергія пружно деформованої пружини дорівнює кінетичній енергії кулі  $U=T$

$$T = \frac{m \cdot v_0^2}{2}; \quad U = \frac{k \cdot (\Delta l)^2}{2}; \quad (1.23)$$

звідки

$$v_0^2 = \frac{k}{m} \cdot (\Delta l)^2. \quad (1.24)$$

Враховуючи (1.24), отримуємо кінцеву формулу:

$$h_m = h_0 + \frac{k \cdot (\Delta l)^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cdot m \cdot g}. \quad (1.25)$$

Підставляємо в формулу значення величин і виконуємо обчислення:

$$h_m = 1.5 + \frac{1.25 \cdot 10^3 \cdot (8 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (5 \cdot 10^{-1})^2}{2 \cdot 9.8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \approx 21.9 \text{ (м)}$$

Відповідь : Максимальна висота підйому кулі  $h_m = 21.9 \text{ м}$

В цій задачі, крім закону збереження енергії, вивчено рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, розглянуто пружні властивості твердого тіла.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 33

Приклад 3. Бойок пального молота масою  $m_1 = 600\text{кг}$  падає з деякої висоти на палю масою  $m_2 = 105\text{кг}$ . Знайти ККД бойка, вважаючи удар непружним. Корисною вважати енергію, яка затрачується на забивання палі.

Цікава задача, але її розв'язок не дуже складний.

$$m_1 = 600\text{кг}$$

$$m_2 = 105\text{кг}$$

---


$$\eta - ?$$

### Розв'язок

Обговоримо фізичні процеси, що відбуваються при такого типу ударній взаємодії. Головне ідентифікувати: що це за тип взаємодії – пружна чи не пружна. Відповідь є безпосереднє в умові задачі. Дійсно, в задачі питають за величину к.к.д. В такому випадку, зрозуміло, що втрати енергії є. Тому удар слід вважати не пружним.

Для не пружного удару виконується тільки закон збереження імпульсу, а закон збереження енергії порушується.

Нехай маса  $m_2$ , що рухається зі швидкістю  $V_{\text{удара}}$ , б'є масу  $m_1$ , яка знаходиться в стані спокою. Після такого не пружного удару обидві маси рухаються сумісно зі швидкістю  $V_{\text{віддачі}}$

Перейдемо до математичної інтерпретації задачі. Для цього запишемо рівняння закону збереження імпульсу для цього удару:

$$m_2 V_{\text{удара}} = (m_1 + m_2) \cdot V_{\text{віддачі}}$$

Перейдемо до використання енергетичних співвідношень. Запишемо рівняння для к.к.д. процесу. Явище віддачі слід вважати процесом, що не іде на користі ударної взаємодії. Тому енергію, яка на його втрачається, і формує менший за одиницю к.к.д. удару. В такому випадку вираз для к.к.д. слід записати в наступному вигляді:

$$\eta = \frac{E_{\text{корисна}}}{E_{\text{загальна, втрачена}}} = \frac{\frac{m_2 V_{\text{удара}}^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) V_{\text{віддачі}}^2}{2}}{\frac{m_2 V_{\text{удара}}^2}{2}} = 1 - \frac{\frac{(m_2 + m_1) V_{\text{віддачі}}^2}{2}}{\frac{m_2 V_{\text{удара}}^2}{2}}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.06-05.01/ 274.00.1/Б /ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 34

З рівняння закону збереження імпульсу ( перша формула ) можна знайти взаємозв'язок між швидкостям тіл до і після удару. Якщо підставити отримані результати в формулу для к.к.д , то отримаємо:

$$\eta = \frac{m_1}{(m_2 + m_1)}$$

Дуже цікава відповідь. Його слід обговорити.

Приклад 1. ( самостійно, обговорення за мною) Куля масою  $m_1 = 2\text{ кг}$  рухається зі швидкістю  $v_1 = 3\text{ м/с}$  і зіштовхується з кулею масою  $m_2 = 1\text{ кг}$ , що рухається їй назустріч зі швидкістю  $v_2 = 4\text{ м/с}$ . Знайти швидкості куль після прямого центрального абсолютно пружного удару.

Задачі для самостійного контролю:

1. Визначити модуль Юнга матеріалу, якщо знайдено, що брусок поперечним перерізом  $2\text{ см}^2$  під навантаженням  $10^3\text{ Н}$  видовжується на  $0,025\%$  своєї початкової довжини.
2. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути на  $0,5\text{ мм}$  латунний стержень довжиною  $1\text{ м}$  та поперечним перерізом  $4\text{ см}^2$  ?