

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

А.В. КОВАЛЬ

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Навчальний посібник

За рішенням
Вченої ради ЖДТУ
протокол № ____
від _____

ЖДТУ
2018

УДК 519.876.2:681.51
К39

Рецензенти:

д.ф-м.н., проф. Михайленко В.В.

*завідувач кафедри алгебри та геометрії Житомирського
державного університету імені Івана Франка*

д.т.н., проф. Грабар І.Г.

*завідувач кафедри процесів, машин і обладнання Житомирського
національного агроекологічного університету*

д.т.н., проф. Подчаїнський Ю.О.

*завідувач кафедри метрології та інформаційно-виміральної
техніки Житомирського державного технологічного університету*

Коваль А.В.

К39 Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів: навч.
посібник / А.В. Коваль. – Житомир : ЖДТУ, 2018. – 133 с.

Навчальний посібник розкриває питання ідентифікації об'єкта та його моделі. Розглянуто основні поняття ідентифікації моделі та об'єкта, етапи побудови математичних моделей та основні числові характеристики випадкових процесів. Викладено шляхи експериментального визначення частотних характеристик аналогових систем. Представлені можливі шляхи визначення характеристик лінійних дискретних систем. Викладено методи апроксимації та ідентифікації характеристик технологічних об'єктів та процесів. Розглянуто особливості ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів.

Для студентів, які вивчають дисципліну «Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів».

УДК 519.876.2:681.51

© А.В. Коваль, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП	7
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	8
1.1. Основні етапи побудови математичної моделі.....	8
1.2. Класифікація найважливіших типів систем.....	9
1.3. Класифікація методів побудови математичної моделі ...	12
2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ ТА ОБ'ЄКТА	14
2.1. Постановка задачі ідентифікації.....	14
2.2. Особливості реалізації оцінки параметрів моделі за схемою розімкненого типу.....	18
2.3. Особливості реалізації оцінки параметрів моделі за схемою замкненого типу.....	20
2.4. Класифікація методів ідентифікації по способу представлення інформації про об'єкт.....	22
3. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ (ВХІДНИХ ТА ВИХІДНИХ СИГНАЛІВ)	24
3.1. Поняття випадкового процесу.....	24
3.2. Числові характеристики випадкового процесу.....	25
3.2.1 Числові характеристики неперервного випадкового процесу.....	25
3.2.2 Числові характеристики випадкового процесу, заданого дискретно.....	29
3.3. Спектральні характеристики випадкового процесу.....	31
3.3.1. Спектральна характеристика найпростішого випадкового процесу.....	32

3.3.2. Спектральна характеристика суми гармонійних коливань	32
3.3.3. Спектральна характеристика нескінченної суми гармонійних коливань.....	34
3.3.4. Спектральна характеристика неперервного стаціонарного випадкового процесу. Спектральна щільність	35
3.3.5. Взаємна спектральна щільність стаціонарних й стаціонарно зв'язаних випадкових процесів.....	36
3.3.6. Знаходження спектральної щільності стаціонарного процесу за допомогою фільтрів	37
3.3.7. Визначення частотних характеристик процесу заданого диференціальним рівнянням	38
4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	45
4.1. Визначення частотних характеристик об'єкту детермінованими сигналами	46
4.2. Статистичні методи знаходження частотних характеристик	53
4.3. Похибки визначення характеристик сигналів	57
4.3.1. Похибки зумовлені не ідеальністю моделі	57
4.3.2. Похибки зумовлені скінченністю частотної полоси пропускання	58
4.3.3. Похибки зумовлені квантуванням вхідних і вихідних сигналів об'єкта.....	58
4.3.4. Похибки зумовлені вибором часового інтервалу спостереження.....	59
4.4. Вимоги до методів ідентифікації.....	60
5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ.....	62

5.1.	Визначення частотних характеристик об'єкту заданого різницеvими рівняннями (час змінюється дискретно	62
5.2.	Реакція дискретної системи на дискретний вхідний сигнал	64
5.3.	Передатна функція лінійної дискретної системи	67
5.4.	Частотна характеристика дискретної системи.....	68
5.5.	Періодограми сигналів заданих на скінченному інтервалі	70
5.6.	Спектри сигналів дискретної системи.....	73
6.	МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК ОБ'ЄКТА	76
6.1.	Поняття апроксимації функцій та характеристик об'єктів і сигналів.....	76
6.2.	Система тригонометричних функцій ортогональних на проміжку	79
6.3.	Система ортонормованих поліномів Лежандра.....	80
6.4.	Система ортонормованих функцій на інтервалі	82
6.5.	Довільна система функцій	83
6.6.	Апроксимація динамічних характеристик об'єкта із дробово-раціональною передатною функцією	84
7.	МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	87
7.1.	Ідентифікація об'єктів управління та технологічних процесів на основі рівняння Вінера – Хопфа.....	87
7.1.1.	Визначення імпульсної перехідної функції по вимірам вхідного та вихідного сигналів	87
7.1.2.	Визначення імпульсної перехідної функції по кореляційним функціям вхідного та вихідного сигналів	91

7.1.3. Метод наближеного визначення ПФ об'єкту, оснований на апроксимації характеристик	96
7.1.4. Метод ідентифікації на узгоджених апроксимаціях імпульсної перехідної та кореляційної функцій.....	97
7.2. Ідентифікація за допомогою адаптивних моделей.....	102
7.3. Ідентифікація за допомогою градієнтного алгоритму	107
7.4. Ідентифікація параметрично заданих моделей.....	108
7.4.1 Методи визначення параметрів моделі, заданої диференціальними рівняннями	109
7.4.2. Ідентифікація за передатною функцією об'єкту, заданого диференціальним рівнянням	116
7.4.3. Ідентифікація на основі адаптивних методів визначення параметрів моделі	117
8. ОСОБЛИВОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ.....	122
8.1. Методи ідентифікації, на основі лінеаризації характеристик об'єктів	123
8.2. Гармонічна лінеаризація у задачах ідентифікації	124
8.3. Статистична лінеаризація у задачах ідентифікації нелінійних об'єктів	126
8.4. Методи ідентифікації, на основі застосування функціональних степеневих рядів.....	127
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	131

ВСТУП

Ідентифікація та моделювання є одним із важливих методів в пізнавальній та практичній діяльності сучасного фахівця.

Ідентифікація (із лат. *identifico* – ототожнювати) – встановлення тотожності невідомого об'єкта відомому на основі збігу ознак.

В посібнику розглядаються питання ідентифікації об'єкта та його моделі, а також шляхи визначення таких параметрів моделі, щоб вона за певним критерієм ідентифікувалась з об'єктом.

Надалі під терміном "об'єкт" будемо розуміти процес, явище, пристрій тощо. Всяка інженерна чи наукова діяльність в певній мірі використовує формальний або змістовний опис об'єктів в різних галузях науки та техніки. Такий опис містить певні спрощення, тому не може бути повним і є певним наближенням до реального об'єкту або його моделлю.

В інженерних та природничих науках для опису об'єктів застосовують математичний апарат, тому такі моделі називають математичними. Дослідження реальних об'єктів на основі їх математичних моделей називають математичним моделюванням. При цьому важливим етапом такого дослідження є ідентифікація об'єкта та його математичної моделі, тобто визначення параметрів і структури математичної моделі, що забезпечують найліпший збіг вихідних координат моделі та об'єкта при однакових вхідних впливах.

У сучасному стані автоматичного керування ідентифікація складних виробничих об'єктів є досить актуальною задачею. Складність цієї задачі швидко зростає по мірі переходу до автоматизації все більш складних технологічних об'єктів керування й цілих виробничих комплексів. При цьому, приходиться мати справу з об'єктами повний математичний опис яких, як правило, відсутній.

Метою даного посібника є розкриття основних підходів ідентифікації та математичного моделювання технологічних процесів і рекомендується для студентів бакалаврів та магістрів.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Існуюче різноманіття моделей розділимо на два класи: фізичні та математичні.

Фізичними є такі моделі, в яких властивості реального об'єкта представляються характеристиками також дійсного об'єкта тієї ж чи аналогічної природи; наприклад, це може бути зменшена копія об'єкта.

Математична модель це опис об'єкта, що виражається математичними символами або конструкціями. Надалі будемо розглядати лише математичні моделі.

1.1. Основні етапи побудови математичної моделі

Побудова математичної моделі об'єкта включає наступні три етапи:

1. Збір наявної апріорної інформації про досліджуваний об'єкт, виділення його структурних елементів, аналіз цих елементів та впорядкування за їх впливом на функціонування об'єкта в цілому. Цей етап завершується оформленням структурної схеми об'єкта.

2. Визначення параметрів об'єкта, які складають його суть, виділення із цього переліку основних і таких, що є другорядними(неважливими) й якими можна нехтувати.

3. Визначаються вхідна й вихідна інформація кожного структурного елемента, функціональні зв'язки між структурними елементами, зовнішні впливи як на окремі параметри системи, структурні елементи так і на об'єкт в цілому.

В загальному модель об'єкта можна представити у вигляді наступної структурної схеми [1]:

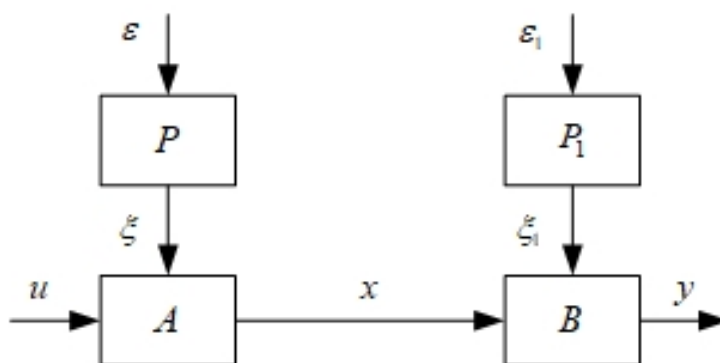


Рис. 1.1. Структурна схема моделі об'єкта

На схемі прийнято наступні позначення: A, B – структурні елементи об'єкта, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – його коефіцієнти(параметри); u, y – контрольовані (спостережні) вхідний та вихідний сигнали відповідно, які можуть бути як детермінованими так і випадковими; x – не спостережний сигнал, який опосередковано може бути оцінений через спостережний сигнал y ; $\varepsilon, \varepsilon_1$ – перешкоди, як правило, випадкові процеси типу білого шуму, які можуть містити детерміновану складову, неконтрольовані сигнали; ξ, ξ_1 – випадкові процеси після фільтрації перешкод $\varepsilon, \varepsilon_1$.

Таким чином, вхідний сигнал $u(t)$ перетворюється об'єктом у вихідний $y(t)$, або кажуть, об'єкт входу $u(t)$ за певними правилами (законами) ставить у відповідність вихід $y(t)$. В математичній моделі ці правила (закони) об'єднують (формалізують) терміном оператор (функціонал або оператор зв'язку) об'єкта f й записують

$$y(t) = f(u(t)), \text{ або } y = f(u) \quad (1.1)$$

Надалі, оскільки, більшість понять, які стосуються реальних об'єктів та їх моделей, співпадають, замість термінів " об'єкт", " модель" будемо вживати термін система. Вхідні сигнали можуть спеціально подаватись в систему для ідентифікації(активний експеримент), а можуть існувати в системі як керуючі або збурюючі впливи(пасивний експеримент).

1.2. Класифікація найважливіших типів систем

Розглянемо наступну класифікацію систем за їх основними системними ознаками:

1) Одномірні та багатомірні.

Система з одним входом та виходом називають *одномірними*.

Системи, що мають декілька входів та виходів називають *багатомірними*;

2) Статичні та динамічні.

Система вважається *статичною*, якщо її вихідний сигнал визначається тільки поточним вхідним і не залежить від попередніх значень вхідного сигналу, не залежить від передісторії, від поведінки системи в минулому. Статичні моделі характеризуються миттєвою реакцією на вхідну дію, дають опис стаціонарного режиму.

Система є *динамічною*, якщо її вихід залежить не тільки від входу в поточний момент, але й від попередніх значень входу. Динамічні моделі визначають поведінку об'єкта в часі.

3) Детерміновані та стохастичні.

Система вважається **детермінованою**, якщо вихідний сигнал однозначно визначається вхідним сигналом та структурою й не залежить від не контрольованих, випадкових факторів. В реальних умовах спостережні вихідні сигнали змінюються не тільки під впливом спостережних вхідних сигналів, але й під впливом не спостережних випадкових перешкод. Якщо ці перешкоди малі, або відсутні, то систему можна розглядати як детерміновану.

Система, в якій випадкові перешкоди суттєво впливають на вихідний сигнал, називається **стохастичною(ймовірнісною)**. Стохастична модель відображає вплив випадкових факторів, тому між вихідними та вхідними величинами існує не однозначний функціональний зв'язок, а ймовірнісний. Зрозуміло, в цьому випадку, змінні стану системи описуються в термінах теорії ймовірностей: законів розподілу(диференціальний чи інтегральний) та числових характеристик випадкових величин(математичне сподівання, дисперсія, кореляційні моменти тощо).

4) Система називається **лінійною**, якщо для неї виконується принцип суперпозиції, тобто реакція системи на лінійну комбінацію (суперпозицію) двох входів

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad (1.2)$$

дорівнює такій же лінійній комбінації відповідних виходів

$$\begin{aligned} f(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) &= f(c_1 u_1(t)) + f(c_2 u_2(t)) = \\ &= c_1 f(u_1(t)) + c_2 f(u_2(t)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де c_1, c_2 – довільні сталі коефіцієнти, $u_1(t), u_2(t)$ – довільні входи, в протилежному разі така система буде **нелінійною**.

5) Система називається **неперервною**, якщо значення її вхідних та вихідних сигналів змінюється або вимірюється неперервно на протязі певного проміжку часу. Для їх опису застосовуються неперервні функції та диференціальні рівняння.

Система називається **дискретною**, якщо значення її вхідних та вихідних сигналів змінюється або вимірюється дискретно на протязі певного проміжку часу. Для їх опису застосовуються дискретні (решітчасті) функції та різницеві рівняння.

6) Система називається **стаціонарною**, якщо її реакція на однаковий вхідний сигнал в різні моменти часу також є однаковою, тобто її параметри є незмінними в часі. В протилежному разі система називається **нестаціонарною**.

7) Система називається системою із **зосередженими параметрами**, якщо її вхідні та вихідні сигнали залежать тільки від часу (від однієї змінної). Моделі таких об'єктів мають опис, що

містить звичайні диференціальні рівняння, для визначення однозначного розв'язку яких задаються початкові умови.

8) Система називається системою із **розподіленими параметрами**, якщо її вихідний сигнал залежить не тільки від часу але й від просторових координат. Наприклад, розглядається концентрація певної речовини розпиленої в обмеженому об'ємі; зрозуміло, що концентрація буде змінюватись як в часі так і в просторі. В цьому випадку модель буде містити частинні похідні по змінній часу та просторових координат, тобто математичний опис буде містити диференціальні рівняння в частинних похідних. Для однозначного розв'язку таких рівнянь треба задавати як початкові так і граничні умови.

9) Параметричні та непараметричні системи.

Параметричні моделі описуються явними аналітичними виразами, що містять параметри, що потребують ідентифікації. Такі моделі містять скінченне число параметрів, тому їх називають моделями скінченної розмірності. Такими параметрами можуть бути коефіцієнти звичайних диференціальних рівнянь певного порядку, якими виражається зв'язок між вхідним та вихідним сигналами, коефіцієнти передатних функцій. Методами параметричної ідентифікації визначаються невідомі коефіцієнти об'єкта або його передатної функції.

Непараметричні моделі зводяться до опису перетворень вхідних сигналів у вихідні. В цьому випадку модель об'єкта задається оператором перетворення функцій вхідних сигналів у функції вихідних величин. Непараметричними моделями є вагові функції, передатні функції, кореляційні функції, спектральні щільності. Наприклад, для моделі в вигляді вагової функції, зв'язок між вхідним та вихідним сигналами для лінійних об'єктів задається інтегралом Дюамеля (інтегралом згортки):

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} u(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad (1.4)$$

де $w(t)$ – імпульсна перехідна (вагова) функція об'єкта, яка є непараметричною моделлю лінійного динамічного об'єкта.

Для побудови непараметричної моделі використовують часові та частотні характеристики об'єкта.

1.3. Класифікація методів побудови математичної моделі

Для отримання математичного опису об'єкту можливі два принципово різних підходи:

1) Теоретичні методи отримання математичного опису, Ці методи ґрунтуються на законах механіки, фізики, електротехніки, електроніки, теорії ймовірності тощо, що мають місце в структурних елементах об'єкта.

Наприклад, необхідно скласти математичну модель радіоприймача. Оскільки найпростішими структурними елементами такого об'єкту є електричні кола, математичний опис яких ґрунтується на відомих законах електротехніки, то математичну модель його цілком можна побудувати теоретичними методами.

2) Експериментальні методи побудови математичного опису, застосовуються при наявності апріорної інформації про об'єкт. В залежності від повноти інформації такі об'єкти можна розділити на наступні групи:

а) об'єкти, для яких рівняння опису відомі аж до приблизних значень коефіцієнтів;

б) об'єкти, для яких рівняння опису відомі, але числові значення коефіцієнтів невідомі;

в) об'єкти, для яких конкретний вид рівнянь та числові значення параметрів невідомі, але є деяка апріорна інформація (наприклад, об'єкт лінійний; перехідні процеси в ньому мають монотонний характер; об'єкт містить гладкі нелінійності);

г) об'єкти, відносно яких відсутня будь-яка апріорна інформація(об'єкти типу "чорна скриня").

Очевидно, що для об'єктів групи "а" задача ідентифікації розв'язана. Хоча на практиці досить часто зустрічаються об'єкти, у яких відома структура моделі та наближені значення її параметрів, котрі мають виражений дрейф(мають тенденцію до зміни). Задача ідентифікації для таких об'єктів зводиться до уточнення початкових значень вхідних параметрів та відстеження їх за допомогою адаптивних моделей.

Для об'єктів групи "б" процес ідентифікації являє собою відновлення невідомих параметрів моделі відомої структури.

Структура моделі групи "в" обирається на основі відомої апріорної інформації та може бути уточнена в процесі проведення експерименту, після чого розв'язується задача відновлення невідомих параметрів.

Таким чином, всі методи ідентифікації для перших трьох груп об'єктів , як правило, є параметричними, тобто зводяться до

визначення параметрів попередньо відомої або вибраної на основі певних міркувань моделі.

На практиці є ситуації, коли апріорна інформація про об'єкт дуже обмежена (наприклад, об'єкт лінійний, а інформація про характер перехідного процесу відсутня). Цей випадок є проміжним між групами "в" та "г". Для ідентифікації таких об'єктів доцільно застосовувати прямі методи, тобто визначати дискретні значення динамічних характеристик у скінченній множині точок шляхом подачі пробних сигналів спеціальної форми (активний експеримент) або розв'язання відповідних рівнянь статистичної динаміки (пасивний експеримент).

Для об'єктів типу "чорна скриня" також доцільно застосовувати прямі методи ідентифікації. Можлива для цих об'єктів і параметризація на основі прийняття певної гіпотези, яка перевіряється в процесі експерименту. Останній підхід є найбільш поширеним.

В підсумках можна сказати, що наведена вище класифікація залежить від ступеня вивченості об'єкта.

Нижче наводиться класифікація методів ідентифікації в залежності від способу представлення інформації про об'єкт.

Питання для самоперевірки:

1. Які етапи включає підготовка до побудови математичної моделі об'єкта? Розкрити зміст кожного із них.
2. Представити загальну структурну схему моделі об'єкта та розкрити зміст її елементів.
3. Який зміст вкладається в поняття функціонал чи оператор зв'язку об'єкта?
4. Які загальні типи вхідних сигналів можуть надходити в об'єкт?
5. Привести класифікацію найважливіших типів систем, розкрити їх зміст.
6. Що визначає детерміновану та стохастичну моделі? Розкрити відмінності між ними.
7. Яка система називається лінійною, нелінійною?
8. Яка система називається неперервною, дискретною?
9. Розкрити зміст термінів «система із зосередженими параметрами» та «система із розподіленими параметрами».
10. Розкрити зміст термінів «параметричні» та «непараметричні» і системи.
11. Навести класифікацію основних методів побудови математичної моделі.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ ТА ОБ'ЄКТА

2.1 Постановка задачі ідентифікації

Перехід від етапу побудови моделі до її застосування вимагає оцінку якості отриманої моделі, тобто перевірку адекватності моделі об'єкту, або її ідентифікації. Зрозуміло, що модель не може повністю співпадати з об'єктом, тому основною умовою адекватності моделі є можливість застосування отриманої моделі для розв'язання тої задачі, задля якої модель будувалась.

Ступінь адекватності моделі та об'єкта оцінюють шляхом порівняння їх вихідних сигналів при подачі однакових вхідних сигналів на об'єкт і його модель. Це порівняння вкладається в наступну схему:



Рис. 2.1 Схема спостережень при ідентифікації

На Рис. 2.1 прийняті наступні позначення: $u(t)$ – вхідний сигнал; $\eta(t)$ – неконтрольований випадковий сигнал(перешкода); $y(t)$, $y_M(t)$ – вихідний сигнал відповідно об'єкта та моделі; $e(t)$ – різниця(нев'язка) вихідних сигналів об'єкта та моделі; $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)$. $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ – вектори параметрів об'єкта та моделі відповідно.

Очевидно, що вихідний сигнал об'єкта $y(t)$ залежить від вхідного $u(t)$, перешкод $\eta(t)$ та вектора параметрів $b = (b_0, b_2, \dots, b_m)$, тобто можна записати

$$y(t) = f_o(u(t), \eta(t), b), \quad (2.1)$$

де $f_o(u(t), \eta(t), b)$ функціонал об'єкта.

Аналогічний функціональний зв'язок існує і для моделі

$$y_M(t) = f_M(u(t), 0, \beta), \quad (2.2)$$

де функціонал моделі $f_M(u(t), 0, \beta)$ відтворює структуру об'єкта.

Нев'язка $e(t)$ набуде виду:

$$e(t) = f_o(u(t), \eta(t), b) - f_M(u(t), 0, \beta) = e(y_o(t), y_M(t), \beta), \quad (2.3)$$

Вибір критерію близькості об'єкта та моделі, на основі якого можна стверджувати, що модель ідентифікується з об'єктом, або ні; такий критерій ще називають критерієм якості ідентифікації. З цією метою вводиться функція втрат (функція нев'язки)

$$F[e(y_o(t), y_M(t), \beta)], \quad (2.4)$$

яка є парною $F[-e] = F[e]$, а її значення випадковими.

На основі функції втрат формулюється критерій(функціонал) ідентифікації

$$J(y_o, y_M, \beta) = M\{F[e(y_o(t), y_M(t), \beta)]\}, \quad (2.5)$$

де M – математичне сподівання випадкової величини $F[e(y_o(t), y_M(t), \beta)]$.

Таким чином, критерій якості ідентифікації, що характеризує адекватність моделі реальному об'єкту, визначається середніми втратами. Меншим середнім втратам відповідає вища якість ідентифікації та навпаки, більшим втратам – гірша якість ідентифікації. Мінімізація функціонала ідентифікації буде відповідати максимізації якості ідентифікації та може досягатись шляхом належного вибору моделі та оцінки значень її параметрів. Процедура вибору та оцінки значень реалізується алгоритмом ідентифікації.

Найбільш поширеним критерієм якості ідентифікації є квадратичний функціонал у вигляді інтегрального значення квадрата нев'язки (2.3) на проміжку спостережень $[0, T]$:

$$J(y_o, y_M, \beta) = \int_0^T (e(t))^2 dt = \int_0^T (y_o(t) - y_M(t, \beta))^2 dt, \quad (2.6)$$

або середнього значення квадрата нев'язки:

$$J(y_o, y_M, \beta) = \frac{1}{T} \int_0^T (e(t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (y_o(t) - y_M(t, \beta))^2 dt. \quad (2.7)$$

При реалізації процедури оцінювання по результатам вимірів у дискретні моменти часу $t_j, j = 1, 2, \dots, N$, квадратичний критерій набуває виду:

$$J(y_o, y_M, \beta) = \sum_{j=1}^N (e(t_j))^2 = \sum_{j=1}^N (y_o(t_j) - y_M(t_j, \beta))^2, \quad (2.8)$$

або середнього значення квадрата нев'язки:

$$J(y_o, y_M, \beta) = 1/N \sum_{j=1}^N (e(t_j))^2 = \quad (2.9)$$

$$= 1/N \sum_{j=1}^N (y_o(t_j) - y_M(t_j, \beta))^2 .$$

Мінімізація такого квадратичного критерію у багатьох випадках зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$. Існуючі чисельні методи та швидкодія ЕОМ дозволяють знаходити ці розв'язки із високою точністю, тому квадратичний критерій ідентифікації займає домінуюче положення.

Квадратичний критерій, як правило застосовується, коли перешкоди мають гауссів (нормальний) закон розподілу із нульовим середнім значенням виду: $f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (Рис. 2.2) (σ – середньо квадратичне відхилення)

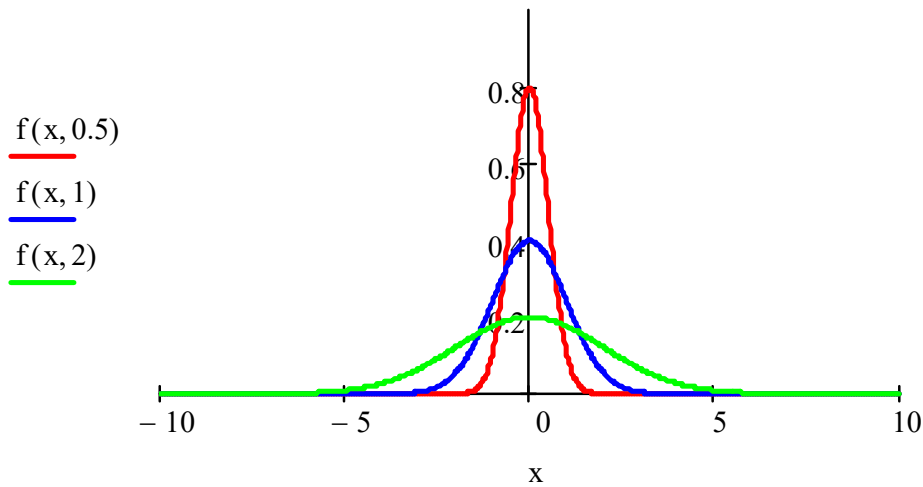


Рис. 2.2.

Зауваження. Якщо перешкоди $\xi(n)$ негауссові (тобто закон їх розподілу відрізняється від нормального закону розподілу), то застосування квадратичного критерію не завжди доцільно, тому що це може привести до погано збіжним алгоритмам ідентифікації або до некоректних оцінок параметрів моделі.

В деяких задачах ідентифікації застосовують модульну функцію втрат $F[e(y_o(t), y_M(t), \beta)] = |e(y_o(t), y_M(t), \beta)|$, ще рідше – функціонали відмінні від квадратичних та модульних [2].

Модульний критерій є оптимальним, коли перешкоди $\xi(t)$ мають показникову щільність розподілу ймовірностей виду $p(x, a, b) = \frac{1}{C} x^a e^{-bx}$ при $x \geq 0$ та $p(x, a, b) = 0$ при $x < 0$ ($a \geq 0, b > 0$ – параметри), $C = \int_0^\infty x^a e^{-bx} dx$ (Рис. 2.3).

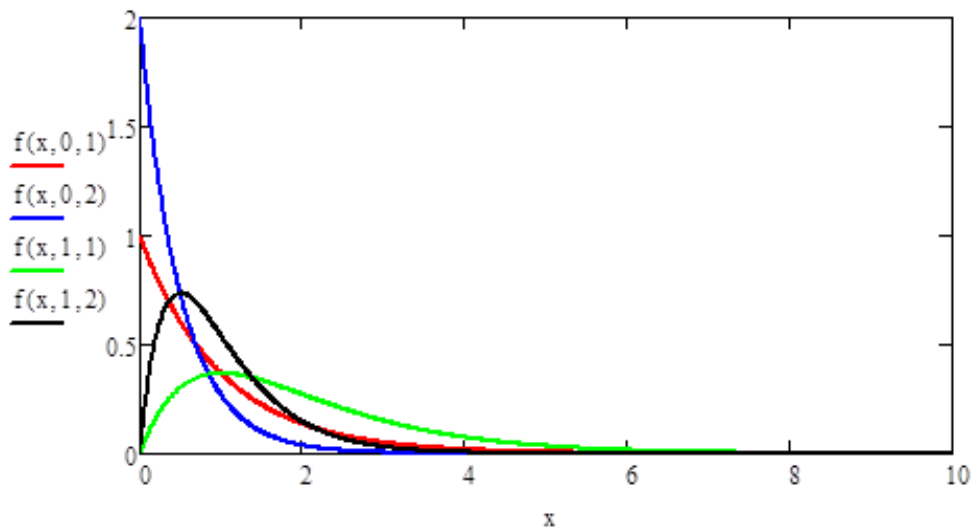


Рис. 2.3

Цей критерій у загальному випадку частіше приводить до необхідності розв'язання систем нелінійних рівнянь відносно невідомих $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$, що в певній мірі ускладнює пошук цього розв'язку.

Із сказаного випливає, що обґрунтований вибір критерію адекватності моделі є непростою задачею. Взагалі він диктується особливостями розв'язуваної задачі, залежить від вподобань дослідника. Практика вказує на те, що адекватність моделі треба оцінювати за кількома критеріями.

Належить вказати, що при розв'язку задачі ідентифікації вектора параметрів по отриманим вибіркам вимірів сигналів можуть застосовуватись статистичні критерії [3, 4]: максимальної правдоподібності, максимуму апостеріорної щільності розподілу ймовірності.

Методи оцінки параметрів $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ моделі об'єкта можна розділити на два класи:

1) методи, що ґрунтуються на застосуванні явних математичних виразів (схеми розімкненого типу, Рис. 2.4);

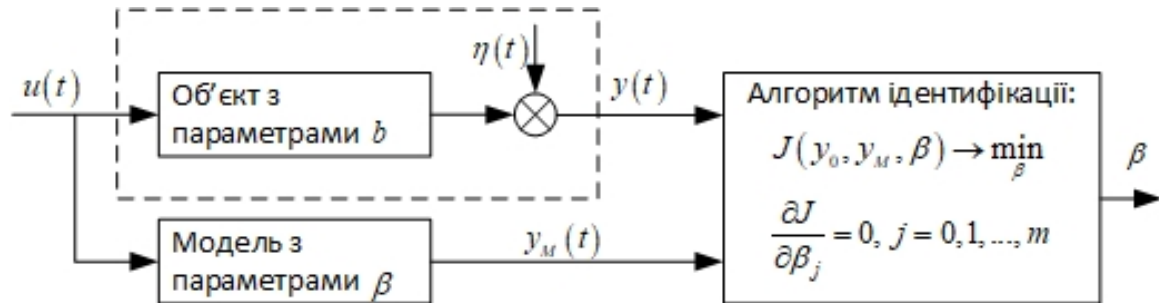


Рис. 2.4. Схема розімкненого типу

2) методи, що ґрунтуються на алгоритмах оцінювання із застосуванням моделей, які настроюються (схеми замкненого типу, Рис. 2.5).

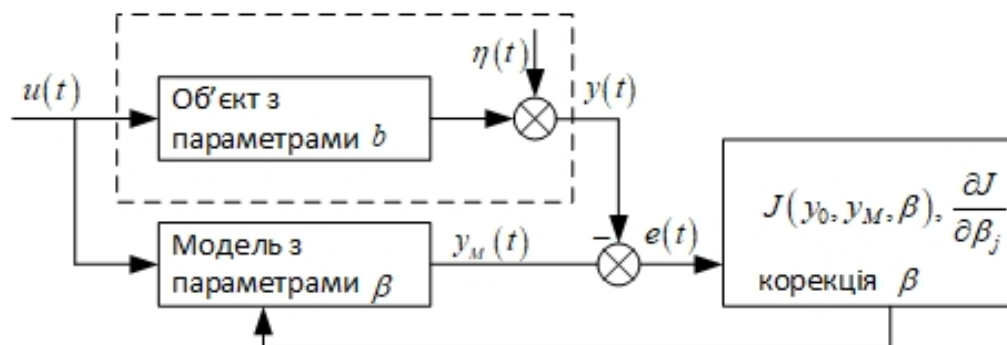


Рис. 2.5. Схема реалізації процедури оцінювання замкненого типу

Розглянемо особливості цих методів більш детально.

2.2. Особливості реалізації оцінки параметрів моделі за схемою розімкненого типу

Реалізація методів оцінювання параметрів β моделі за схемою розімкненого типу (Рис. 2.4) ґрунтується на пошуку $\min J(y_0, y_M, \beta)$, що можливо при явному математичному виразі $J(y_0, y_M, \beta)$. Згідно з формулою (2.5) для визначення функціоналу $J(y_0, y_M, \beta)$ необхідно провести значну кількість ідентифікаційних експериментів та зібрати

масив вхідних $u(t)$ та вихідних даних $y_o(t), y_M(t)$. Далі провести обрахунок математичного сподівання функції втрат $F[e(y_o(t), y_M(t), \beta)]$ (2.4). Після чого проводиться процедура пошуку мінімуму $J(y_o, y_M, \beta)$. Для цього складаємо систему рівнянь (необхідні умови екстремуму)

$$\left\{ \frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m. \right. \quad (2.10)$$

відносно невідомих параметрів $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$. Позначимо розв'язок системи (2.10) $\beta' = (\beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_m)$ – локальна критична (стаціонарна) точка функціоналу $J(y_o, y_M, \beta)$. В цій точці $J(y_o, y_M, \beta)$ може досягати або \min , або \max , або не досягати жодного із них. Щоб впевнитись, що точка $\beta' = (\beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_m)$ є точкою локального мінімуму треба скласти наступну матрицю похідних другого порядку

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_m} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_m \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_m \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_m \partial \beta_m} \end{array} \right)_{\beta=\beta'} , \quad (2.11)$$

де знак « $\beta = \beta'$ » в правому нижньому кутку матриці означає, що всі її елементи обраховуються при $\beta = \beta'$. Потім обраховують головні мінори матриці (2.11):

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= \left| \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_0} \right|, \\
\delta_1 &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} \end{array} \right|, \dots, \\
\delta_m &= \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_0 \partial \beta_m} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_1 \partial \beta_m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_m \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_m \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_m \partial \beta_m} \end{array} \right|_{\beta=\beta'}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Якщо всі мінори (2.12) **додатні** (достатня умова мінімуму), то в локальній точці $\beta = \beta'$ функціонал $J(y_o, y_M, \beta)$ досягає \min , це означатиме, що модель ідентифікована з об'єктом. Зауважимо, що стаціонарних точок може бути декілька й усіх треба перевірити на \min .

Розглянутий алгоритм ідентифікації вимагає отримання інформації повністю на всьому проміжку $[0, T]$ і не може бути застосованим для проміжних спостережень. Така процедура оцінювання параметрів моделі, з інженерної точки зору, відноситься до методів ідентифікації по за контуром регулювання та унеможливорює обробку вимірів послідовно в процесі нормального функціонування об'єкта.

2.3. Особливості реалізації оцінки параметрів моделей за схемою замкненого типу

При реалізації методів оцінювання параметрів моделі за схемою замкненого типу (Рис. 2.5) використовується принцип корекції параметрів моделі β за ознакою зменшення значень функціоналу $J(y_o, y_M, \beta)$.

Процедура корекції може бути виконана, наприклад, за наступним алгоритмом:

1) Вибирається початкове наближене значення параметрів моделі $\beta^0 = (\beta_0^0, \beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$;

2) За отриманою поточною нев'язкою $e(t)$ обраховується $J(y_o, y_M, \beta^0)$ та чисельними методами частинні похідні

$$\frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_j}, j = 0, 1, \dots, m \quad (2.13)$$

в точці $\beta^0 = (\beta_0^0, \beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$. Формується вектор

$$\vec{\nabla}^- = \left\{ -\frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_0}, -\frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_1}, \dots, -\frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_m} \right\}_{\beta^0}, \quad (2.14)$$

направлений в напрямку найскорішого зменшення значень функції $J(y_o, y_M, \beta)$ в точці β^0 (як вектор протилежний до вектора градієнта цієї функції). Обраховуються напрямні косинуси цього вектора

$$\begin{aligned} & \{ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \} = \\ & = \left\{ -\frac{1}{|\vec{\nabla}^-|} \frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_0}, -\frac{1}{|\vec{\nabla}^-|} \frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_1}, \dots, \right. \\ & \quad \left. -\frac{1}{|\vec{\nabla}^-|} \frac{\partial J(y_o, y_M, \beta)}{\partial \beta_m} \right\}_{\beta^0}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

3) Задаємо величину зміщення $\Delta\beta$ в напрямку вектора $\vec{\nabla}^-$ та обраховуємо корекцію параметрів моделі в поточний момент часу:

$$\Delta\beta_0 = \Delta\beta \cdot \alpha_0, \Delta\beta_1 = \Delta\beta \cdot \alpha_1, \dots, \Delta\beta_m = \Delta\beta \cdot \alpha_m \quad (2.16)$$

Знаходимо з кореговані значення параметрів

$$\begin{aligned} \beta_0^1 &= \beta_0^0 + \Delta\beta \cdot \alpha_0, \beta_1^1 = \beta_1^0 + \Delta\beta \cdot \alpha_1, \\ \beta_2^1 &= \beta_2^0 + \Delta\beta \cdot \alpha_2, \dots, \beta_m^1 = \beta_m^0 + \Delta\beta \cdot \alpha_m \end{aligned} \quad (2.17)$$

та отримуємо новий вектор $\beta^1 = (\beta_0^1, \beta_1^1, \dots, \beta_m^1)$ параметрів моделі.

4) Порівнюємо значення $J(y_o, y_M, \beta^0)$, $J(y_o, y_M, \beta^1)$:

– якщо $J(y_o, y_M, \beta^0) < J(y_o, y_M, \beta^1)$, то це означатиме, що вибране зміщення $\Delta\beta$ велике та його треба зменшити, наприклад, вдвічі й повторити, починаючи з пункту 3);

– якщо $J(y_o, y_M, \beta^0) > J(y_o, y_M, \beta^1)$, то це означатиме, що з кореговані значення параметрів наблизили модель до об'єкта, продовжуємо спостереження згідно з поточним часом та схемою Рис. 2.3.

Таким чином, розв'язок знаходиться шляхом послідовних наближень в процесі спостережень, причому кожен проміжний результат є наближеним розв'язком. Такий шлях ідентифікації реалізується в замкненому контурі та дозволяє проводити оперативну ідентифікацію в режимі нормального функціонування об'єкта.

2.4. Класифікація методів ідентифікації по способу представлення інформації про об'єкт

На вибір методу ідентифікації, крім ступеня вивченості об'єкта, можуть впливати багато інших ознак. Відмітимо наступні:

- 1) представлення характеристик об'єкта у вигляді функцій часу;
- 2) представлення характеристик об'єкта у вигляді функцій частоти або спектральних функцій;
- 3) по методу проведення експерименту на об'єкті:
 - активні(неможливо застосувати в режимі нормальної експлуатації об'єкта);
 - пасивні;
 - змішані, при яких на об'єкт подаються спеціальні пробні сигнали малої інтенсивності, що на порушують його нормальної роботи;
- 4) за прийнятим критерієм подібності об'єкта і моделі;
- 5) за методами відновлення невідомих параметрів об'єкта:
 - не ітераційні(метод найменших квадратів, кореляційний аналіз);
 - ітераційні(методи теорії статистичних рішень, стохастичної апроксимації);
- 6) за наявністю порівняння отриманого математичного опису з об'єктом, який може належати до одного із типів:
 - лінійним або нелінійним;
 - одномірним або багатомірним;
 - замкненим або розімкненим.

Із наведеного вище маємо висновок, що основною особливістю вхідного та вихідного сигналів є їх випадковість, яка обумовлена багатьма неконтрольованими факторами. Для ефективного застосування такої інформації в розв'язанні задач ідентифікації необхідно використовувати статистичні методи. В наступному розділі розглядаються основні числові характеристики випадкових сигналів.

Питання для самоперевірки:

1. В чому полягає суть поняття ідентифікації об'єктів?
2. Як визначається нев'язка двох сигналів та функція втрат?
3. Як формулюється критерій ідентифікації? Наведіть найбільш поширені критерії.
4. Наведіть два основних методи оцінки параметрів моделі.
5. Наведіть особливості реалізації оцінки параметрів моделі за схемою замкненого (розімкненого) типу.
6. Класифікація методів ідентифікації по способу представлення інформації про об'єкт.

3. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

3.1. Поняття випадкового процесу

Будемо позначати випадкові величини великими літерами: X, Y, Z, \dots , а конкретні їх значення відповідними малими літерами x, y, z, \dots . Випадкові величини бувають неперервними, так і дискретними, необмеженими й обмеженими. Найбільш повною характеристикою випадкової величини є її закон розподілу, який може задаватись у вигляді *інтегрального закону розподілу*, $P(x)$ або у формі *диференційного закону $p(x)$ – щільності розподілу ймовірностей випадкової величини X* (для неперервних випадкових величин)[7]. Для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) має місце сумісний закон розподілу: $P(x, y)$, $p(x, y)$.

Для дискретної випадкової величини X , яка може приймати значення $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, закон розподілу може задаватись у вигляді таблиці – ряду розподілу

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n

де p_i – ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення

$$x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Все вищесказане застосовується і для випадкових функцій – випадкових процесів $X(t), Y(t), Z(t), \dots$. Оскільки випадкова функція приймає випадкові значення в кожний момент часу t свого визначення, то це відображається в запису закону розподілу й трактуванні його змісту:

– $p(x, t_1), p(x, t_2)$ – щільності розподілу ймовірностей випадкового процесу $X(t)$ в різні моменти часу t_1, t_2 ; це різні функції, тому що $X(t_1), X(t_2)$ – різні випадкові величини (Рис. 3.1, Рис. 3.2);

– $p(x(t_1), x(t_2)) = p(x, x; t_1, t_2) = p(x; t_1, t_2)$ сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкового процесу $X(t)$, взятого в різні моменти часу t_1, t_2 . Надалі приймемо такі позначення $x(t_1) = x_1, y(t_2) = y_2$;

– $p(x(t_1), y(t_2)) = p(x, y; t_1, t_2) = p(x_1, y_2)$ сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$ взятих в моменти часу t_1, t_2 .

Приклади графіків окремих реалізацій випадкових процесів представлено на рис. 3.1 – 3.2.

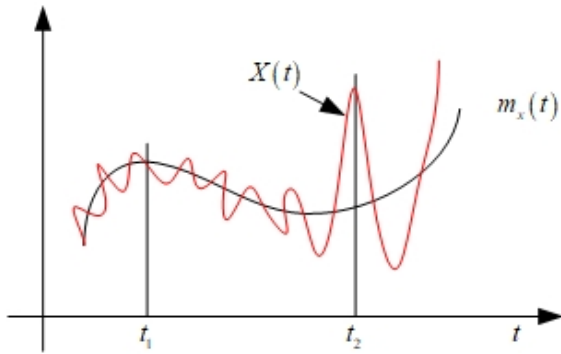


Рис. 3.1

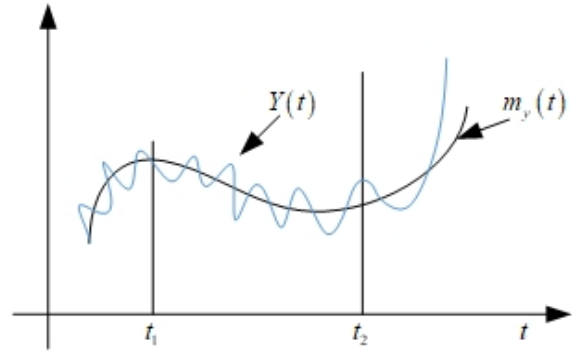


Рис. 3.2

3.2. Числові характеристики випадкового процесу

3.2.1. Числові характеристики неперервного випадкового процесу

В інженерних розрахунках користуватись випадковими величинами та їх законами розподілу не зручно, тому на практиці застосовують **числові характеристики випадкових процесів**, які є не випадковими:

– математичне сподівання (середнє значення) випадкового процесу

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(x, t) dx, \tag{3.1}$$

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) p(y, t) dy ;$$

– дисперсія випадкового процесу

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 p(x; t) dx, \tag{3.2}$$

$$D_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [y(t) - m_y(t)]^2 p(y; t) dy,$$

характеризує "розсіювання" значень випадкового процесу відносно його середнього значення $m_x(t)$ в момент часу t ;

– функція автокореляції випадкового процесу

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [X(t_2) - m_x(t_2)] \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [x(t_2) - m_x(t_2)] p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (3.3)$$

Ця функція характеризує статистичний зв'язок між значеннями випадкового процесу в моменти часу t_1, t_2 . Із формул (3.2), (3.3) при $t_2 = t_1 = t$ отримуємо

$$R_{xx}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)] \cdot [x(t) - m_x(t)] p(x; t) dx = D_x(t) > 0.$$

Таким чином, статистичний зв'язок між значеннями випадкового процесу в моменти часу t_1, t_2 посилюється із зменшенням часового проміжку $[t_1, t_2]$ та досягає найбільшого значення при $t_2 = t_1 = t$.

– функція взаємної кореляції двох випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [y(t_2) - m_y(t_2)] p(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2. \quad (3.4)$$

Зазначимо, якщо $R_{xy}(t_1, t_2) \equiv 0$ для довільних $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$, то процеси називаються некорельованими.

Виділимо важливий тип випадкових процесів, для яких $m_x(t) = const, D_x(t) = const$, а сумісна щільність $p(x(t_1), x(t_2)) = p(x, x; t_1, t_2)$ залежить лише від величини часового проміжку $\tau = t_2 - t_1$ і не залежить від самих значень t_1, t_2 . Такі процеси називають стаціонарними, їх двомірний закон розподілу записують так

$$p(x(t_1), x(t_2)) = p(x_1, x_2; t_2 - t_1) = p(x_1, x_2; \tau). \quad (3.5)$$

Для стаціонарних випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$ наведені формули (3.4), (3.5) спрощуються та мають вигляд:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x] \cdot [x(t_2) - m_x] p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_{xx}(\tau). \quad (3.6)$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1) = R_{xy}(\tau). \quad (3.7)$$

Має місце очевидна рівність

$$R_{xx}(0) = D_x. \quad (3.8)$$

Для стаціонарних випадкових процесів розглядають нормовану функцію автокореляції

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{1}{D_x} R_{xx}(\tau).$$

На Рис. 3.3 наведено типові графіки функції $\rho_{xx}(\tau)$

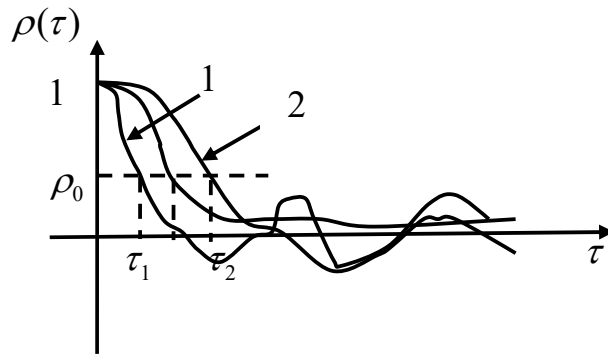


Рис. 3.3.

На Рис. 3.3 позначено ρ_0 певний рівень кореляції, який прийнято як суттєвий. На практиці ρ_0 вибирають в межах $0.05 \leq \rho_0 \leq 0.2$. Цьому рівню для певного процесу відповідає своє значення τ_1, τ_2 , які називаються **інтервалами кореляції** відповідного процесу та позначають τ_{\max} . Величини τ_1, τ_2 несуть важливу інформацію про процес, а саме: частоти коливачь f_{\min} , які переважають в першому процесі значно більші відповідних частот другого процесу. Мають місце наступні оцінки

$$f_{\min} \geq \frac{1}{\tau_{\max}}, \quad \tau_{\max} \geq \frac{1}{f_{\min}}. \quad (3.9)$$

Відмітимо, що одночасно з процесом $X(t)$ розглядають центрований процес

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t),$$

який є відхиленням $X(t)$ від $m_x(t)$.

Для $\overset{\circ}{X}(t)$ справедливі рівності:

$$M\{X(t)\} = 0, D_x = D_x, R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2), \quad (3.10)$$

якщо при цьому

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau), \quad (3.11)$$

то центрований процес буде стаціонарним.

Для отримання вищезазначених характеристик треба мати множину реалізацій випадкового процесу, що значно ускладнює проведення розрахунків.

Задача спрощується для окремого класу стаціонарних процесів, так званих *ергодичних процесів* $Z(t)$, коли замість множини реалізацій, можна обмежитись лише однією реалізацією заданою на достатньо великому часовому проміжку. Наведемо основні формули [4]:

$$m_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = z_0, \quad (3.12)$$

$$D_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) - z_0]^2 dt, \quad (3.13)$$

$$R_{zz}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) - z_0][z(t + \tau) - z_0] dt, \quad (3.14)$$

$$R_{xz}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - x_0][z(t + \tau) - z_0] dt, \quad (3.15)$$

де $x(t), z(t)$ – відповідно конкретні реалізації випадкових процесів $X(t)$ та $Z(t)$; знак $\lim_{T \rightarrow \infty}$ означає, що границя обраховується в середньо квадратичному розумінні.

Практично T завжди обмежена величина, тому замість формул (3.12)–(3.15) користуються оцінками для наведених числових характеристик:

$$m_z^* = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = z_0^*, \quad (3.16)$$

$$D_z^* = \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) - z_0^*]^2 dt, \quad (3.17)$$

$$R_{zz}^*(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [z(t) - z_0^*][z(t + \tau) - z_0^*] dt, \quad (3.18)$$

$$R_{xz}^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - x_0^*][z(t+\tau) - z_0^*] dt, \quad (3.19)$$

Загальні схеми знаходження кореляційної та взаємно кореляційної функцій центрованих процесів, що відповідають формулам (3.14), (3.15), наведені на рис. 3.4 та рис. 3.5.



Рис. 3.4

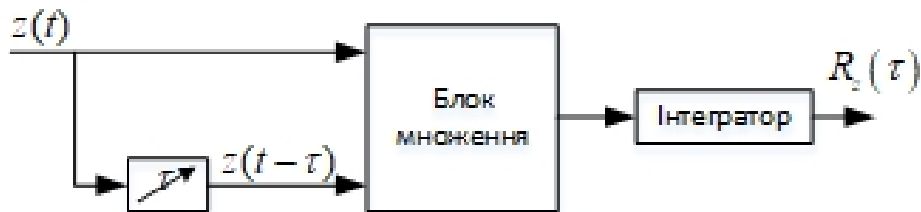


Рис. 3.5

3.2.2 Числові характеристики випадкового процесу, заданого дискретно

Сучасні комп'ютерні технології зберігають випадковий процес в числовому форматі, тобто в окремі дискретні моменти часу у вигляді матриці:

$$X_t = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_N \\ x_0 & x_1 & \dots & x_N \end{pmatrix}^T, \quad (3.20)$$

або таблиці

t_k	t_0	t_1	t_2	...	t_N
x_k	x_0	x_1	x_2	...	x_N

(3.21)

Якщо часовий проміжок спостереження випадкового процесу $[0, T]$ ділиться на N рівних відрізків довжиною Δt , то матриця (3.20) заміниться на однорядкову

$$X_t = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_N)^T, \quad (3.22)$$

а кожен елемент першого рядка матриці (3.20) обраховується за формулою

$$t_k = t_0 + \Delta t \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.23)$$

Вибір Δt ґрунтується на теоремі Котельнікова [4], яка дає наступну оцінку для Δt та необхідного значення N

$$\Delta t \leq \frac{1}{10f_{\max}}, \quad N = \frac{T}{\Delta t}, \quad (3.24)$$

де f_{\max} найвища частота коливань за 1 сек процесу на проміжку спостереження. Така заміна неперервного процесу дискретним забезпечує похибки, які не перевищують 2%.

Оцінки числових характеристик середнього значення \bar{x} , дисперсії \bar{D}_x та кореляційної функції $R_x^*(\tau)$ такого дискретного процесу є наближеними й знаходяться за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i, \quad \bar{D}_x = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i^2 - \bar{x}^2, \quad (3.25)$$

$$R_x^*(k\Delta t) = \frac{1}{N-k+1} \sum_{i=0}^{N-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x}), \quad (3.26)$$

або

$$R_x^*(k\Delta t) = \frac{1}{N-k+1} \sum_{i=0}^{N-k} x_i x_{i+k} - \bar{x}^2, \quad (3.27)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, E[0.5N]$; $E[0.5N]$ – ціла частина числа $0.5N$.

Взаємно-кореляційна функція двох процесів $X(t)$, $Y(t)$, представлених у форматі (3.20), обраховується за формулою

$$R_{xy}^*(k\Delta t) = \frac{1}{N-k+1} \sum_{i=0}^{N-k} (x_i - \bar{x})(y_{i+k} - \bar{y}), \quad (3.28)$$

або

$$R_{xy}^*(k\Delta t) = \frac{1}{N-k+1} \sum_{i=0}^{N-k} x_i y_{i+k} - \bar{x}\bar{y}. \quad (3.29)$$

Очевидно, що Δt вибирається найменшим із визначених за формулою (3.24) для кожного із процесів $X(t)$, $Y(t)$.

Таким чином, має місце наступна загальна схема визначення оцінки кореляційної функції стаціонарного процесу:

1. Реалізації випадкового процесу центруються.

2. Проводиться попередній частотний аналіз, в підсумку якого оцінюється вища f_{\max} та найменша f_{\min} частоти коливань у досліджуваному сигналі.

3. Визначається оцінки мінімального τ_{\min} та максимального τ_{\max} інтервалу кореляції із співвідношень

$$\tau_{\max} \geq \frac{1}{f_{\min}}, \quad \tau_{\min} \leq \frac{1}{f_{\max}}. \quad (3.30)$$

4. Обирається часовий проміжок T обчислення кореляційної функції у відповідності з необхідною точністю. Так для визначення кореляційної функції з точністю 2% для центрованих реалізацій випадкового процесу повинно виконуватись співвідношення

$$T \geq 16\tau_{\max}.$$

5. На основі теореми Котельнікова обирається крок квантування (дискретизації) по часу Δt та число N інтервалів

$$\Delta t \leq \frac{1}{10f_{\max}}, \quad N = \frac{T}{\Delta t}.$$

6. Якщо аналоговий сигнал має фінітний (обмежений) спектр частот $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$, то він може бути відновленим однозначно та без втрат за своїми дискретними значеннями, взятими з частотою f строго більшою подвійної верхньої частоти f_{\max} : $f > 2f_{\max}$, тоді

$$\Delta t \leq \frac{1}{f}, \quad N = \frac{T}{\Delta t}.$$

7. Проводяться розрахунки за формулами (3.25)–(3.27).

8. Для визначення взаємно кореляційної функції двох стаціонарних процесів $X(t)$, $Y(t)$, виконуються пункти 1–5 для обох процесів, визначається $\Delta t = \min\{\Delta t_x, \Delta t_y\}$, проводяться розрахунки за формулами (3.25), (3.29) або (3.29).

3.3 Спектральні характеристики випадкового процесу

Вводиться нова характеристика стаціонарного випадкового процесу – *спектральна щільність*, яка спрощує теоретичні й практичні розрахунки. Зокрема, використовуючи її, можна знайти характеристики вихідного сигналу стаціонарної лінійної динамічної системи по відомим характеристикам вхідного сигналу.

Спектральна щільність сигналу несе інформацію про його потужність та розподіл потужності по частотам.

3.3.1. Спектральна характеристика найпростішого випадкового процесу

Розглянемо найпростіший випадковий процес виду

$$Z(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t, \quad (3.31)$$

де ω – дійсне стале число; U, V – некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями рівними нулю та однаковими дисперсіями: $m_u = m_v = 0, D_u = D_v = D, R_{uv} = 0$.

Перетворимо праву частину (3.31):

$$Z(t) = V \left(\frac{U}{V} \cos \omega t + \sin \omega t \right).$$

Покладемо $U/V = \operatorname{tg} \varphi$, після елементарних перетворень отримаємо

$$Z(t) = \sqrt{U^2 + V^2} \sin(\omega t + \varphi),$$

де $\varphi = \operatorname{arctg}(U/V)$.

Таким чином, випадкову функцію $Z(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$ можна розглядати як гармонійне коливання із випадковою амплітудою $\sqrt{U^2 + V^2}$, випадковою фазою $\omega t + \operatorname{arctg}(U/V)$ і частотою ω .

За формулами (3.1), (3.2) знаходимо, що

$$m_z(t) = 0, D_z(t) = D = \text{const}, R_{zz}(t_1, t_2) = D \cos \omega(t_2 - t_1) = D \cos \omega \tau.$$

Це означає, що процес (3.31) стаціонарний. Спектральна характеристика цього процесу складається з однієї частоти ω та дисперсії D , яка визначає потужність такого коливання.

3.3.2. Спектральна характеристика суми гармонійних коливань

Розглянемо тепер випадковий процес $X(t)$, який є сумою скінченного числа доданків виду (3.31):

$$X(t) = \sum_{i=1}^n [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t], \quad (3.32)$$

де U_i, V_i – некорельовані випадкові величини, їх математичні сподівання дорівнюють нулю, а дисперсії величин з однаковими індексами рівні між собою: $D_{u_i} = D_{v_i} = D_i$; ω_i – довільні дійсні числа.

Як і в попередньому випадку можна показати, що $m_x(t) = 0$, а це

означає, що процес (3.32) центрований, тобто $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t)$. Аналогічно можна показати, що кореляційна функція суми (3.32) залежить лише від різниці аргументів:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i(t_2 - t_1) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i \tau .$$

або

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i \tau , \quad (3.33)$$

де $\tau = t_2 - t_1$.

Таким чином, в зазначених умовах випадковий процес виду (3.32) є стаціонарним.

Враховуючи п.1, кожен доданок суми (3.32) можна представити в вигляді

$$X_i(t) = \sqrt{U_i^2 + V_i^2} \sin(\omega_i t + \varphi_i) .$$

Тоді процес 3.32 набуває виду

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{U_i^2 + V_i^2} \sin(\omega_i t + \varphi_i) .$$

Отже, якщо випадковий процес $X(t)$ може бути представленим в вигляді суми гармонік різних частот із випадковими амплітудами та випадковими фазами, то $X(t)$ – стаціонарний випадковий процес.

Всі доданки суми (3.32) попарно не корельовані, тому дисперсія процесу $X(t)$ дорівнює сумі дисперсій цих доданків. Кожен доданок має дисперсію D_i , тому дисперсія процесу має вид

$$D[X(t)] = D_x(t) = \sum_{i=1}^n D_i ,$$

або з урахуванням (3.33) $R_{xx}(0) = \sum_{i=1}^n D_i = D[X(t)]$.

Дискретним спектром стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ виду (3.32) називають сукупність дисперсій всіх складових його гармонік з відповідними частотами. Отже, кожній частоті коливань ω_i ставиться у відповідність дисперсія D_i , яка визначає потужність коливання з вказаною частотою. Спектр можна представити графічно, відклавши на осі абсцис частоти ω_i , а на осі

ординат відповідні значення дисперсій D_i (Рис. 3.6). Такий дискретний спектр називають лінійчатим.

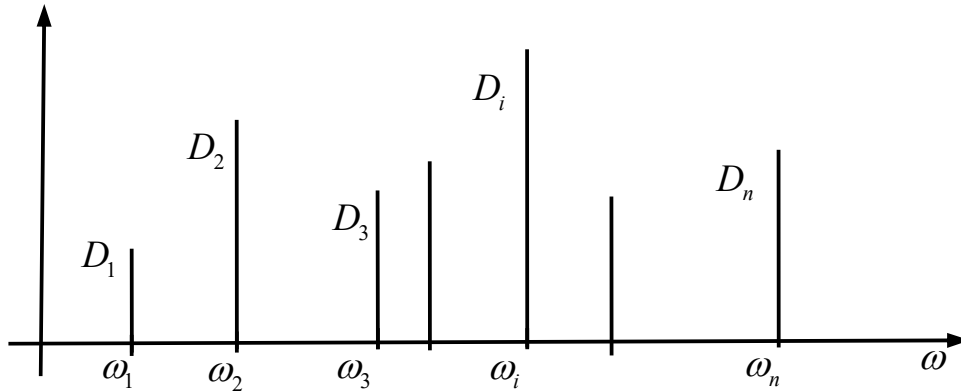


Рис. 3.6.

3.3.3. Спектральна характеристика нескінченної суми гармонійних коливань

Тепер розглянемо випадковий процес $X(t)$, який є сумою нескінченного(але зчисленного) числа доданків виду (3.31):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t], \quad (3.34)$$

де U_i, V_i – некорельовані випадкові величини, їх математичні сподівання дорівнюють нулю, а дисперсії величин з однаковими індексами рівні між собою: $D_{u_i} = D_{v_i} = D_i$; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$ – рівновіддалені дійсні числа, причому різниця любых двох сусідніх частот

$$\Delta \omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \pi/T \quad (i = 1, 2, \dots),$$

де T – дійсне додатне число.

Таким чином,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T}, \omega_2 = \frac{2\pi}{T}, \omega_3 = \frac{3\pi}{T}, \dots, \omega_i = \frac{i\pi}{T}, \dots,$$

Всі співвідношення для процесу (3.32) залишаються справедливими й для процесу (3.34). Це означає, що цей процес стаціонарний, його кореляційна функція набуде виду:

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \frac{\pi i}{T} \tau, \quad (3.35)$$

З урахуванням формули (3.8) отримуємо дисперсію випадкового процесу (3.34)

$$D_x = R_{xx}(0) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i. \quad (3.36)$$

Як і в попередньому випадку можна показати, що $m_x(t) = 0$, а це означає, що процес (3.32) центрований, тобто $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t)$.

Із (3.35) отримуємо висновок, що *дисперсія стаціонарного випадкового процесу, який можна представити у вигляді суми нескінченного (але зчисленного) числа гармонік з рівновіддаленими частотами, дорівнює сумі дисперсій складових гармонік (якщо ряд (3.36) є збіжним).*

Звернемо увагу на те, що співвідношення (3.35) можна розглядати як розклад кореляційної функції в ряд Фур'є по косинусам, що має місце для парної функції. Із (3.35) видно, що $R_{xx}(\tau)$ – періодична функція з періодом $2T$, тому коефіцієнти Фур'є визначаються за формулами

$$D_i = \frac{2}{T} \int_0^T R_{xx}(\tau) \cos \frac{\pi i}{T} \tau d\tau, \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots).$$

Якщо кожній частоті $\omega_i = i\pi/T$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) поставити у відповідність дисперсію D_i , то отримаємо дискретний лінійчатий спектр, лінії якого знаходяться одна від одної на однаковій відстані $\Delta\omega = \pi/T$ на осі частот.

Таким чином, кореляційна функція стаціонарного періодичного процесу та її спектр дисперсій взаємно залежні, знаючи одну із цих характеристик, однозначно визначаємо другу.

3.3.4. Спектральна характеристика неперервного стаціонарного випадкового процесу. Спектральна щільність

Розглянемо неперіодичний стаціонарний випадковий процес $X(t)$, визначений на проміжку $-\infty < t < \infty$, що має кореляційну функцію $R_{xx}(\tau)$.

Спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ називають не випадкову функцію $s_x(\omega)$, яка зв'язана

з кореляційною функцією $R_{xx}(\tau)$ взаємно оберненими перетвореннями Фур'є:

$$s_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3.37)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.38)$$

Ці формули називають формулами Вінера-Хінчіна. В дійсній формі вони представляють взаємно обернене косинус – перетворення Фур'є:

$$s_{xx}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (3.39)$$

$$R_{xx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} s_{xx}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (3.40)$$

Важливість спектральної щільності полягає в тому, що знаючи її, можна знайти кореляційну функцію та навпаки (в цьому розумінні спектральна щільність і кореляційна функція еквівалентні); крім того використання спектральної щільності в багатьох випадках значно спрощує теоретичні та практичні розрахунки.

Відмітимо, що спектральна щільність несе важливу енергетичну інформацію про випадковий процес, а саме: характеризує розподіл щільності енергії коливань випадкового процесу по частотам.

Зауважимо, що спектральна щільність – парна функція

$$s_x(-\omega) = s_x(\omega).$$

Враховуючи (3.8) із формули (3.40) знаходимо дисперсію стаціонарного випадкового процесу

$$D_x = R_{xx}(0) = 2 \int_0^{\infty} s_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) d\omega,$$

а формула

$$D_x(\omega_a, \omega_b) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} s_x(\omega) d\omega,$$

визначає дисперсію процесу в частотному інтервалі $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$.

3.3.5. Взаємна спектральна щільність стаціонарних й стаціонарно зв'язаних випадкових процесів

Нехай $X(t)$ і $Y(t)$ – стаціонарні й стаціонарно зв'язані випадкові процеси із взаємно кореляційною функцією $R_{xy}(\tau)$.

Взаємною спектральною щільністю двох стаціонарних й стаціонарно зв'язаних випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ називають функцію $s_{xy}(\omega)$, яка визначається перетворенням Фур'є:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Відповідно взаємно кореляційна функція виражається через взаємну спектральну щільність оберненим перетворенням Фур'є:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Таким чином, спектральні щільності визначаються по кореляційним функціям шляхом застосування до них перетворення Фур'є.

Зауважимо, що усі наведені формули обчислення характеристик випадкових процесів програмно реалізовано, наприклад, в середовищі Mathcad, Matlab в категорії "функції – обробка сигналів". Для цього лише необхідно ввести інформацію про процеси в векторному форматі та звернутись до потрібної функції.

3.3.6. Знаходження спектральної щільності стаціонарного процесу за допомогою фільтрів

Потужність відфільтрованого випадкового процесу $z(t)$ дорівнює потужності сигналу в полосі пропускання фільтра, помноженої на квадрат амплітудно-частотної характеристики фільтра $A(\omega)$:

$$M\{z^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) s_{xx}(\omega) d\omega. \quad (3.41)$$

Якби фільтр мав нескінченно вузьку полосу пропускання при $\omega = \omega_c$, то

$$M\{z^2(t)\} = s_{xx}(\omega_c).$$

Остання рівність залишається наближено справедливою й для фільтра з достатньо вузькою $\Delta\omega$, але скінченною полосою пропускання $\omega_c - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_c + \Delta\omega/2$. Тоді в такій полосі функція $s(\omega_c) \approx const$, тому

$$M\{z^2(t)\} \approx s_{xx}(\omega_c) \int_{\omega_1}^{\omega_2} A^2(\omega) d\omega, \quad \omega_1 = \omega_c - \Delta\omega/2, \omega_2 = \omega_c + \Delta\omega/2$$

і з цього співвідношення маємо оцінку

$$s_{xx}(\omega_c) \approx \frac{M\{z^2(t)\}}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} A^2(\omega) d\omega} = \frac{z_{ef}^2}{F_F}. \quad (3.42)$$

Рухаючи частотне вікно $\omega_c - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_c + \Delta\omega/2$ по всьому частотному спектру, отримаємо за формулою (3.42) оцінку спектральної щільності процесу.

3.3.7. Визначення частотних характеристик процесу заданого диференціальним рівнянням

Нехай лінійний стаціонарний об'єкт або модель визначається диференціальним рівнянням виду:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \\ = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + b_2 x^{(m-2)} + \dots + b_{m-1} x' + b_m x, \end{aligned} \quad (3.43)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n; b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ ($m \leq n$ – умова фізичної реалізації моделі); $x(t), y(t)$ – вхідний та вихідний сигнали відповідно; коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n визначають об'єкт або модель; коефіцієнти $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ визначають вхідний сигнал. Треба визначити частотні характеристики вихідного сигналу.

Прийmemo, що початкові умови для (3.43) є нульовими:

$$\begin{aligned} x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(m-1)}(0) = 0; \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Застосуємо до (3.43) перетворення Лапласу, отримаємо операторну форму цього рівняння

$$\begin{aligned} Y(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = \\ = X(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m), \end{aligned}$$

або

$$Y(p)A_n(p) = X(p)B_m(p),$$

де

$$\begin{aligned} A_n(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n; \\ B_m(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m. \end{aligned}$$

Функція

$$W(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (3.44)$$

називається передатною функцією об'єкту. Якщо у (3.44) зробити підстановку $p = j\omega$, то отримуємо частотну характеристику об'єкту

$$W(j\omega) = \frac{B_m(j\omega)}{A_n(j\omega)} \quad (3.45)$$

Спектральна щільність $s_{yy}(\omega)$ вихідного сигналу $y(t)$ виражається через спектральну щільність $s_{xx}(\omega)$ вихідного сигналу $x(t)$ формулою

$$s_{yy}(\omega) = \left| \frac{B_m(j\omega)}{A_n(j\omega)} \right|^2 s_{xx}(\omega).$$

Тоді за формулою (3.38) знайдемо кореляційну функцію сигналу $y(t)$

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{yy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{B_m(j\omega)}{A_n(j\omega)} \right|^2 s_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Величина $K = W(0) = \frac{B_m(0)}{A_n(0)} = \frac{b_m}{a_n}$ називається коефіцієнтом

підсилення системи.

Функцію $W(j\omega)$ представимо у виді

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.46)$$

де $P(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega)$; $Q(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega)$ – відповідно дійсна та уявна частини функції $W(j\omega)$.

По знайденій функції (3.46) за формулами

$$P(\omega) = \operatorname{Re}(W(j\omega)); Q(\omega) = \operatorname{Im}(W(j\omega)), |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

обчислюємо АФЧХ системи та будуємо їх графіки.

Приклад 2.

Знайти частотні характеристики системи, яка визначається диференціальним рівнянням

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x'(t) + x(t)$$

із нульовими початковими умовами: $y(0) = y'(0) = 0$; $x(0) = 0$.

Розв'язок.

У нашому випадку $n = 2; m = 1$. Записуємо оператори лівої та правої частин:

$$A_2(p) = p^2 + 5p + 6; B_1(p) = p + 1.$$

Складаємо передатну функцію

$$W(p) = \frac{B_1(p)}{A_2(p)} = \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 6}.$$

Записуємо частотну характеристику

$$W(j\omega) = \frac{B_1(j\omega)}{A_2(j\omega)} = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6} = \frac{j\omega + 1}{-\omega^2 + j5\omega + 6} = \frac{j\omega + 1}{6 - \omega^2 + j5\omega}.$$

Помножимо знаменник та чисельник на величину спряжену знаменнику:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{6 - \omega^2 + j5\omega} \cdot \frac{6 - \omega^2 - j5\omega}{6 - \omega^2 - j5\omega} = \frac{6 - \omega^2 + 5\omega^2 - j5\omega + j(6 - \omega^2)\omega}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}.$$

Після спрощень

$$W(j\omega) = \frac{6 + 4\omega^2 + j\omega(1 - \omega^2)}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2} = \frac{6 + 4\omega^2}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2} + j \frac{\omega(1 - \omega^2)}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}.$$

Таким чином:

$$P(\omega) = \frac{6 + 4\omega^2}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}; Q(\omega) = \frac{\omega(1 - \omega^2)}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &= \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} = \frac{\sqrt{(6 + 4\omega^2)^2 + [\omega(1 - \omega^2)]^2}}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2} = \\ &= \frac{\sqrt{36 + 49\omega^2 + 14\omega^4 + \omega^6}}{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}; \varphi(\omega) = \text{atan} \frac{\omega(1 - \omega^2)}{6 + 4\omega^2}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт підсилювання $K = W(0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Із зростанням

$\omega \rightarrow \infty$ $|W(j\omega)| \rightarrow 0$ (тому що показник степеня ω в чисельнику менше показника степеня в знаменнику) На рис. 3.7 представлені відповідні графіки.

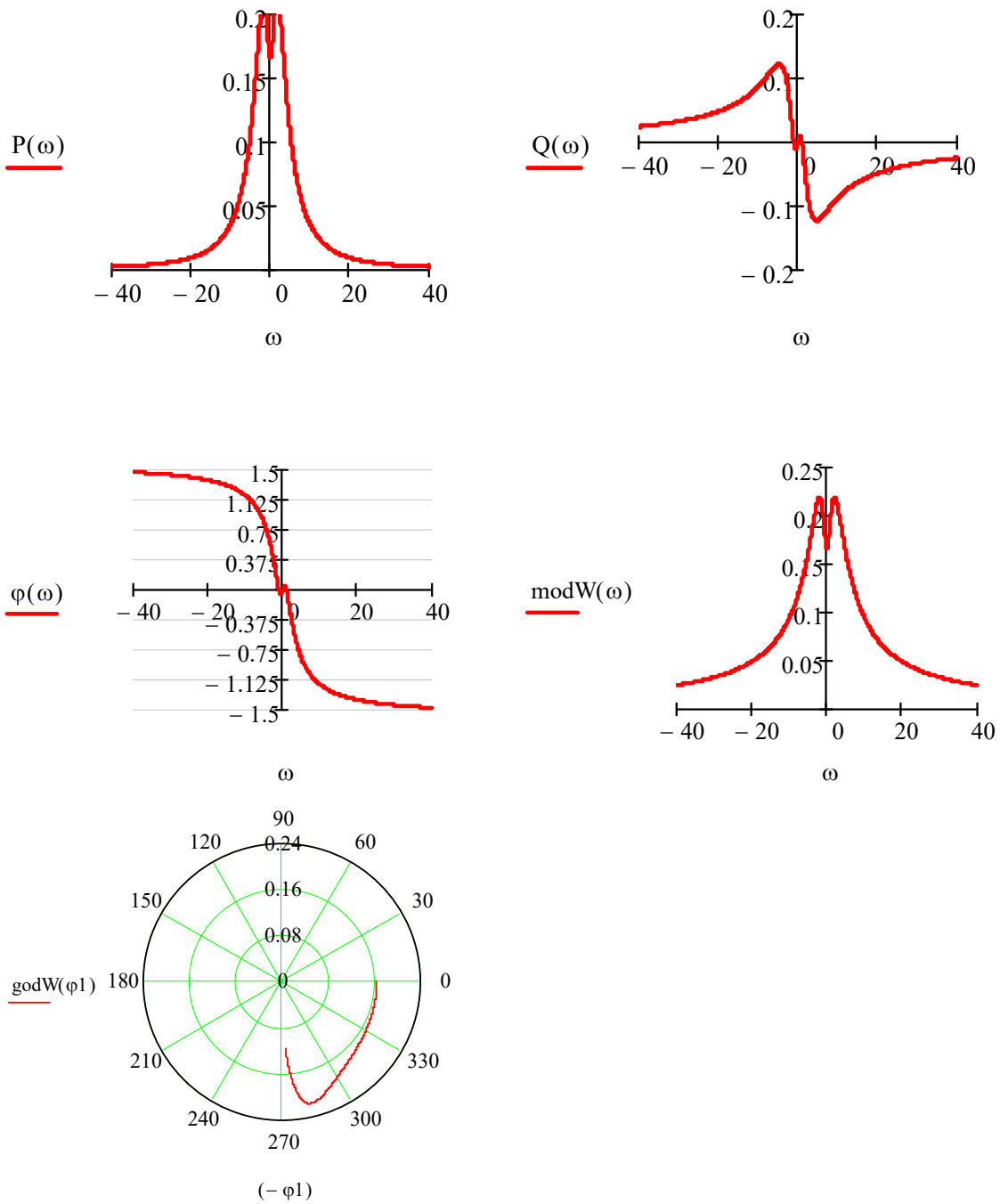


Рис. 3.7.

Зауваження. На практиці для застосування чисельних методів розв'язання диференціального рівняння n -го порядку (3.43) переходять від нього до еквівалентної системи диференціальних

рівнянь першого порядку відносно невідомих

$$\begin{aligned}
 v(t) &= [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T : \\
 \dot{v}(t) &= A \cdot v(t) + B \cdot x(t), \\
 y(t) &= C \cdot v(t).
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Зауважимо, що в силу матричного рівняння (3.47), розмірності матриць A, B, C повинні бути узгодженими: число елементів у кожній із матриць B і C повинно бути рівним n – порядку квадратної матриці A .

Передатна функція для системи диференціальних рівнянь (3.47) обраховується так

$$G(p) = C \cdot (p \cdot I - A)^{-1} \cdot B,
 \tag{3.48}$$

де I – одинична матриця n -го порядку. Замінивши в останньому виразі p на $j\omega$, отримаємо частотну характеристику.

Приклад 3.

Скласти матриці A, B, C та обрахувати $G(p)$ для рівняння у прикладі 2.

Розв'язок.

Запишемо коефіцієнти $a_1 = 5; a_2 = 6; b_0 = 1; b_1 = 1$.

$$n = 2, \quad C = [1 \quad 0], \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$pI - A = p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+5 & -1 \\ 6 & p \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця $(pI - A)^{-1}$ матиме вигляд:

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2 + 5p + 6} & \frac{1}{p^2 + 5p + 6} \\ \frac{-6}{p^2 + 5p + 6} & \frac{p + 5}{p^2 + 5p + 6} \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо добуток $(p \cdot I - A)^{-1} \cdot B$, отримуємо

$$(p \cdot I - A)^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2 + 5p + 6} & \frac{1}{p^2 + 5p + 6} \\ \frac{-6}{p^2 + 5p + 6} & \frac{p + 5}{p^2 + 5p + 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 6} \\ \frac{p - 1}{p^2 + 5p + 6} \end{bmatrix}.$$

Тепер множимо матрицю $C = [1 \ 0]$ на попередній результат і остаточно знаходимо вираз

$$G(p) = C \cdot (p \cdot I - A)^{-1} \cdot B = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 6} \\ \frac{p - 1}{p^2 + 5p + 6} \end{bmatrix} = \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 6}.$$

Таким чином, як і повинно бути $G(p) \equiv W(p)$.

Питання для самоперевірки:

1. Що є найбільш повною характеристикою випадкової величини, процесу?
2. Що входить в поняття числові характеристики випадкової величини, процесу?
3. Поняття функції автокореляції, яку особливість випадкового процесу вона відображає?
4. Поняття функції взаємної кореляції, яку особливість випадкових процесів вона відображає?
5. Розкрити поняття інтервалу кореляції, яку особливість випадкового процесу він відображає?
6. Які процеси називаються стаціонарними, ергодичними, центрованими?
7. Особливості визначення числових ергодичного процесу?
8. Навести схеми визначення кореляційної функції ергодичного процесу.
9. Числові характеристики дискретного випадкового процесу. Особливості вибору інтервалу дискретизації.

10. Спектральна характеристика найпростішого випадкового процесу: гармонійного коливання. Вираз кореляційної функції.
11. Спектральна характеристика скінченої суми гармонійних коливань. Вираз кореляційної функції.
12. Спектральна характеристика нескінченої суми гармонійних коливань. Вираз кореляційної функції.
13. Спектральна характеристика неперервного стаціонарного випадкового процесу. Спектральна щільність
14. Зв'язок між спектральною щільністю та кореляційною функцією ергодичного процесу: формули Вінера-Хінчина
15. Взаємна спектральна щільність двох стаціонарно зв'язаних випадкових процесів.
16. Зв'язок між взаємно кореляційною функцією та взаємною спектральною щільністю двох процесів.
17. Знаходження спектральної щільності стаціонарного процесу за допомогою фільтрів.
18. Визначення частотних характеристик процесу заданого диференціальним рівнянням n – го порядку.
19. Визначення частотних характеристик процесу заданого системою диференціальних рівнянь першого порядку.

4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Відомо, що лінійна одномірна система описується лінійним оператором зв'язку (1.2), (1.3), наприклад передатною функцією або її еквівалентами. В свою чергу, відомий зв'язок між імпульсною перехідною функцією та спектральними характеристиками об'єкта [5]

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_{yx}(\omega)}{s_{xx}(\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.1)$$

де $s_{xx}(\omega)$ – спектральна щільність вхідного сигналу та $s_{yx}(\omega)$ – взаємна спектральна щільність вхідного й вихідного сигналів. Це дозволяє при розв'язанні задач ідентифікації переходити, в залежності від обставин, з часової координати до координати частот і навпаки.

Розглядаємо лінійний об'єкт. Нехай $w(t)$, $\hat{w}(t)$ – імпульсні перехідні функції (ІПФ) об'єкту та моделі відповідно; це реакції системи на вхідну $\delta(t)$ – функцію (зосередженість якогось фізичного явища у одній точці)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.2)$$

Тоді вихідна функція $y(t)$ та вхідна $x(t)$ (об'єкту чи моделі) зв'язані співвідношеннями

$$y(t) = \int_0^t w(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

для об'єкту та

$$\hat{y}(t) = \int_0^t \hat{w}(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

для моделі.

Звідки нев'язка $e(t)$ набуде виду

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \int_0^t [w(\tau) - \hat{w}(\tau)] x(t-\tau) d\tau.$$

Оскільки записана формула справедлива для довільного $x(t)$, то вона залишається справедливою й для $x(t) = 1(t)$, де

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ 1 & \text{для } x \geq 0 \end{cases}$$

єдинична функція Хевісайда (або функція включення). Тоді

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \int_0^t [w(\tau) - \hat{w}(\tau)] d\tau$$

і квадратичний критерій (2.6) набуде виду

$$M[\varepsilon^2(t)] = M\{[y(t) - \hat{y}(t)]^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [w(\tau) - \hat{w}(\tau)]^2 d\tau.$$

Оптимальна імпульсна перехідна функція $\hat{w}(t)$ моделі, що забезпечує мінімум останнього співвідношення знаходиться за вище наведеною формулою (4.1).

Таким чином, оптимізація моделі звелась до визначення частотних характеристик об'єкту.

4.1. Визначення частотних характеристик об'єкту детермінованими сигналами

Відомі методи визначення частотних характеристик ґрунтуються на застосуванні синусоїдальних сигналів, сигналів котрі апроксимують синусоїдальні або полігармонічні сигнали.

Ці методи отримали широке застосування при дослідженні складних промислових об'єктів. Розрізняють прямі детерміновані частотні методи, які ґрунтуються на безпосередньому вимірі амплітуди та фази вихідного сигналу, та статистичні частотні методи.

Прямі методи визначення частотних характеристик мають ряд переваг:

1) більшою точністю, тому що гармонічні вхідні сигнали ортогональні у різних точках вимірів, і таким чином, кожна точка частотних характеристик (тобто виміри при конкретному значенні частоти) визначається незалежно від інших;

2) простотою обробки;

3) можливістю проведення вимірів у замкненій системі;

4) незначним впливом шумів;

5) великою надлишковістю інформації.

Проте, прямі методи можуть мати такий ряд недоліків:

1) складність обладнання для проведення вимірів на низьких частотах (генератор);

- 2) значні часові затрати на виміри;
- 3) необхідність перетворення сигналів;
- 4) значна кількість обладнання;
- 5) умови вимірювання та параметри досліджуваного об'єкту можуть змінитись за час спостереження.

Визначення частотних характеристик проводиться наступним чином:

- на вхід об'єкту подається синусоїдальна дія $x(t) = x_0 \sin \omega_i t$;

- отримуємо усталений вихідний сигнал $z(t) = |W(j\omega)| x_0 \sin[\omega t + \varphi(\omega)] + n(t)$, (4.3)

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{\text{Im}W(j\omega)}{\text{Re}W(j\omega)} \right].$$
 (4.4)

де $n(t)$ – похибка вимірювання; $\omega = \omega_i$;

$\varphi(\omega)$ – зсув фази вихідного сигналу по відношенню до вхідного;

- одночасно вимірюються вхідний та вихідний сигнали та записуються за допомогою багатоканального записуючого пристрою. Структурна схема експериментальної установки для отримання частотних характеристик має вид (Рис. 4.1)

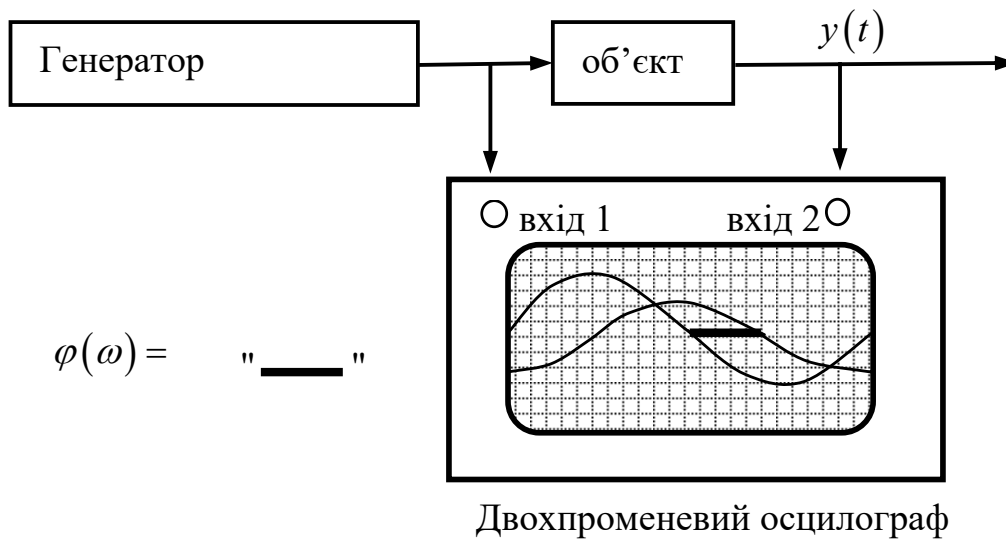


Рис. 4.1.

Враховується лише перша гармоніка. По записам вхідного та вихідного сигналів визначають відношення амплітуд

$|W(j\omega_i)| = A_{\text{вих}}/B_{\text{вх}}$ на частоті ω_i . Фазовий зсув $\varphi(\omega_i)$ отримують порівнянням положення максимумів кривих $x(t)$ та $y(t)$ або порівнянням перетину графіків з віссю часу. Мінімальний проміжок часу вимірювання для однієї точки частотної характеристики визначається періодом вхідного сигналу частоти ω_i та інтервалом перехідного процесу об'єкту. Усереднення по кільком періодам для кожної частоти підвищує точність, але це приводить до збільшення часових затрат вимірів та обробки.

Тоді згідно із [5] знаходимо значення частотної передатної функції об'єкту $W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ в точках $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, обраховуємо апроксимацію $|W(j\omega)|$.

Знаходимо спектральну щільність об'єкту за формулою

$$S_{yy}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega), \quad (4.5)$$

та взаємну спектральну щільність

$$S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-2T}^{2T} R_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.6)$$

де взаємна кореляційна функція вхідного та вихідного сигналів об'єкту визначається за формулою (3.15)

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)x(t-\tau)dt.$$

Підставляємо вирази (4.5) (4.6) у формулу (4.1) та знаходимо оптимальну імпульсну перехідну функцію моделі

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.7)$$

Тоді за формулою $\hat{y}(t) = \int_0^t \hat{w}(\tau)x(t-\tau)d\tau$ знаходимо реакцію моделі на довільну вхідну дію $x(t)$. Така модель оптимально ідентифікує реакцію об'єкту на дію $x(t)$.

Очевидно, що оскільки функції $s_{yx}(\omega), s_{yy}(\omega)$ обраховані лише у дискретних точках $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, то обчислення усіх інтегралів проводиться числовими методами.

На основі схеми рис. 4.1 можна побудувати на комплексній площині точку, яка належить частотній характеристиці об'єкту, а

сукупність точок при зміні частоти від нуля до величини, коли амплітуда вихідного усталеного сигналу стане настільки малою, що нею можна нехтувати, буде представляти собою амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) об'єкту (Рис. 4.2).

На рис. 4.2 прийнято такі позначення:

$$P(\omega) = \operatorname{Re}(W(j\omega)); Q(\omega) = \operatorname{Im}(W(j\omega)), |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

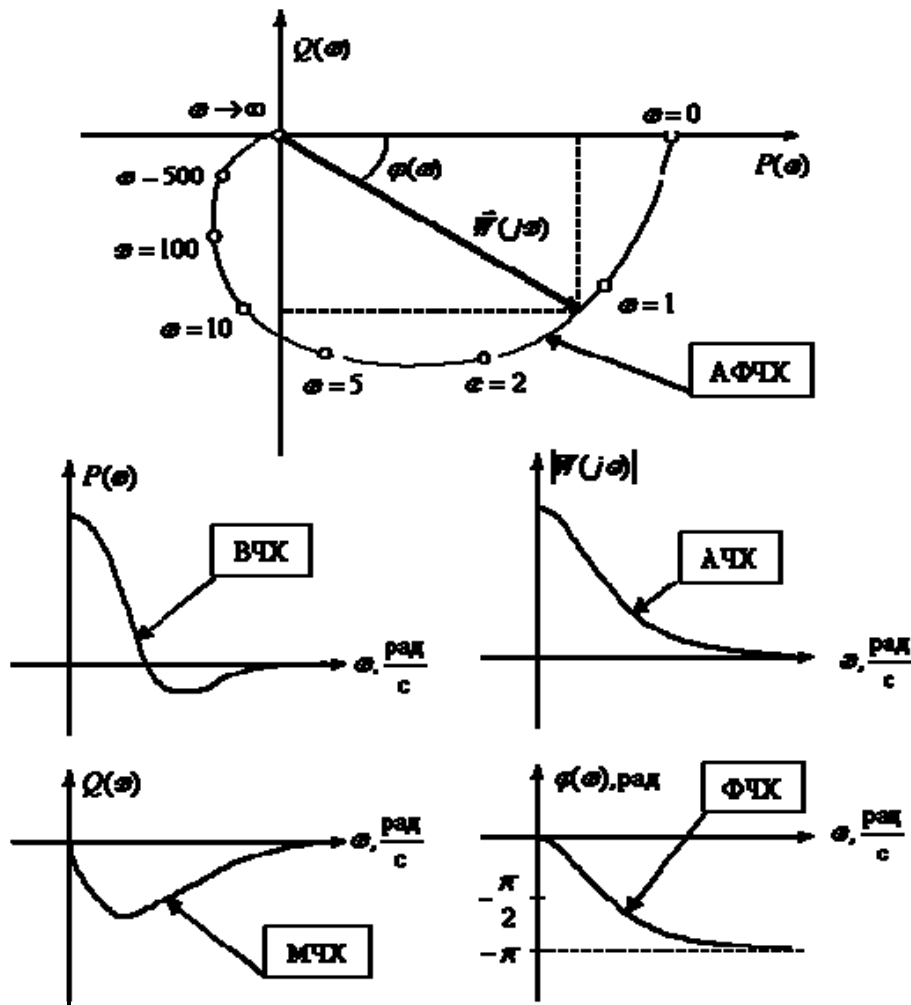


Рис. 4.2.

Приклад 1.

Визначити вираз частотної характеристики по заданій передатній функції об'єкту

$$W(p) = \frac{1}{2p+1}.$$

Розв'язок.

Замінюємо у виразі $W(p) = \frac{1}{2p+1}$ p на $j\omega$ та відокремлюємо дійсну й уявну частини. Для цього звільняємось від уявної одиниці j у знаменнику, помноживши чисельник та знаменник на величину спряжену до знаменника. Отримуємо

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{2j\omega+1} = \frac{1}{2j\omega+1} \cdot \frac{-2j\omega+1}{-2j\omega+1} = \frac{1-2j\omega}{(2\omega)^2+1} = \\ &= \frac{1}{(2\omega)^2+1} + j \frac{-2\omega}{(2\omega)^2+1}. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{(2\omega)^2+1}; \quad Q(\omega) = \frac{-2\omega}{(2\omega)^2+1}. \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg}(-2\omega). \end{aligned}$$

$$|W(j\omega)| = \sqrt{\left[\frac{1}{(2\omega)^2+1} \right]^2 + \left[\frac{-2\omega}{(2\omega)^2+1} \right]^2} = \frac{\sqrt{1+(-2\omega)^2}}{(2\omega)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{1+(-2\omega)^2}}.$$

Нижче представлено АФЧХ та годограф ЧХ об'єкту із такою передатною функцією.

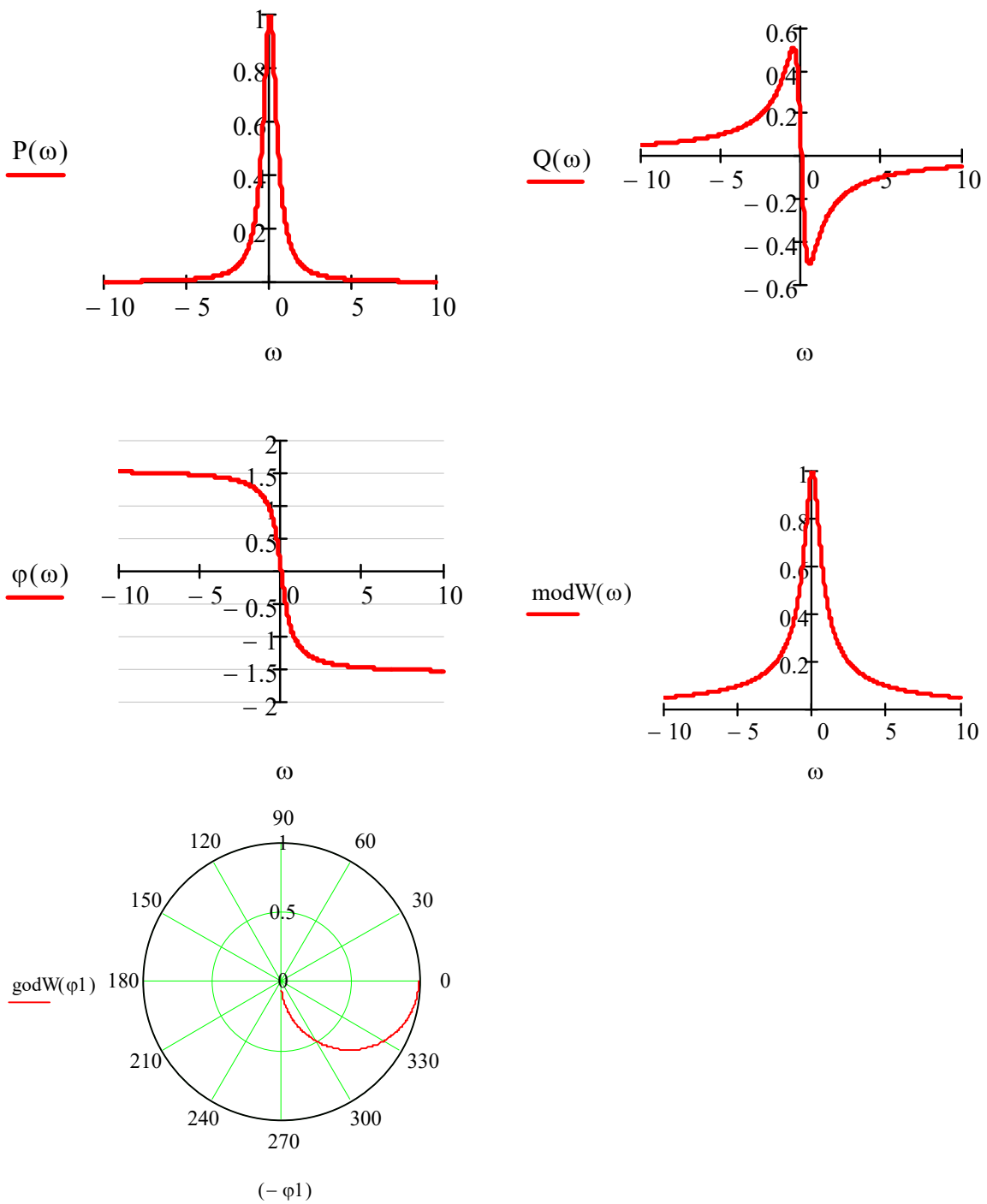


Рис. 4.3. Годограф функції $\vec{W}(\omega)$

Зауваження.

Часто для проведення вимірів на промислових об'єктах потрібні сигнали великої потужності. Генерація таких синусоїдальних

сигналів можлива з труднощами, і тому часто застосовують вхідні прямокутні періодичні сигнали (Рис. 4.4), які можна задати виразом

$$x(t) = \begin{cases} h, & \text{якщо } 2\nu\pi \leq \omega \cdot t < (2\nu + 1)\pi; \\ -h, & \text{якщо } (2\nu + 1)\pi \leq \omega \cdot t < 2(\nu + 1)\pi; \end{cases} \quad (4.8)$$

($\nu = 0, 1, 2, \dots$).

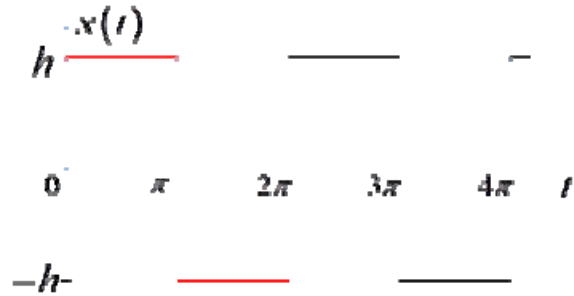


Рис. 4.4.

Крім того, такі сигнали легко генерувати в широкому спектрі частот і їх можна реалізувати за допомогою ключа, релейних пристроїв тощо. Оскільки вхідний сигнал (4.8) розкладається у ряд Фур'є

$$x(t) = \frac{4h}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

то і вихідний сигнал об'єкта можна представити у вигляді ряду

$$z(t) = n(t) + \frac{4h}{\pi} \left(|W(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{|W(j3\omega)|}{3} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots \right).$$

В цьому випадку, як і при використанні чисто синусоїдальних сигналів, одночасно вимірюють вхідний та вихідний сигнали. При обробці амплітуду вихідного сигналу для кожної частоти зменшують у $\pi/4$ рази (тобто приблизно на 27%. Виміри починають проводити із самих високих частот, і, оскільки промислові об'єкти є інерційними, на вищих частотах вихідний сигнал є синусоїдальним. На низьких частотах вводять корекцію по 3, 5 і 7-й гармонікам.

4.2. Статистичні методи знаходження частотних характеристик

Мета застосування статистичних (стохастичних) методів при визначенні частотних характеристик полягає насамперед у підвищенні достовірності вимірів та спрощенні процедур ідентифікації. В силу сказаного, один із найбільш розповсюджених статистичних методів – кореляційний – використовується не тільки для випадкових, але й для детермінованих вхідних процесів (діях).

Розглянемо застосування кореляційних методів при детермінованих вхідних процесах (діях). Ці методи прості, відрізняються малим часом вимірів та обробки інформації і дають хороші результати при невеликих амплітудах вхідного сигналу.

Зауважимо, що при застосуванні аналогових обчислювальних засобів немає необхідності у повному визначенні кореляційної функції. А при застосуванні цифрових ЕОМ ці методи є більш простими, ніж методи гармонічного аналізу.

І так, на вхід об'єкту надходить сигнал

$$x(t) = x_0 \cdot \sin \omega_k t .$$

Вихідний сигнал має вид:

$$z(t) = y(t) + n(t) = B_k \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) + n(t), \quad (4.9)$$

де $n(t)$ – приведена до виходу завада, некорельована із вихідним сигналом об'єкту $y(t)$ ($R_{yn}(\tau) \equiv 0$).

Тоді

$$R_{zz}(\tau) = R_{yy}(\tau) + R_{nn}(\tau). \quad (4.10)$$

Автокореляційна функція складової $y(t)$, як стаціонарного процесу, обраховується за формулою

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B_k^2 \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) \sin(\omega_k (t + \tau) + \varphi_k) dt .$$

Після тригонометричних перетворень та обчислень, $R_{yy}(\tau)$ матиме вид

$$R_{yy}(\tau) = \frac{B_k^2}{2} \cos \omega_k \tau .$$

$$\text{Тоді } R_{zz}(\tau) = \frac{B_k^2}{2} \cos \omega_k \tau + R_{nn}(\tau)$$

Враховуючи, що

$$B_k = x_0 W(j\omega_k)$$

та поклавши $R_{nn}(0) = 0$ (оскільки перешкоди некорельовані), отримаємо:

$$R_{zz}(0) \approx \frac{x_0^2 |W(j\omega_k)|^2}{2}.$$

Звідки знаходимо оцінку квадрата модуля частотної передатної функції на частоті ω_k :

$$|W(j\omega_k)|^2 \approx \frac{2R_{zz}(0)}{x_0^2}. \quad (4.11)$$

Зауважимо, що (4.11) не містить інформації про фазову характеристику об'єкту.

Щоб отримати цю характеристику, розглядають взаємнокореляційну функцію сигналів $z(t)$, $x(t)$ при $\tau = 0$ та $\tau = \frac{\pi}{2\omega_k}$. Після

обчислень маємо:

$$R_{zx}(0) = \frac{x_0^2 |W(j\omega)|}{2} \cos \varphi_k;$$

$$R_{zx}\left(\frac{\pi}{2\omega_k}\right) = \frac{x_0^2 |W(j\omega_k)|}{2} \sin \varphi_k.$$

Звідки знаходимо

$$|W(j\omega_k)| = \frac{2}{x_0^2} \sqrt{[R_{zx}(0)]^2 + \left[R_{zx}\left(\frac{\pi}{2\omega_k}\right)\right]^2},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{R_{zx}\left(\frac{\pi}{2\omega_k}\right)}{R_{zx}(0)}. \quad (4.12)$$

Структурна схема реалізації методу приведена на рис. 4.5.

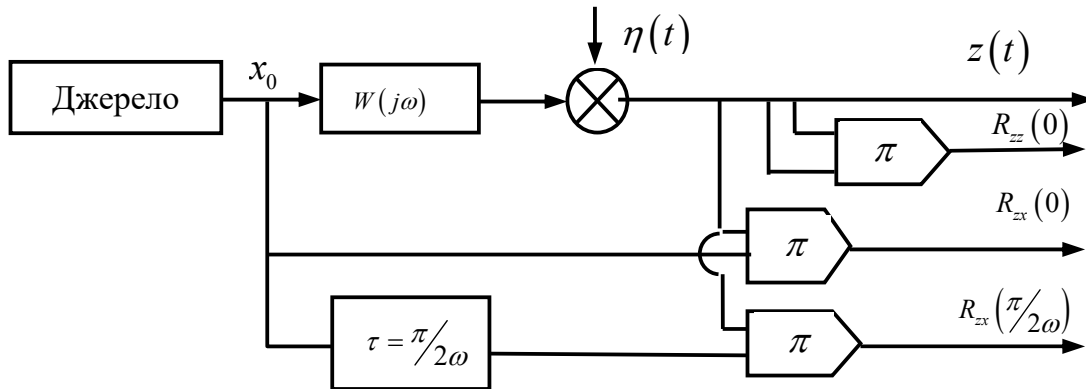


Рис. 4.5.

Відомий статистичний варіант описаного методу компенсації фазового зсуву. Структурна схема реалізації цього кореляційного методу представлена на рис. 4.6. У схемі використовується релейний пристрій для спрощення обчислення взаємно-кореляційної функції при $\tau = 0$. Фаза сигналу $x_2(t)$ повинна неперервно змінюватись. На кожній частоті проводиться два виміри.

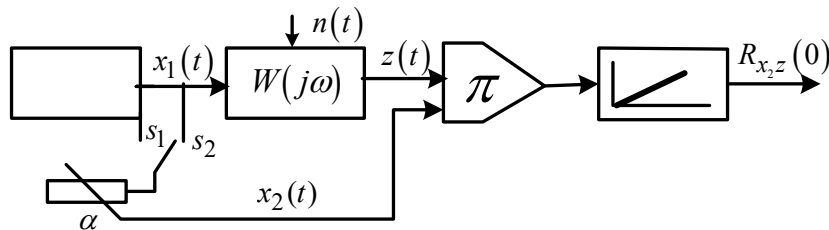


Рис. 4.6.

На вхід об'єкту подається сигнал $x_1(t) = A \cos \omega t$. Фаза α сигналу $x_2(t) = D(\alpha) \cos(\omega t + \alpha)$ вибирається так, щоб $R_{z x_2}(0)$ була мінімальною або рівною нулю. При цьому ключ знаходиться у положенні S_1 . Якщо ж фаза $x_2(t)$ приймає значення $\alpha + \pi/2$, то $R_{z x_2}(0)$ максимальна.

Наприклад. Якщо $z(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + n(t)$ і при значенні фази $\alpha = \alpha^*$ у сигналі $x_2(t)$ отримуємо $R_{z x_2}(0)$, то при значенні фази $\alpha = \alpha^* + \pi/2$ $R_{z x_2}(0)$ максимальна та дорівнює:

$$R_{xx_2}(0) = \frac{1}{2} D(\alpha) B .$$

Метод завадостійкий і дає добрі результати при $q \geq -60$ дБ .
(відношення сигнал-шум (затухання))

Як уже відмічалось, у якості вхідних сигналів часто застосовують різні періодичні із періодом $T = 2\pi$.

Так, для прямокутного вхідного сигналу виду (4.8) при $h = A$ маємо

$$R_{xx}(0) = \frac{8A}{\pi^2} \left[|W(j\omega)| \cos \varphi(\omega) + \frac{1}{9} |W(j3\omega)| \cos \varphi(3\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} |W(j5\omega)| \cos \varphi(5\omega) + \dots \right]; \quad (4.13)$$

$$R_{xx}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{8A}{\pi^2} \left[|W(j\omega)| \sin \varphi(\omega) - \frac{1}{9} |W(j3\omega)| \sin \varphi(3\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} |W(j5\omega)| \sin \varphi(5\omega) + \dots \right], \quad (4.14)$$

де A – амплітуда вхідного сигналу.

Звідси знаходимо частотні характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{\pi^2}{8A} \sqrt{[R_{xx}(0)]^2 + [R_{xx}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)]^2} . \quad (4.15)$$

Якщо у виразах (4.13), (4.14) знехтувати членами, амплітуди яких менше 2% амплітуди основної гармоніки, із (4.15) отримуємо:

$$|W(j\omega)|_{\text{дійс}} \approx 1.17 |W(j\omega)| .$$

Фаза $\varphi(\omega)$ обраховується за формулою (4.12).

Точність може бути підвищена при застосуванні трирівневого (m – рівневого) прямокутного чи трикутного сигналу [5].

За формулами (4.5), (4.6) знаходимо спектральну щільність та взаємну спектральну щільність об'єкту. Після чого за формулою (4.7) знаходимо оптимальну імпульсну перехідну функцію моделі $\hat{w}(t)$, а

за формулою $\hat{y}(t) = \int_0^t \hat{w}(\tau) x(t-\tau) d\tau$ знаходимо реакцію моделі на довільну вхідну дію $x(t)$. Така модель оптимально ідентифікує реакцію об'єкту на дію $x(t)$.

4.3. Похибки визначення характеристик сигналів

В процесі ідентифікації експеримент повинен забезпечити при мінімальному числі вимірів та часовому проміжку штучних збурень максимум корисної інформації. Отримані у результаті такого експерименту оцінки якості є наближеними (та випадковими). Похибки у цих оцінках зумовлені рядом факторів: наявністю шумів, не ідеальністю прийнятої моделі, квантуванням спостережуваних сигналів, скінченністю часового проміжку спостереження і т.п. Усі ці фактори необхідно розглядати у єдності, оскільки має місце взаємний їх вплив. Так, часовий інтервал спостереження залежить від шумів, від скінченного часу затухання перехідного процесу у об'єкті і особливо від зміни параметрів об'єкта в часі. Для простоти розглянемо вплив окремо кожного фактора на похибки ідентифікації.

4.3.1. Похибки зумовлені не ідеальністю моделі

Розглянемо ряд похибок, зумовлених не ідеальністю моделі. Не ідеальність проявляється у скінченності часу затухання, скінченності частотної полоси пропускання, нестабільності характеристик об'єкта.

Відомо [5], що якщо T_m, T_s – відповідно час (інтервал) спостереження та інтервал затухання перехідного процесу, то для періодичного прямокутного сигналу середня квадратична похибка має вигляд

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} \frac{N}{2} \left(\frac{1}{R+1} \right),$$

де σ_n, σ_s – середньо квадратичні відхилення корисного випадкового сигналу та шуму відповідно;

$$N = \frac{T_s}{\Delta t},$$

Δt – часовий проміжок квантування;

$$R = \left[\left(\frac{T_m - 2T_s}{T_s} \right) + \frac{1}{N} \right] - \text{коефіцієнт надлишковості.}$$

4.3.2. Похибки зумовлені скінченністю частотної полоси пропускання

Припустимо, що система має верхню (граничну) частоту $f_{гр}$. В цьому випадку згідно із теоремою Котельнікова динамічні характеристики об'єкта можна без суттєвих втрат інформації представити рядом дискретних величин. Наприклад, для імпульсної перехідної функції можна записати: $w(n \cdot \Delta t)$, де $\Delta t = \frac{1}{2 \times f_{гр}}$. Але якщо

$\Delta t < \frac{1}{2 \times f_{гр}}$, то $N = \frac{T_s}{\Delta t}$ зростає, що приводить до пропорційного

зростання похибки. Якщо перешкода має характер білого шуму, то для сталого інтервалу спостереження T_m похибка зростає пропорційно \sqrt{N} .

4.3.3. Похибки зумовлені квантуванням вхідних і вихідних сигналів об'єкта

Застосування цифрових ЕОМ у задачах ідентифікації приводить до дій із дискретними величинами, у якості яких вбирають середні значення вимірюваної величини на інтервалі квантування Δt

$$y_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k - \Delta t}^{t_k} y(t) dt$$

Точність такої дискретизації суттєво залежить від вибору інтервалу квантування в часі Δt . Як відмічалось, згідно із теоремою Котельнікова, Δt визначається граничною частотою пропускання об'єкта, $\Delta t = \frac{1}{2 \times f_{гр}}$. Проте на практиці, як правило, $f_{гр}$ невідома. Тому у ряді робіт рекомендується обирати $f_{гр} = 5 f_{max}$, де f_{max} – частота найвищих із спостережуваних у реалізації гармонік.

Встановлено, що похибка $\delta R(\tau)$ у визначені кореляційної функції задовольняє нерівність

$$|\delta R(\tau)| \leq \frac{\Delta^2}{12},$$

де Δ – інтервал квантування по рівню.

У табл. 4.1 наведено залежності $\delta R(\tau)$ від числа рівнів квантування.

Таблиця 4.1

Кількість рівнів n	Похибка δ , %
4	20
8	5
16	1.2
32	0.3
64	0.09

4.3.4. Похибки зумовлені вибором часового інтервалу спостереження

Для завадостійкості необхідно, щоб інтервал спостереження був великим, забезпечуючи достатній коефіцієнт надлишковості. Із-за не стаціонарності об'єкту інтервал спостереження доцільно вибирати коротким. На практиці інтервал спостереження вибирають перевищуючим час затухання об'єкту. Таким чином є певна суперечливість. Цю суперечливість можна усунути за допомогою поточного усереднення за методом стохастичної апроксимації, який має високу завадостійкість та відстежує не стаціонарність.

У таблиці 4.2 наведена залежність похибки визначення кореляційної функції для центрованого та не центрованого сигналів.

Таблиця 4.2

Похибка δ , %	Кратність інтервалу спостереження для центрованого процесу	Кратність інтервалу спостереження для нецентрованого процесу
10	1.6	16
5	3.2	32
2	8	80
1	16	160
0.1	160	1600

Таким чином, похибка спадає із зростанням інтервалу спостереження майже лінійно, а попереднє центрування випадкового сигналу знижує інтервал спостереження майже на порядок.

4.4. Вимоги до методів ідентифікації

У [5] було сформульовано основні вимоги до методів ідентифікації динамічних об'єктів:

1. Використовувана схема повинна бути якомога простою; по можливості, треба відмовитись від спеціальної апаратури ідентифікації.

2. Застосована апаратура повинна бути не складною та нечутливою до зовнішніх дій (впливів).

3. Методи ідентифікації повинні характеризуватись (мати) достатню точність.

4. Час вимірів повинен бути малим.

5. Методи ідентифікації повинні забезпечувати можливість вимірів у замкнених та незамкнених ланцюгах.

6. Методи ідентифікації повинні володіти (характеризуватись) завадостійкістю (стійкістю до перешкод).

7. Методи ідентифікації повинні бути автоматизованими, або щоб автоматизувались.

8. Пробні сигнали повинні бути репродукованими.

9. Пробні сигнали повинні бути такими, щоб їх можна було апроксимувати аналітичними функціями.

10. Амплітуди пробних сигналів повинні бути малими.

11. Реалізація пробних сигналів повинна бути простою.

12. Використовувані методи обробки інформації повинні бути простими, точними та швидкодіючими.

13. Повинна бути передбачена простота, точність та швидкість переходу від отриманих параметрів до любых параметрів інших еквівалентних математичних моделей.

14. По можливості належить відмовитись від застосування додаткових перетворень.

15. Методи ідентифікації повинні бути незалежними від початкових умов.

16. Ідентифікація повинна проводитись по можливості у режимі нормального функціонування.

Цей список вимог можна продовжити, але уже перерахованих вимог достатньо, щоб зрозуміти, що одночасне їх виконання неможливе, настільки вони суперечливі. Із точки зору інженерної практики треба знайти оптимальний варіант, який диктується особливостями кожного конкретного випадку.

Питання для самоперевірки:

1. Який зв'язок між вихідним сигналом об'єкту його імпульсною перехідною функцією та вхідним сигналом?
2. В чому полягає суть прямого методу визначення частотних характеристик об'єкта? Навести схему.
3. Як виражається спектральна щільність вихідного сигналу через спектральну щільність вхідного?
4. В чому полягає суть статистичного методу визначення частотних характеристик об'єкта? Навести структурну схему.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ

5.1. Визначення частотних характеристик об'єкту заданого різницевиими рівняннями (час змінюється дискретно)

На практиці часто має місце ситуація, коли система визначається у дискретні рівновіддалені моменти часу:

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, t_3 = 3\Delta t, \dots, t_k = k\Delta t, \dots \quad (5.1)$$

Зауважимо, що вибір Δt ґрунтується на теоремі Котельнікова [4] із застосуванням оцінок (3.24).

В цьому випадку диференційні рівняння замінюють на різницеві. Для такого переходу приймемо наступні очевидні позначення вхідного та вихідного сигналів у відзначені моменти часу:

$$x(n) \equiv x(t_n); qx(n) \equiv x(t_n + \Delta t); q^2x(n) \equiv x(t_n + 2\Delta t), \dots,$$

$$q^m x(n) \equiv x(t_n + m\Delta t);$$

$$q^{-1}x(n) \equiv x(t_n - \Delta t); q^{-2}x(n) \equiv x(t_n - 2\Delta t), \dots, q^{-m}x(n) \equiv x(t_n - m\Delta t);$$

$$y(n) \equiv y(t_n); qy(n) \equiv y(t_n + \Delta t); q^2y(n) \equiv y(t_n + 2\Delta t), \dots,$$

$$q^m y(n) \equiv y(t_n + m\Delta t);$$

$$q^{-1}y(n) \equiv y(t_n - \Delta t); q^{-2}y(n) \equiv y(t_n - 2\Delta t), \dots, q^{-m}y(n) \equiv y(t_n - m\Delta t);$$

Очевидно, що у останніх виразах Δt можна не писати, а залишити лише коефіцієнти. Матимемо:

$$x(n) \equiv x(t_n); qx(n) \equiv x(t_n + 1); q^2x(n) \equiv x(t_n + 2), \dots, q^m x(n) \equiv x(t_n + m);$$

$$q^{-1}x(n) \equiv x(t_n - 1); q^{-2}x(n) \equiv x(t_n - 2), \dots, q^{-m}x(n) \equiv x(t_n - m);$$

$$y(n) \equiv y(t_n); qy(n) \equiv y(t_n + 1); q^2y(n) \equiv y(t_n + 2), \dots, q^m y(n) \equiv y(t_n + m);$$

$$q^{-1}y(n) \equiv y(t_n - 1); q^{-2}y(n) \equiv y(t_n - 2), \dots, q^{-m}y(n) \equiv y(t_n - m);$$

Зазначені формули визначають значення сигналу у зсунуті моменти часу. Величина зсуву у часі $\ell \cdot \Delta t$ визначається показником степеня q^ℓ , де q – **оператор** а не множник; $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$. Знак "+" відповідає зсуву вперед, знак "-" відповідає зсуву назад.

Кожній похідній у рівнянні (3.43) поставимо у відповідність зсунуте значення функції за правилом:

$$\begin{aligned} y \Rightarrow y(n); y' \Rightarrow q^{-1}y(n); y'' \Rightarrow q^{-2}y(n); \dots, y^{(n_a)} \Rightarrow q^{-n_a}y(n); \\ x \Rightarrow x(n); x' \Rightarrow q^{-1}x(n); x'' \Rightarrow q^{-2}x(n); \dots, x^{(n_b)} \Rightarrow q^{-n_b}x(n). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тоді після заміни у рівнянні (3.43) похідних відповідними виразами (5.2), отримаємо різницеве рівняння аналогічне диференціальному рівнянню (3.43):

$$\begin{aligned} q^{-n}y(n) + a_1q^{-(n-1)}y(n) + \dots + a_{n-1}q^{-(n-n+1)}y(n) + a_ny(n) = \\ = b_0q^{-m}x(n) + b_1q^{-(m-1)}x(n) + \dots + b_{m-1}q^{-(m-m+1)}x(n) + b_mx(n), \end{aligned} \quad (5.3)$$

або після винесення за дужки $y(n)$, $x(n)$ отримуємо

$$\begin{aligned} (q^{-n} + a_1q^{-(n-1)} + a_2q^{-(n-2)} + \dots + a_{n-1}q^{-1} + a_n)y(n) = \\ = (b_0q^{-m} + b_1q^{-(m-1)} + b_2q^{-(m-2)} + \dots + b_{m-1}q^{-1} + b_m)x(n), \end{aligned} \quad (5.4)$$

Якщо ввести оператори

$$A_n(q) = q^{-n} + a_1q^{-(n-1)} + a_2q^{-(n-2)} + \dots + a_{n-1}q^{-1} + a_n; \quad (5.5)$$

$$B_m(q) = b_0q^{-m} + b_1q^{-(m-1)} + b_2q^{-(m-2)} + \dots + b_{m-1}q^{-1} + b_m,$$

то різницеве рівняння (5.3) або (5.4) в операторній формі набуде виду

$$A_n(q)y(n) = B_m(q)x(n). \quad (5.6)$$

Найчастіше різницеве рівняння розглядають у наступній формі:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_ny(t-n) = \\ = b_0x(t) + b_1x(t-1) + b_2x(t-2) + \dots + b_mx(t-m). \end{aligned}$$

У цьому випадку оператори (5.5) набудуть виду

$$A_n(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n-1}q^{-n+1} + a_nq^{-n}; \quad (5.7)$$

$$B_m(q) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{m-1}q^{-m+1} + b_mq^{-m},$$

а рівняння (5.6) запишеться так

$$A_n(q)y(n) = B_m(q)x(n).$$

Тоді вираз

$$G(q) = \frac{B_m(q)}{A_n(q)} \quad (5.8)$$

називають передатною функцією дискретної системи. В цьому випадку вихідний дискретний сигнал $y(t)$ виражається через вхідний $x(t)$ у наступній операторній формі

$$y(t) = \frac{B_m(q)}{A_n(q)}x(t), \text{ або } y(t) = G(q)x(t), \quad (5.9)$$

де, як визначалось раніше, $t = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Із урахуванням випадкової завади $\eta(t)$ (5.9) набуде виду

$$y(t) = G(q)x(t) + H(q)\mu(t),$$

де $H(q)$ – оператор, що враховує дію завади на об'єкт.

Усі характеристики *неперервних систем* переносяться на *дискретні системи*. Різниця лише у тому, що для *неперервних систем характеристики визначались через інтеграли, а для дискретних через відповідні суми*. При цьому, зрозуміло, є певні особливості, деякі із них розглянемо.

5.2. Реакція дискретної системи на дискретний вхідний сигнал

Імпульсна реакція дискретної системи $g(t)$ задається нескінченною послідовністю чисел:

$$g(1), g(2), g(3), \dots, g(\ell), \dots \text{ або } \{g(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty} \quad (5.10)$$

На цю послідовність накладається умова стійкості

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |g(\ell)| < \infty, \quad (5.11)$$

тобто ряд (5.11) повинен бути абсолютно збіжним (сума ряду буде скінченним числом).

Аналогічно (5.10) задається вхідний сигнал:

$$x(0), x(1), x(2), \dots, x(\ell), \dots \text{ або } \{x(\ell)\}_{\ell=0}^{\infty} \quad (5.12)$$

який також повинен задовольняти умові стійкості аналогічній (5.11). Тоді значення вихідного сигналу $y(t)$ у довільний момент часу $t = k$ ($k = 1, 2, \dots$) обраховується за формулою

$$y(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) \cdot x(k - \ell). \quad (5.13)$$

Зауважимо, що вихідний сигнал у момент часу $t = k$ $y(k)$ формується під впливом значень вхідного сигналу, що надійшли *раніше моменту* $t = k$. Тому, коли вхідний сигнал такий, що $x(t) = 0$, при $t < 0$, формулу (5.13) можна записати у виді

$$y(k) = \sum_{\ell=1}^k g(\ell) \cdot x(k - \ell). \quad (5.14)$$

Тоді, у сумі (5.14) залишається рівно k доданків.

Обчислимо кілька значень вихідного сигналу, скориставшись (5.14) та сформуємо табл. 5.1:

Таблиця 5.1

$k = 1$	$y(1) = \sum_{\ell=1}^1 g(\ell) \cdot x(1-\ell) = g(1) \cdot x(1-1) = g(1) \cdot x(0);$
$k = 2$	$y(2) = \sum_{\ell=1}^2 g(\ell) \cdot x(2-\ell) = g(1) \cdot x(2-1) + g(2) \cdot x(2-2) =$ $= g(1) \cdot x(1) + g(2) \cdot x(0);$
$k = 3$	$y(3) = \sum_{\ell=1}^3 g(\ell) \cdot x(3-\ell) = g(1) \cdot x(2) + g(2) \cdot x(1) + g(3) \cdot x(0);$
$k = 4$	$y(4) = \sum_{\ell=1}^4 g(\ell) \cdot x(4-\ell) =$ $= g(1) \cdot x(3) + g(2) \cdot x(2) + g(3) \cdot x(1) + g(4) \cdot x(0);$

Приклад 1. За імпульсною реакцією дискретної системи $g(t) = B_0 e^{-t}$ при $t = 1, 2, 3, \dots$ для вхідної дії

$$x(t) = \begin{cases} A_0 & \text{для } t = \{1, 2, 3, 4\}; \\ 0 & \text{для } t = 0 \text{ або } t > 4 \end{cases}$$

обчислити вихідний сигнал й побудувати його графік.

Розв'язок.

Перевіряємо виконання умови стійкості (5.11):

$$\sum_{t=1}^{\infty} |g(t)| = \sum_{t=1}^{\infty} |B_0| e^{-t} = |B_0| \sum_{t=1}^{\infty} e^{-t} = |B_0| \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} < \infty,$$

як сума нескінченної геометричної прогресії із знаменником $e^{-1} < 1$.

Умова стійкості для вхідної дії $x(t)$ виконується, тому що вона приймає значення відмінні від нуля лише у скінченній множині точок (дискретний прямокутний імпульс). (Рис. 5.1)

Користуємось формулою (5.14) та табл. 5.1, отримуємо:

$$\begin{aligned} k = 1 \quad y(1) &= g(1) \cdot x(1-1) = B_0 e^{-1} \cdot x(0) = 0; \\ k = 2 \quad y(2) &= g(1) \cdot x(2-1) + g(2) \cdot x(2-2) = B_0 e^{-1} \cdot A_0 + B_0 e^{-2} \cdot 0 = \\ &= A_0 \cdot B_0 e^{-1}; \\ k = 3 \quad y(3) &= B_0 e^{-1} \cdot A_0 + B_0 e^{-2} \cdot A_0 = A_0 B_0 (e^{-1} + e^{-2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k=4 \quad y(4) &= B_0 e^{-1} \cdot A_0 + B_0 e^{-2} \cdot A_0 + B_0 e^{-3} \cdot A_0 = A_0 B_0 (e^{-1} + e^{-2} + e^{-3}) = \\
&= A_0 B_0 (1 + e^{-1} + e^{-2}) e^{-1}; \\
k=5 \quad y(5) &= B_0 e^{-1} \cdot A_0 + B_0 e^{-2} \cdot A_0 + B_0 e^{-3} \cdot A_0 + B_0 e^{-4} \cdot A_0 = \\
&= A_0 B_0 (e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + e^{-4}) = A_0 B_0 (1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3}) e^{-1}; \\
k=6 \quad y(6) &= g(1)x(5) + g(2)x(4) + g(3)x(3) + g(4)x(2) + \\
&+ g(5)x(1) + g(6)x(0) = \\
&= 0 + B_0 e^{-2} A_0 + B_0 e^{-3} A_0 + B_0 e^{-4} A_0 + B_0 e^{-5} A_0 + 0 = \\
&= B_0 A_0 (e^{-2} + e^{-3} + e^{-4} + e^{-5}) = B_0 A_0 (1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3}) e^{-2}; \\
k=7 \quad y(7) &= g(3)x(4) + g(4)x(3) + g(5)x(2) + g(6)x(1) = \\
&= B_0 A_0 (e^{-3} + e^{-4} + e^{-5} + e^{-6}) = B_0 A_0 (1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3}) e^{-3}; \\
k=8 \quad y(8) &= g(4)x(4) + g(5)x(3) + g(6)x(2) + g(7)x(1) = \\
&= B_0 A_0 (1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3}) e^{-4}.
\end{aligned}$$

Аналогічно і т.д., після кожного кроку буде добавлятися множник e^{-t} .

Оскільки вхідна дія обмежена у часі, то її вплив на вихідний сигнал послаблюється із зростанням t . Графік $y(t)$ представлено на рис. 5.2. при $B_0 = 10$; $A_0 = 2$.

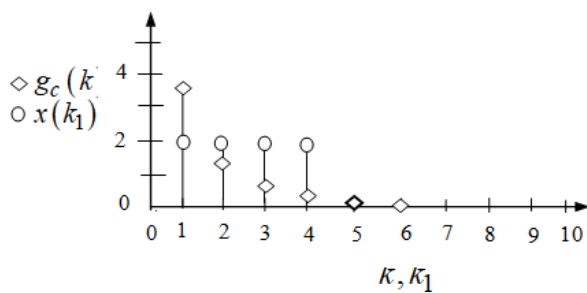


Рис. 5.1

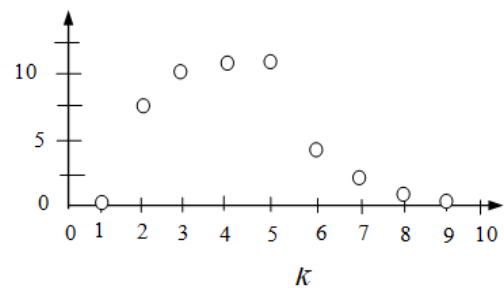


Рис. 5.2

Завада $v(t)$ задається виразом

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e(t-k), t = 0, 1, 2, \dots; \quad (5.14)$$

де $\{h(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність чисел, яка задовольняє умові стійкості

$$(5.11) \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty; \text{ крім того } h(k) = 0 \text{ для } k < 0.$$

$\{e(k)\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність взаємно незалежних однаково розподілених із деякою функцією щільності ймовірностей випадкових величин. Як правило, їх математичне сподівання дорівнює нулю, а дисперсія $\lambda > 0$.

5.3. Передатна функція лінійної дискретної системи

Вихідний сигнал (5.13) з урахуванням завад (5.14) набуде виду

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot x(t-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e(t-k), t = 0, 1, 2, \dots; \quad (5.15)$$

Застосувавши раніше введений оператор зсуву назад на k кроків

$x(t-k) = q^{-k} x(t)$, перепишемо (5.15) у наступному виді

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot q^{-k} x(t) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k) q^{-k} e(t) = \\ &= G(q)x(t) + H(q)e(t), t = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (5.16)$$

де, очевидно,

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot q^{-k}; H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) q^{-k}. \quad (5.17)$$

$G(q)$ називають *передатним оператором або передатною функцією лінійної системи* (5.13). Відмітимо, що формула (5.15) описує зв'язок між послідовностями $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{e(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Формально у формулах (5.17) замінимо q на z отримуємо z -перетворення послідовностей $\{g(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h(k)\}_{k=0}^{\infty}$, тобто

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot z^{-k}; H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}. \quad (5.18)$$

Функція $G(z)$ із (5.18) представляє собою комплексно значну функцію від комплексної змінної z . Значення β_i , котрі є коренями рівняння $G(\beta_i) = 0$, називаються нулями передатної функції (або системи), а значення α_i , при наближенні до яких функція $G(z)$

прямує до нескінченності, називають *полюсами*. Якщо $G(z)$ – раціональна функція від z , то полюси представляють собою нулі полінома у знаменнику передатної функції (наприклад, поліном $A_n(z)$ у формулі (5.8)).

Кажуть, що передатна функція $G(q)$ (або "система $G(q)$ ", або "фільтр $G(q)$ ") стійка, якщо

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot q^{-k}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty. \quad (5.19)$$

Означення (5.19) співпадає із відомим в теорії означенням ОРОВ - стійкості (обмежена реакція на обмежений вхідний сигнал)[10 с.32]. Якщо виконується умова (5.19), то для обмеженого вхідного сигналу $\{x(t)\}$ системи $G(q)$ ($|x(t)| \leq C - \text{const}$), вихідний сигнал $y(t) = G(q)x(t)$ також обмежений.

Фільтр $H(q)$ (5.18) називається монічним, якщо коефіцієнт із нульовим номером дорівнює одиниці, тобто

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) q^{-k}, \quad h(0) = 1. \quad (5.20)$$

5.4. Частотна характеристика дискретної системи

Знайдемо відгук системи (5.13) на косинусоїдальний вхідний гармонічний сигнал

$$x(t) = \cos \omega t.$$

Для зручності представимо його у формі

$$x(t) = \text{Re } e^{j\omega t},$$

де Re позначає дійсну частину комплексного числа. В силу (5.13) відповідний вихідний сигнал можна записати так:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot x(t-k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot \text{Re } e^{j\omega(t-k)} = \\ &= \text{Re } \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot e^{j\omega(t-k)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

або

$$y(t) = \text{Re} \left\{ e^{j\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \cdot e^{-j\omega k} \right\} = \text{Re} \left\{ e^{j\omega t} G(e^{j\omega}) \right\} =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} \left| G(e^{j\omega}) \right| e^{j\varphi} \right\} = \left| G(e^{j\omega}) \right| \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.22)$$

де

$$\varphi = \arg G(e^{j\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} G(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} G(e^{j\omega})}.$$

У формулі (5.21) припускається, що вхідний сигнал задано для значень аргументу $\{t\}_{-\infty}^{\infty}$, тобто "у далекому минулому". Якщо ж $x(t) = 0$ при $t < 0$, то у (5.21) будуть відсутніми доданки, для яких $k > t$, тому цей вираз набуде виду

$$y(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^t g(k) \cdot e^{j\omega(t-k)}.$$

Модуль кожного доданку залишкової суми

$$- \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} \sum_{k=t+1}^{\infty} g(k) e^{-j\omega k} \right\}$$

не буде перевищувати відповідного доданку ряду $\sum_{k=t+1}^{\infty} |g(k)|$, який є збіжним (умова стійкості $G(q)$), причому $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=t+1}^{\infty} |g(k)| = 0$. А це означає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} \sum_{k=t+1}^{\infty} g(k) e^{-j\omega k} \right\} = 0$$

У любому випадку із (5.22) впливає, що вихідний сигнал також є косинусоїдальним із тією ж частотою зсунутим по фазі, а амплітуда змінена у $|G(e^{j\omega})|$ разів. З цього слідує, що комплексна величина $G(e^{j\omega})$ є періодичною із періодом 2π , дорівнює значенню передатної функції у точці $z = e^{j\omega}$ та повністю характеризує поведінку системи у стаціонарному режимі при косинусоїдальному вхідному сигналі частоти ω .

Тому комплексно значну функцію $G(e^{j\omega})$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, називають **частотною характеристикою системи** (5.13). У якості графічного представлення цієї характеристики прийнято використовувати графіки залежностей

$\lg|G(e^{j\omega})|$ та $\arg G(e^{j\omega})$ від $\lg\omega$. Таке представлення називають **діаграмою Боде**. Годограф функції $G(e^{j\omega})$ на комплексній площині називають **діаграмою Найквіста**. Таким чином, зазначені поняття для неперервного сигналу переносяться на дискретний випадок.

5.5. Періодограми сигналів заданих на скінченному інтервалі

Розглянемо скінченну послідовність значень вхідного сигналу $x(t)$ ($t = 1, 2, \dots, N$). Визначимо функцію $X_N(\omega)$:

$$X_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x(t) e^{-j\omega t}. \quad (5.23)$$

Послідовність значень цієї функції у точках $\omega = 2\pi k/N$ ($k = 1, 2, \dots, N$) представляє собою відоме дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) послідовності $x(1), x(2), \dots, x(N)$, або скорочено x_1, x_2, \dots, x_N . Сигнал $x(t)$ можна представити через обернене ДПФ, застосовуючи співвідношення

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi kt/N}. \quad (5.24)$$

Із (5.23) видно, що функція $X_N(\omega)$ має період 2π :

$$\begin{aligned} X_N(\omega + 2\pi) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x(t) e^{-j(\omega+2\pi)t} = [e^{-j2\pi t} = 1] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x(t) e^{-j\omega t} = X_N(\omega). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Оскільки сигнал $x(t)$ є дійсним, то справедлива рівність

$$X_N(-\omega) = \overline{X_N(\omega)},$$

де риска зверху означає взяття комплексно – спряженого числа. Таким чином, функція $X_N(\omega)$ повністю визначається у інтервалі $[0, \pi]$. Тим не менше, прийнято розглядати функцію $X_N(\omega)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$, тому використовуючи формулу (5.254) та періодичність функції $e^{j\omega}$, формулу (5.24) часто записують у виді

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi kt/N}. \quad (5.26)$$

У формулі (5.26) N парне.

Зауваження. Формули (5.23), (5.26) у сучасному програмному забезпеченні Mathcad реалізуються стандартно швидким перетворенням Фур'є (ШПФ функцією FFT (5.23) та обернене перетворення Фур'є IFFT (5.26). При цьому, на числа N накладається вимога $N = 2^m$, $m = 1, 2, \dots$

У формулі (5.26) сигнал $x(t)$ представляється у вигляді лінійної комбінації N експонент $e^{j\omega t}$ різних частот ω . Використовуючи формулу Ейлера $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, цей сигнал можна представити у вигляді суми $\cos \omega t$ та $\sin \omega t$ із тими ж частотами, позбувшись комплексних чисел.

Число $X_N(2\pi k/N)$ характеризує "вагу" компоненти із частотою $\omega_k = 2\pi k/N$ ($k = 1, 2, \dots, N$) у розкладі сигналу $\{x(1), x(2), \dots, x(N)\}$. Квадрат модуля цього числа $|X_N(2\pi k/N)|^2$ є мірою енергетичного вкладу відповідної частотної компоненти у сумарну "дію сигналу". Ця величина

$$|X_N(\omega)|^2$$

відома під назвою періодограми сигналу $x(t)$ ($t = 1, 2, \dots, N$).

Рівність Парсеваля

$$\sum_{k=1}^N \left| X_N \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right|^2 = \sum_{t=1}^N x^2(t)$$

є ще одним свідченням на користь правильності твердження про адитивність енергії сигналу по частотним складовим.

Очевидно, все сказане відносно вхідного сигналу $x(t)$ справедливе відносно вихідного сигналу $y(t)$. Таким чином, якщо на вхід системи G надходить *періодичний* сигнал $x(t)$ періоду N , тоді на виході такої системи сигнал $y(t)$ буде того ж періоду та матиме місце рівність

$$Y_N(\omega) = G(\omega) X_N(\omega),$$

де $G(\omega)$, $X_N(\omega)$ визначаються формулами (5.18) та (5.23) відповідно;

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 1, 2, \dots, N.$$

Періодограма вихідного сигналу запишеться так

$$|Y_N(\omega)|^2 = |G(\omega)|^2 |X_N(\omega)|^2.$$

Приклад 2.

Визначити періодограму косинусоїди $x(t) = A \cos \omega_0 t$, де $\omega_0 = 2\pi/N_0$ для деякого цілого числа $N_0 > 1$.

Розглянемо інтервал $t = 1, 2, \dots, N$, де N кратне $N_0 : N = sN_0$, тобто розглядається s повних періодів функції $x(t)$ (Рис. 5.3).

$$A_0 = 5; N_0 = 8; s = 4; N = s \cdot N_0; x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

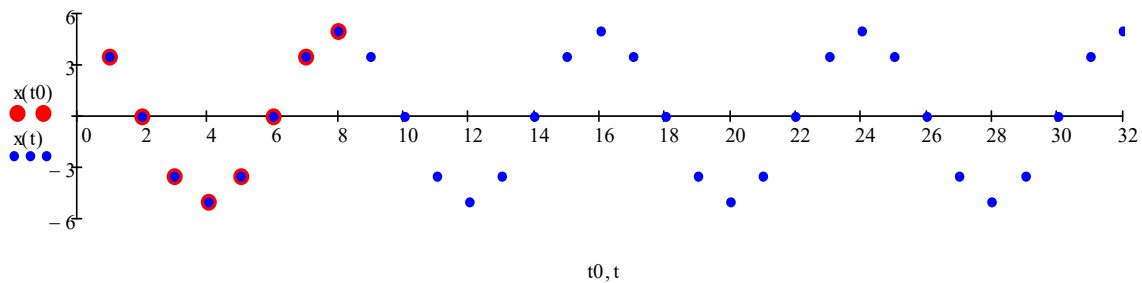


Рис. 5.3. t_0, t – сек

Враховуючи, що

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}],$$

згідно із (5.23) отримуємо

$$X_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \frac{A}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} = \frac{A}{2\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N [e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 - \omega)t}].$$

Застосуємо рівність

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{j2\pi rk/N} = \begin{cases} 1, & \text{при } r = 0, \\ 0, & \text{при } 1 \leq r < N. \end{cases}$$

Отримаємо $X_N(\omega) = \frac{A}{2\sqrt{N}} N = \frac{A}{2} \sqrt{N}$ при $\omega = \pm\omega_0$. Тоді

$$|X_N(\omega)|^2 = \begin{cases} N \frac{A^2}{4}, & \text{якщо } \omega = \pm \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi s}{N}, \\ 0, & \text{якщо } \omega = \frac{2\pi k}{N}, k \neq s. \end{cases}$$

Графік періодограми представлено на рис. 5.4 (для $\omega > 0$ – фізичних частот).

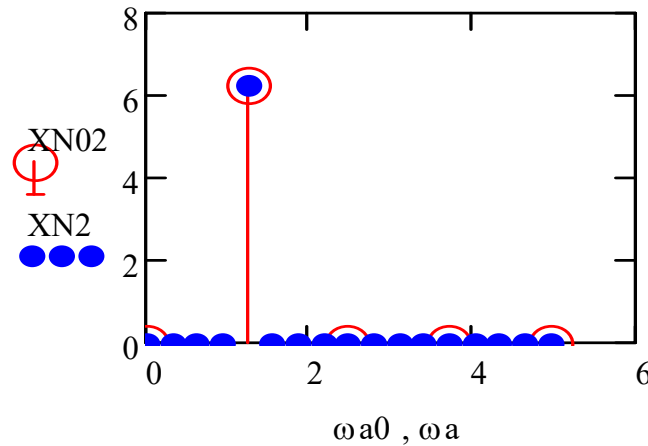


Рис. 5.4. ω_a – рад/с

5.6. Спектри сигналів дискретної системи

Для неперервного стаціонарного випадкового процесу зв'язок між спектральною щільністю та кореляційною функцією виражається формулами Вінера – Хінчина: взаємно оберненими перетвореннями Фур'є (3.37, 3.38) або (3.39, 3.40).

Аналогічний зв'язок має місце й для дискретних сигналів: відмінність лише в тому, що інтеграли замінені відповідними сумами, а спектральна щільність – на спектр сигналу. Враховуючи, що виконуються умови (3.24) дискретизації випадкового процесу, за формулами (3.25– 3.29) обраховуємо кореляційну $R_{yy}(\tau)$ та взаємно кореляційну $R_{yx}(\tau)$ функції. Тут $\tau = 0, 1, 2, \dots$ (Насправді треба мати на увазі, що $\tau = 0, 1\Delta t, 2\Delta t, \dots$). **Спектр** сигналу $\{y(t)\}$ визначають так

$$\Phi_y(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N R_y(\tau) e^{-j\tau\omega}, \quad (5.27)$$

а **взаємний спектр** сигналів $\{y(t)\}$ та $\{x(t)\}$ – як

$$\Phi_{yx}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N R_{yx}(\tau) e^{-j\tau\omega}. \quad (5.28)$$

У подальшому, говорячи про "спектр" сигналу, неявно допускається, що усі включені у визначення умови виконуються.

Хоча спектр $\Phi_{yy}(\omega)$ завжди дійсний, спектр $\Phi_{yx}(\omega)$ в загальному випадку є комплексно значною функцією від ω . Його дійсна частина відома під назвою **коспектру**, а уявна частина – **квадратурного спектра**. Аргумент $\arg \Phi_{yx}(\omega)$ називають **фазовим спектром**.

Зауважимо, що за означенням оберненого перетворення Фур'є

$$D_s = R_{ss}(0) = \sum_{k=1}^N \Phi_s(\omega_k)$$

Приклад 3.

Спектр синусоїди прикладу 2.

Обчислимо коваріацію процесу $x(t)$ за формулою (3.26), врахувавши, що N скінченне

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)x(k-\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A^2 \cos(\omega_0 k) \cos(\omega_0(k-\tau)), \tau \geq 0.$$

Оскільки

$$\cos(\omega_0 k) \cos(\omega_0(k-\tau)) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega_0 k - \omega_0 \tau) + \cos(\omega_0 \tau)],$$

то

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A^2 \frac{1}{2} [\cos(2\omega_0 k - \omega_0 \tau) + \cos(\omega_0 \tau)] = & (5.29) \\ &= \frac{A^2}{2N} \sum_{k=1}^N \cos(\omega_0 \tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned}$$

Тепер за формулою (5.27) запишемо спектр у виді

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-j\tau\omega} = \frac{A^2}{2} \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

де δ – функція Дірака.

Спектр випадкового процесу, який описується формулою (5.14) визначається виразом

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{j\omega})|^2,$$

де $H(e^{j\omega})$ визначається формулою (5.18).

Приклад 4. Спектр суміші детермінованого та випадкового сигналів.

Розглянемо сигнал виду

$$s(t) = x(t) + v(t),$$

де $\{x(t)\}$ – детермінований сигнал із спектром $\Phi_x(\omega)$ та $\{v(t)\}$ – стаціонарний випадковий процес із нульовим середнім та спектром $\Phi_v(\omega)$. Тоді

$$\Phi_s(\omega) = \Phi_x(\omega) + \Phi_v(\omega).$$

Таким чином, отримано частотні характеристики дискретної системи G й наведено зв'язок між частотними характеристиками вхідного та вихідного сигналів.

Питання для самоперевірки:

1. Коли виникає необхідність переходу до різницевих рівнянь?
2. Записати різницеве рівняння – аналог диференційного – через оператор зсуву.
3. Записати передатну функцію дискретної системи.
4. В чому полягає умова стійкості передатної функції?
5. Записати відгук дискретної системи на косинусоїдальний вхідний гармонічний сигнал.
6. Записати частотну характеристику дискретної системи.
7. Визначення спектру сигналу дискретної системи.

6. МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК ОБ'ЄКТА

Методи ідентифікації лінійних об'єктів в значній мірі вивчені й достатньо алгоритмізовані. Більш складно розв'язуються задачі ідентифікації нелінійних об'єктів. Одним із шляхів розв'язання проблеми ідентифікації нелінійних об'єктів є їх апроксимація лінійними моделями. У невеликому діапазоні зміни вхідних координат і для певних типів нелінійностей така апроксимація цілком виправдана.

Питання апроксимації важливі й при ідентифікації лінійних об'єктів. Так, раніше відмічалось, що прямим методом можна визначити *послідовності дискретних значень* оператора зв'язку вхідного і вихідного сигналів:

- у частотній області – амплітудні та фазові характеристики $|W(j\omega)|$ та $\varphi(j\omega)$, годографи $W(j\omega)$ та ін.;
- у часовій області – імпульсна перехідна функція $w(t)$, перехідна функція $h(t)$.

Отримані послідовності значень перерахованих характеристик об'єктів можуть бути апроксимовані певними аналітичними виразами. Також аналогічними виразами можуть бути апроксимовані вхідні та вихідні сигнали. На практиці виникає необхідність зв'язати отримані у результаті апроксимації коефіцієнти аналітичного представлення оператора зв'язку певними співвідношеннями із параметрами досліджуваного об'єкту.

Крім того, застосування методів апроксимації динамічних характеристик об'єктів та статистичних характеристик сигналів виявляється особливо зручним і з точки зору синтезу адаптивних алгоритмів ідентифікації. Тому проблема апроксимації є актуальною.

6.1. Поняття апроксимації функцій та характеристик об'єктів і сигналів

Будемо розглядати функцію $f(t)$ на інтервалі часу $[0, T]$. Це може бути вхідний чи вихідний сигнали, імпульсна перехідна функція об'єкту $w(t)$, або авто-кореляційна, або взаємно-кореляційна функції сигналів $R_{xx}(\tau)$ і $R_{xy}(\tau)$ і т.д. Таким чином, все, що буде говоритись про $f(t)$, автоматично переноситься на усі функції, які характеризують об'єкт чи сигнал.

І так, $f(t)$ – абсолютно інтегрована функція на інтервалі часу $[0, T]$. Це означає, що виконується нерівність

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty, \text{ (тобто інтеграл дорівнює деякому скінченному числу).}$$

На практиці ця вимога, як правило, виконується.

Термін "*апроксимувати функцію $f(t)$ заданою системою функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ на інтервалі часу $[0, T]$* " означає справедливість такої наближеної рівності

$$f(t) \approx f_n(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \dots + a_n\varphi_n(t), \text{ для } \forall t \in [0, T],$$

або

$$f(t) \approx f_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(t), \text{ для } \forall t \in [0, T],$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – коефіцієнти апроксимації; усі функції $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – абсолютно інтегровані.

Таким чином, вираз

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(t) \tag{6.1}$$

апроксимує задану функцію $f(t)$ на проміжку $[0, T]$.

Позначимо $\Delta_n(t)$ – відхилення значень функції $f(t)$ від $f_n(t)$:

$$\Delta_n(t) = f(t) - f_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(t),$$

На основі $\Delta_n(t)$ визначають критерій наближення $f_n(t)$ до $f(t)$. Найбільш поширеним показником близькості є *середньоквадратичне наближення* ("середньоквадратична похибка")

$$\varepsilon = \frac{1}{T} \int_0^T [\Delta_n(t)]^2 dt \rightarrow \min_{\{a_k\}}, \tag{6.2}$$

де запис $\min_{\{a_k\}}$ означає, що мінімальне значення досягається за рахунок вибору коефіцієнтів апроксимації $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

У цьому випадку величина

$$\delta = \frac{\int_0^T [\Delta_n(t)]^2 dt}{\int_0^T [f(t)]^2 dt} \rightarrow \min_{\{a_k\}} \quad (6.3)$$

– "відносна квадратична похибка".

Таким чином, *задача апроксимації полягає у тому, щоб при вибраній системі функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ знайти такі коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, які забезпечують мінімум похибок ε, δ .*

Вид системи функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ вибирається виходячи із апіорної інформації про апроксимовані функції.

Вимоги до функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$:

1. Функції повинні бути абсолютно інтегрованими на інтервалі часу $[0, T]$.

2. Функції повинні бути достатньо гладкими (в кожній точці графіка функції можна провести дотичну, тобто в кожній точці існує похідна; її значення змінюються плавно із великим періодом коливань) для регуляризації розв'язку рівнянь ідентифікації [5].

3. Система функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ повинна бути лінійно незалежною, тобто, кожна окрема функція не може бути виражена через решту функцій у вигляді лінійної їх комбінації.

4. Система функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ повинна бути ортогональною на інтервалі $[0, T]$ з ваговою функцією $\rho(t)$, тобто виконуються умови:

$$(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) = \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_k(t) \rho(t) dt = \begin{cases} \|\varphi_i(t)\|, & \text{якщо } i = k; \\ 0, & \text{якщо } i \neq k. \end{cases}$$

$\|\varphi_i(t)\|$ – норма функції це інтеграл від квадрата функції; $\rho(t)$ – вагова функція.

5. Система функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ повинна бути повною у просторі L^n , тобто, всяка інша функція, додана до вказаної системи, буде лінійною комбінацією функцій цієї системи.

6. Система функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ повинна гарантувати швидкість апроксимації із зростанням n .

7. Функції $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ повинні бути простими при обчисленні на цифрових ЕОМ.

У такому випадку (виконуються пункти 1 – 7) коефіцієнти апроксимації a_k обраховуються за формулами:

$$a_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|} \int_0^T f(t) \varphi_k(t) \rho(t) dt, \quad (6.4)$$

$$\|\varphi_k\| = \int_0^T [\varphi_k(t)]^2 \rho(t) dt. \quad (6.5)$$

Наведемо найбільш поширені та прості системи ортогональних функцій.

6.2. Система тригонометричних функцій ортогональних на проміжку $(-\pi, \pi)$

Система тригонометричних функцій:

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots; \quad \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$$

є ортогональною з вагою $\rho(t) = 1$ на проміжку $(-\pi, \pi)$.

Враховуючи те, що функція $f(t)$ задана на інтервалі часу $[0, T]$, її розклад може бути або тільки по синусам, або тільки по косинусам. Коефіцієнти розкладу та апроксимації для цих випадків запишуться так:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{k\pi t}{T} dt, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$f_N(t) = \sum_{k=1}^N b_k \sin \frac{k\pi t}{T}.$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{k\pi t}{T} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N;$$

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos \frac{k\pi t}{T}.$$

Ця система функцій застосовується для розкладу *періодичних функцій* у відомий ряд Фур'є. Якщо у такому ряді обмежитись *першими кількома доданками*, отримаємо *апроксимацію функції так званим многочленом Фур'є*. Завади такої апроксимації полягають у тому, що часто для досягнення потрібної точності треба у многочлені Фур'є залишати багато доданків.

6.3. Система ортонормованих поліномів Лежандра

Поліноми Лежандра $P_k(t)$ визначаються наступною загальною формулою

$$P_k(t) = \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2}} \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, \|P_k(t)\| = 1, (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots); \quad (6.6)$$

Ці поліноми (многочлени) є ортогональними на інтервалі $[-1, 1]$ із ваговою функцією $\rho(t) = 1$, так що мають місце рівності

$$\|P_k(t)\|^2 = \int_0^T [P_k(t)]^2 \rho(t) dt = 1,$$

$$(P_k(t), P_m(t)) = 0, \text{ якщо } k \neq m.$$

Наведемо вирази кількох початкових поліномів Лежандра, які обраховуються за формулою (6.6):

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$P_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t;$$

$$P_2(t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \frac{3t^2 - 1}{2};$$

$$P_3(t) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \frac{5t^3 - 3t}{2}.$$

Коефіцієнти a_k розкладу функції $f(t)$ у ряд по функціям (6.6) обчислюються за формулою

$$a_k = \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt, k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad (6.7)$$

Надалі апроксимуючий поліном для функції $f(t)$ будемо позначати

$$f_n(t) = a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t) + \dots + a_n P_n(t), \text{ для } \forall t \in [-1, 1] \quad (6.8)$$

Відносна середньоквадратична похибка апроксимації знаходиться за формулою (6.3).

Зауваження. Якщо $f(t)$ задана на проміжку $[a, b]$, то формула (6.7) набуває виду

$$a_k = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]\right) P_k(t) dt, k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad (6.9)$$

для $\forall t \in [a, b]$

Таким чином

$$f(t) \approx a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t) + \dots + a_n P_n(t), \text{ для } \forall t \in [a, b],$$

дасть многочлен n -го степеня. На практиці, як правило, достатньо $n \leq 6$.

Приклад 1.

Апроксимувати функцію $f(t) = e^{-t^2}, t \in [0, 1]$ многочленом 4-го степеня. Це означає, що шукатимемо наближення виду

$$e^{-t^2} \approx a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t) + a_3 P_3(t) + a_4 P_4(t), t \in [0, 1]$$

За формулою (6.9), врахувавши, що $a = 0, b = 1$, обчислюємо

$$a_k = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(t+1)\right) P_k(t) dt, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Отримуємо таблицю коефіцієнтів для $n = 9$ включно

$$a_k = (1.056169 \quad -0.2809652 \quad -0.0401719 \quad 0.01549054 \quad 0.0002855401 \\ -0.0004043047 \quad 0.0000111085 \quad 0.000006836606 \quad -3.927271 \times 10^{-7} \\ -7.057679 \cdot 10^{-8})^T.$$

За цими коефіцієнтами можна побудувати апроксимації заданої функції многочленами Лежандра до 9-го степеня включно. На рис. 6.1 наведено графік апроксимації многочленом другого степеня $f_2(x)$ та відносна середньоквадратична похибка $\delta(n)$; на рис. 6.2 та рис. 6.3 для многочленів 3-го та 4-го степенів.

$$n = 2; f_2(x) = 0.7785829 - 0.344107x - 0.09527603x^2; \delta(2) = 0,014;$$

$$n = 3; f_3(x) = 0.778582 - 0.3875809x - 0.09527603x^2 + 0.0724503x^3; \\ \delta(3) = 4.527 \times 10^{-4}$$

$$n = 4; f_4(x) = 0,778810 - 0,3875809x - 0,09754748x^2 + 0.0724503x^3 + \\ + 0.002650034x^4; \delta(3) = 3.698 \times 10^{-4};$$

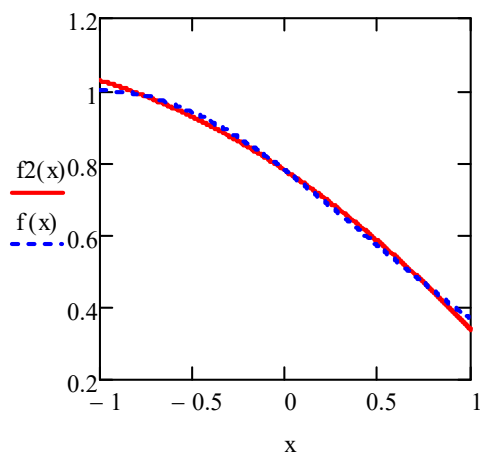


Рис. 6.1.

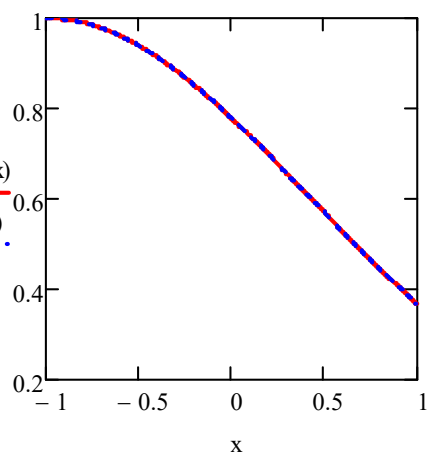


Рис. 6.2.

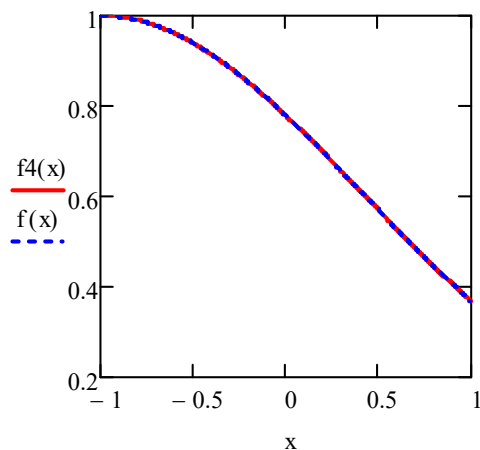


Рис. 6.3.

Таким чином, апроксимація многочленами 3^{-x} та 4^{-x} степеня, отримана за допомогою многочленів Лежандра, досить точна. Зауважимо, що степеневі функції найбільш прості для обрахунків.

6.4. Система ортонормованих функцій на інтервалі $(0, \infty)$

В теорії приходиться розглядати апроксимацію функцій заданих на нескінченному інтервалі $[0, \infty)$. У цьому випадку розглядають систему ортогональних та нормованих функцій побудованих, наприклад, на основі уже згаданих поліномів Лежандра. Це такі функції

$$v_k(t) = \sqrt{u(2k+1)} e^{-\frac{u}{2}t} P_k(2e^{-ut} - 1), t \in (0, \infty); k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

де $u > 0$ – параметр, значення якого вибирається у залежності від характеру зміни функції $f(t)$; $P_k(x)$ визначається виразом

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad x \in [-1, 1].$$

Якщо зробити заміну $x = 2e^{-ut} - 1$, то многочлен Лежандра $P_k(x)$ набуде виду

$$P_k(2e^{-ut} - 1) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \left((2e^{-ut} - 1)^2 - 1 \right)^k, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

У цьому випадку коефіцієнти апроксимації визначаються за формулою

$$a_k = \int_0^\infty f(t) v_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (6.11)$$

а апроксимуюча функція $f_n(t)$ набуває виду

$$f_n(t) = a_0 v_0(t) + a_1 v_1(t) + \dots + a_n v_n(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (6.12)$$

Похибки апроксимації визначаються за формулами (6.2), (6.3).

Перетворення Фур'є функції (6.10) переводить її у частотну область та має вид

$$V_k(j\omega) = \frac{\sqrt{u(2k+1)} \left(\frac{u}{2} - j\omega \right) \left(\frac{3u}{2} - j\omega \right) \dots \left(\frac{(2k-1)u}{2} - j\omega \right)}{2\pi \left(\frac{u}{2} + j\omega \right) \left(\frac{3u}{2} + j\omega \right) \dots \left(\frac{(2k+1)u}{2} + j\omega \right)}, \quad (6.13)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

У силу лінійності перетворення Фур'є формула (6.13) дає змогу зразу записати у частотній області функцію $f_n(t)$:

$$F_n(j\omega) = a_0 V_0(j\omega) + a_1 V_1(j\omega) + \dots + a_n V_n(j\omega). \quad (6.14)$$

Отже, вираз (6.14) апроксимує у частотній області перетворення Фур'є самої функції $f(t)$, тобто

$$F(j\omega) \approx F_n(j\omega) = a_0 V_0(j\omega) + a_1 V_1(j\omega) + \dots + a_n V_n(j\omega). \quad (6.15)$$

6.5. Довільна система функцій

Наведемо загальний алгоритм отримання системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів апроксимації c_1, c_2, \dots, c_n , коли система функцій $\varphi_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) не ортогональна на проміжку $[0, T]$.

І так, шукаємо апроксимацію функції $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \text{ для } \forall t \in [0, T]. \quad (6.16)$$

Множимо вираз (6.16) послідовно на функції $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ та інтегруємо у межах від 0 до T . Отримуємо

$$\begin{cases} c_1\varphi_{11} + c_2\varphi_{21} + c_3\varphi_{31} + \dots + c_n\varphi_{n1} = f_1, \\ c_1\varphi_{12} + c_2\varphi_{22} + c_3\varphi_{32} + \dots + c_n\varphi_{n2} = f_2, \\ c_1\varphi_{13} + c_2\varphi_{23} + c_3\varphi_{33} + \dots + c_n\varphi_{n3} = f_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_1\varphi_{1n} + c_2\varphi_{2n} + c_3\varphi_{3n} + \dots + c_n\varphi_{nn} = f_n, \end{cases} \quad (6.17)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n); \\ f_k &= \int_0^T f(t) \varphi_k(t) dt, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Зауважимо, що $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$. Розв'язуючи яким-небудь методом систему (6.17), знаходимо коефіцієнти апроксимації; за формулами (6.2, 6.3) визначаємо похибки. Якщо похибки нас не влаштовують, збільшуємо n у формулі (6.16). Це приводить до збільшення числа невідомих у системі, обраховуємо відсутні коефіцієнти φ_{ik}, f_k , та знову розв'язуємо систему. У цьому полягає недолік такого способу апроксимації.

6.6. Апроксимація динамічних характеристик об'єкта із дробово-раціональною передатною функцією

Нехай об'єкт має дробово-раціональну передатну функцію (3.44)

$$W(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n},$$

де $A_n(p)$ – поліном Гурвіца, а степінь полінома $B_m(p)$ не перевищує степені $A_n(p)$ (тобто $m \leq n$).

Можливі такі випадки:

1) Усі полюси функції $W(p)$ (корені рівняння $A_n(p) = 0$) є простими (тобто мають першу кратність): p_1, p_2, \dots, p_n . Тоді імпульсна передатна функція матиме вид:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t} \quad (6.19)$$

2) Який-небудь полюс (для простоти p_1) має кратність r_1 . В цьому випадку імпульсна передатна функція матиме вид:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{d^{r_1-1}}{dp^{r_1-1}} \left[(p - p_1)^{r_1} \frac{B(p)}{A(p)} e^{pt} \right] + \sum_{k=r_1+1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t} \quad (6.20)$$

Як показано у [5], оптимальна апроксимація виразу типу (6.19, 6.20) може бути досягнута за допомогою виразів

$$w_n(t) = \sqrt{\tilde{w}_n(t)} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t), \quad (6.21)$$

де $\tilde{w}_n(t) = (\alpha_n + \alpha_1) e^{-2\alpha t}$; $\varphi_i(t) = e^{-\alpha_i t}$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Вираз (6.21) можна представити у вигляді

$$w_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) = \sqrt{2(a_1 + \alpha_n)} \sum_{i=1}^n c_i e^{-(a+\alpha_i)t},$$

де c_1, c_2, \dots, c_n – коефіцієнти апроксимації; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – наближені значення полюсів $W(p)$.

Оскільки функції $\varphi_i(t) = e^{-\alpha_i t}$; ($i = 1, 2, \dots, n$) не ортогональні, то коефіцієнти апроксимації c_1, c_2, \dots, c_n знаходять як розв'язок відповідної системи лінійних рівнянь типу (6.17). Це значно ускладнює задачу порівняно пошуком коефіцієнтів апроксимації по системі ортогональних функцій.

Зауваження. Крім наведених раніше апроксимуючих функцій $\{\varphi_i(t)\}_0^n$, застосовуються поліноми Лагерра [5 с.217]

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}). \quad (6.22)$$

Ці поліноми мають серйозні переваги – раціональність (простотою) перетворення по Лапласу

$$L_n(p) = \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}}. \quad (6.23)$$

Питання для самоперевірки:

1. В чому полягає задача апроксимації функції по вибраній системі функцій?
2. Навести приклади систем ортогональних функцій.
3. Визначення коефіцієнтів апроксимації на системі ортонормованих функцій.
4. Визначення коефіцієнтів апроксимації на системі довільних функцій.
5. Апроксимація динамічних характеристик об'єкта із дробово-раціональною передатною функцією.

7. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

7.1. Ідентифікація об'єктів управління та технологічних процесів на основі рівняння Вінера-Хопфа

Рівняння Вінера-Хопфа виражає зв'язок між вхідним та вихідним сигналами як для окремих їх реалізацій так і для статистичних характеристик. Вказана особливість приваблює до застосування рівняння Вінера-Хопфа для розв'язання задач ідентифікації об'єктів управління та технологічних процесів

7.1.1. Визначення імпульсної перехідної функції по вимірам вхідного та вихідного сигналів

На практиці частіше опис об'єкту визначається його реакцією на вхідну $\delta(t)$ функцію (4.2), імпульсною перехідною функцією (ІПФ) $w(t)$. Такий опис має ряд переваг [11]:

- мінімум апріорної інформації про структуру та параметри об'єкта;
- відносна простота переходу до інших еквівалентних форм опису об'єкта.

Методи визначення ІПФ об'єкта $w(t)$ ґрунтуються на розв'язанні інтегрального рівняння типу згортки

$$\begin{aligned} y(t) &= h(0)x(t) + \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau, \\ z(t) &= y(t) + n(t), \end{aligned} \quad (7.1)$$

де $h(t)$ – перехідна функція об'єкту;

$x(t)$ – вхідний сигнал;

$y(t)$ – реакція об'єкта на вхідний сигнал $x(t)$;

$z(t) = y(t) + n(t)$ – виміряний вихідний сигнал;

$n(t)$ – шум.

Для фізично реалізованих об'єктів завжди $h(0) = 0$, оскільки у протилежному разі $\lim_{N \rightarrow \infty} W(j\omega) \neq 0$, що відповідає об'єкту із

нескінченною полосою пропуску, а це нереалізоване. Тому (7.1) прийме вид

$$z(t) = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau + n(t), \text{ або} \quad (7.2)$$

$$z(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau + n(t),$$

при наявності шуму та

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau, \text{ або} \quad (7.3)$$

$$y(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

при відсутності шуму.

На практиці вхідний $x(t)$ та вихідний $y(t)$ сигнали є дискретними заданими у рівновіддалені моменти часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ із інтервалом Δ :

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \dots, x(t_N) = x_N,$$

$$y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2, \dots, y(t_N) = y_N.$$

Будемо шукати ІПФ $w(t)$ як дискретну, що задана у визначені раніше моменти часу: $w(t_0) = w_0, w(t_1) = w_1, w(t_2) = w_2, \dots, w(t_N) = w_N$. Тому інтеграл (7.3) замінюються сумою

$$y_k = \Delta \sum_{m=0}^k w_{k-m} \cdot x_m; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

або

$$y_k / \Delta = \sum_{m=0}^k w_{k-m} \cdot x_m.$$

Запишемо попередній вираз у розгорнутому виді, надаючи послідовно $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $w_0, w_1, w_2, \dots, w_N$:

перевищували 3% кожного вимірюваного значення із ймовірністю $P=0.996$).

Обрахунки проводились за програмою у Mathcad. По знайденій ІПФ $w(t)$ для вхідного сигналу $X(t) = \sin 2\omega t$, $\omega = 1$ було знайдено вихідний сигнал $Y(t)$ (рис. 7.3) за формулою (7.4).

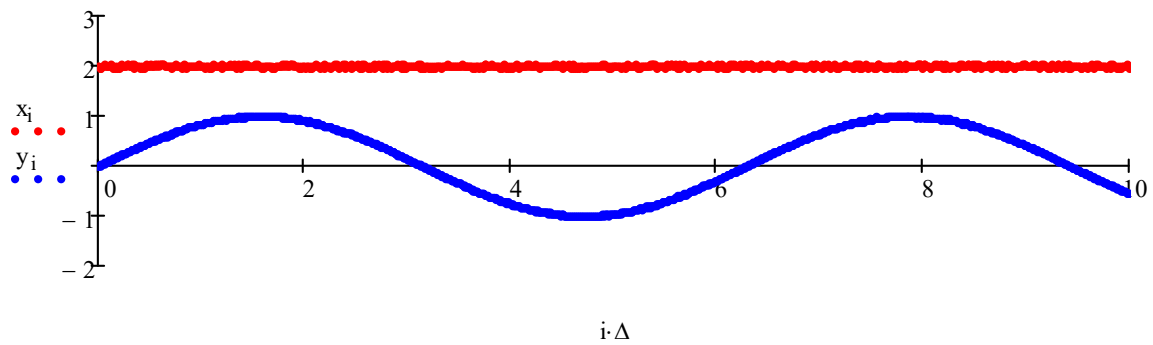


Рис. 7.1. $x(t) = 2$; $0 \leq t \leq 10$; $y(t) = (1 + \delta y(t)) \sin \omega t$

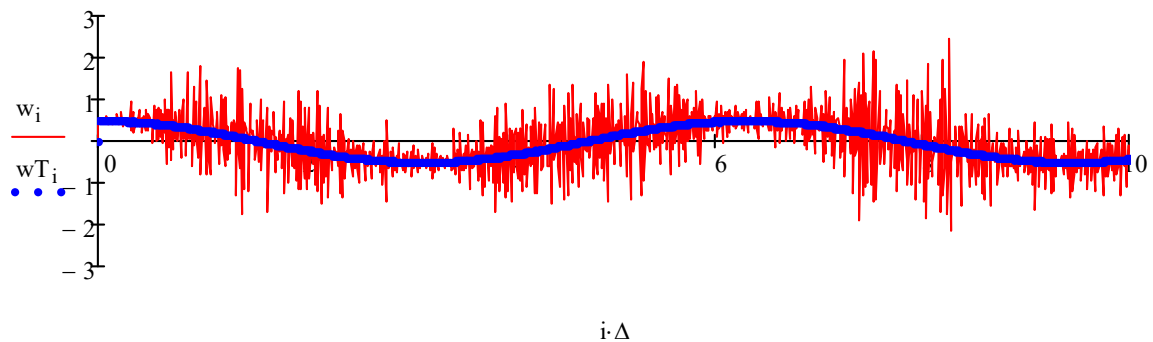


Рис. 7.2. $w(t)$, $w_T(t)$, $0 \leq t \leq 10$

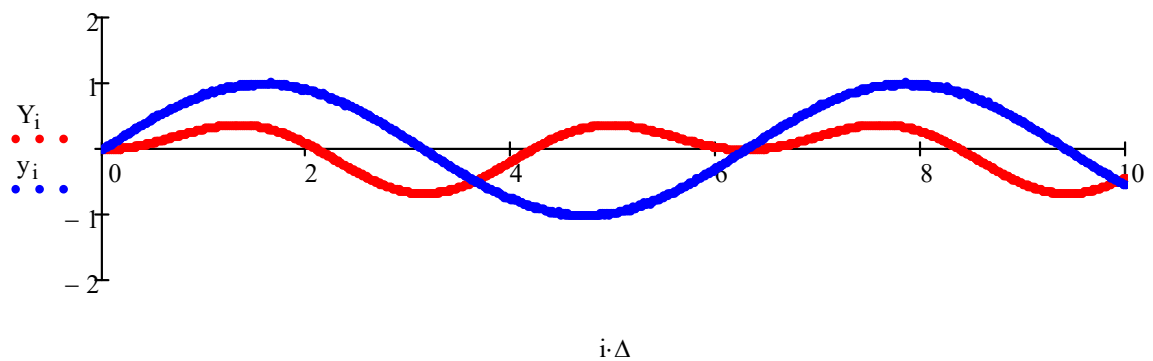


Рис. 7.3. $X(t) = \sin 2\omega t$, $Y(t)$, $y(t)$

Стійкість до перешкод залежить від інтенсивності шумів.

Як видно із рис. 7.2 перешкоди (похибки) при вимірах вихідного сигналу значно впливають на визначення ІПФ.

Знаходження ІПФ $w(t)$ як розв'язок рівняння (7.2) або (7.3) має ряд недоліків. Ці недоліки зумовлені тим, що у цих рівняннях використовуються *окремі реалізації вхідного та вихідного сигналів*, які не можуть відображати об'єкт (процес) у цілому, що може приводити до значних похибок. Вказаних похибок можна уникнути, якщо використати статистичні характеристики вхідного та вихідного сигналів, а саме кореляційні функції.

7.1.2. Визначення імпульсної перехідної функції по кореляційним функціям вхідного та вихідного сигналів

Кореляційна функція несе більш узагальнену, більш стабільну інформацію про процес ніж окрема реалізація про нього. Тому зосередимо увагу на визначенні $w(t)$ об'єкта із наступного рівняння Вінера – Хопфа

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)R_{xx}(t-\tau)dt, \quad (7.5)$$

де $R_{xx}(\tau)$, – автокореляційна функція вхідного сигналу; $R_{yx}(\tau)$ – функція взаємної кореляції вхідного та вихідного сигналів.

Щоб мати можливість визначати $w(t)$ за допомогою обчислювального пристрою із скінченною пам'яттю, покладаємо $w(t) = 0$ при $t \geq T$, де T – період затухання об'єкту; (T – це таке значення моменту часу, починаючи із якого $R_{xx}(t) = 0$ [5]).

Розглянемо два підходи до розв'язання рівняння (7.5) відносно ІПФ $w(t)$.

Суть першого методу полягає у тому, що інтеграл у (7.5) заміняємо скінченною сумою. Для цього розбиваємо часовий проміжок T на N рівних відрізків $\Delta = T/N$. Δ – крок квантування по t і τ . Позначимо $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N; \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ – відповідні моменти часового інтервалу $[0, T]$; очевидно, що

$$t_k = k \cdot \Delta; \tau_k = k \cdot \Delta, k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (7.6)$$

і у цих точках відомі значення функцій

$$R_{xx}(\tau_0), R_{xx}(\tau_1), R_{xx}(\tau_2), \dots, R_{xx}(\tau_N);$$

$$R_{yx}(\tau_0), R_{yx}(\tau_1), R_{yx}(\tau_2), \dots, R_{yx}(\tau_N).$$

Позначимо $w(t_0) = w_0, w(t_1) = w_1, w(t_2) = w_2, \dots, w(t_N) = w_N$ – невідомі дискретні значення ППФ у моменти часу (7.6). Покладаючи у (7.5) послідовно $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ та застосовуючи для наближеного обчислення інтегралу формулу прямокутників, отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $w_0, w_1, w_2, \dots, w_N$ (висотами прямокутників беруться значення підінтегральної функції у точках $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$):

$$\begin{cases} R_{yx}(\tau_0) = [w_0 R_{xx}(t_0 - \tau_0) + w_1 R_{xx}(t_1 - \tau_0) + \dots + w_N R_{xx}(t_N - \tau_0)] \Delta, \\ R_{yx}(\tau_1) = [w_0 R_{xx}(t_0 - \tau_1) + w_1 R_{xx}(t_1 - \tau_1) + \dots + w_N R_{xx}(t_N - \tau_1)] \Delta, \\ R_{yx}(\tau_2) = [w_0 R_{xx}(t_0 - \tau_2) + w_1 R_{xx}(t_1 - \tau_2) + \dots + w_N R_{xx}(t_N - \tau_2)] \Delta, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ R_{yx}(\tau_N) = [w_0 R_{xx}(t_0 - \tau_N) + w_1 R_{xx}(t_1 - \tau_N) + \dots + w_N R_{xx}(t_N - \tau_N)] \Delta. \end{cases} \quad (7.7)$$

Запишемо (7.7) у матричному вигляді

$$\|R_{yx}\| = \Delta \cdot \|R_{xx}\| \cdot \|w\|, \quad (7.8)$$

де

$$\|R_{yx}\| = (R_{yx}(\tau_0) \ R_{yx}(\tau_1) \ R_{yx}(\tau_2) \ \dots \ R_{yx}(\tau_N))^T, \quad (7.9)$$

$$\|w\| = (w_0 \ w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N)^T;$$

$$\|R_{xx}\| = \begin{pmatrix} R_{xx}(t_0 - \tau_0) & R_{xx}(t_1 - \tau_0) & \dots & R_{xx}(t_N - \tau_0) \\ R_{xx}(t_0 - \tau_1) & R_{xx}(t_1 - \tau_1) & \dots & R_{xx}(t_N - \tau_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{xx}(t_0 - \tau_N) & R_{xx}(t_1 - \tau_N) & \dots & R_{xx}(t_N - \tau_N) \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

де верхній індекс "T" означає транспонування матриці.

Зауважимо, що елементи головної діагоналі матриці $\|R_{xx}\|$ дорівнюють дисперсії вхідного сигналу σ_x^2 та кожен її недіагональний елемент менше σ_x^2 . У силу властивостей кореляційної функції $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ матриця $\|R_{xx}\|$ – симетрична відносно головної діагоналі, тобто $R_{xx}(t_i - \tau_k) = R_{xx}(t_k - \tau_i)$. Так що матрицю (7.10) перепишемо у виді

$$\|R_{xx}\| = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & R_{xx}(t_1 - \tau_0) & \cdots & R_{xx}(t_N - \tau_0) \\ R_{xx}(t_1 - \tau_0) & \sigma_x^2 & \cdots & R_{xx}(t_N - \tau_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{xx}(t_N - \tau_0) & R_{xx}(t_N - \tau_1) & \cdots & \sigma_x^2 \end{pmatrix}.$$

За цих умов $\det(\|R_{xx}\|) \neq 0$, існує обернена матриця $\|R_{xx}\|^{-1}$, тому розв'язок рівняння (7.8) можна записати у виді

$$\|w\| = \frac{1}{\Delta} \|R_{xx}\|^{-1} \cdot \|R_{yx}\|. \quad (7.11)$$

Таким чином, отримали окремі значення ПФФ $w_0, w_1, w_2, \dots, w_N$ у точках $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}$, по яким можна знайти апроксимацію функції $w(t)$ об'єкта.

Зрозуміло, що обчислення визначеного інтегралу (7.5) за формулами прямокутників дає похибки, що приводить до похибок розв'язку (7.11). Ці похибки можна значно зменшити, якщо обчислити інтеграл (7.5) за формулою трапецій або Сімпсона.

Для формули трапецій система (7.7) набуде виду

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{yx}^0 = \left[\frac{1}{2} w_0 R_{xx}^{00} + w_1 R_{xx}^{01} + \cdots + w_{N-1} R_{xx}^{0(N-1)} + \frac{1}{2} w_N R_{xx}^{0N} \right] \Delta, \\ R_{yx}^1 = \left[\frac{1}{2} w_0 R_{xx}^{10} + w_1 R_{xx}^{11} + \cdots + w_{N-1} R_{xx}^{1(N-1)} + \frac{1}{2} w_N R_{xx}^{1N} \right] \Delta, \\ R_{yx}^2 = \left[\frac{1}{2} w_0 R_{xx}^{20} + w_1 R_{xx}^{21} + \cdots + w_{N-1} R_{xx}^{2(N-1)} + \frac{1}{2} w_N R_{xx}^{2N} \right] \Delta, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ R_{yx}^{N-1} = \left[\frac{1}{2} w_0 R_{xx}^{(N-1)0} + w_1 R_{xx}^{(N-1)1} + \cdots + w_{N-1} R_{xx}^{(N-1)(N-1)} + \frac{1}{2} w_N R_{xx}^{(N-1)N} \right] \Delta, \\ R_{yx}^N = \left[\frac{1}{2} w_0 R_{xx}^{N0} + w_1 R_{xx}^{N1} + \cdots + w_{N-1} R_{xx}^{N(N-1)} + \frac{1}{2} w_N R_{xx}^{NN} \right] \Delta. \end{array} \right. \quad (7.12)$$

де використані позначення

$$R_{xx}(t_i - \tau_k) = R_{xx}^{ik}; \quad R_{yx}(\tau_k) = R_{yx}^k, \quad (7.13)$$

де $i, k = 0, 1, 2, \dots, N$; $R_{xx}^{ii} = \sigma_x^2$.

Або у матричному виді

$$\|R_{yx}\| = \Delta \cdot \|\tilde{R}_{xx}\| \cdot \|w\|, \quad (7.14)$$

де $\|R_{yx}\|$, $\|w\|$ визначаються формулами (7.9);

$$\|\tilde{R}_{xx}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_x^2 & R_{xx}^{01} & \dots & R_{xx}^{0(N-1)} & \frac{1}{2}R_{xx}^{0N} \\ \frac{1}{2}R_{xx}^{10} & \sigma_x^2 & \dots & R_{xx}^{1(N-1)} & \frac{1}{2}R_{xx}^{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}R_{xx}^{N0} & R_{xx}^{N1} & \dots & R_{xx}^{N(N-1)} & \frac{1}{2}\sigma_x^2 \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Із (7.15) видно, що матриця $\|\tilde{R}_{xx}\|$ не є симетричною відносно головної діагоналі. Розв'язок системи (7.14) запишеться аналогічно (7.11).

Структурна схема розглянутого алгоритму наведена на рис. 7.4.

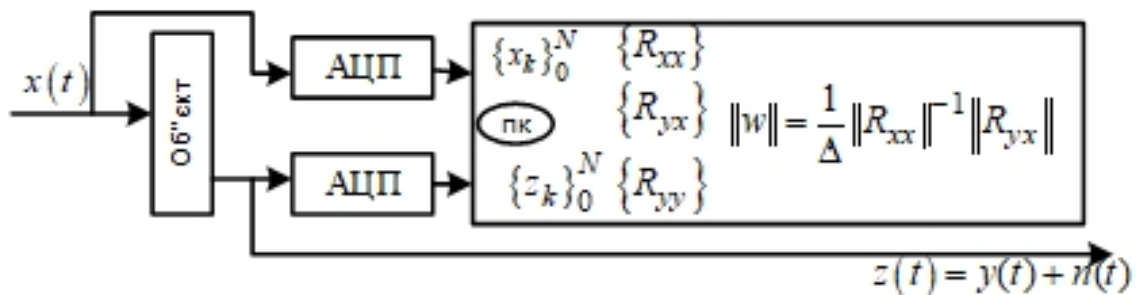


Рис. 7.4.

Приклад 2.

За формулою (7.11) проведено розрахунки ПФ для автокореляційної функції рис. 7.5 та взаємно-кореляційної функції рис. 7.6. На рис. 7.7 наведено графік знайденої ПФ при $N = 50$. Подальше збільшення N до зміни розв'язку не приводило.

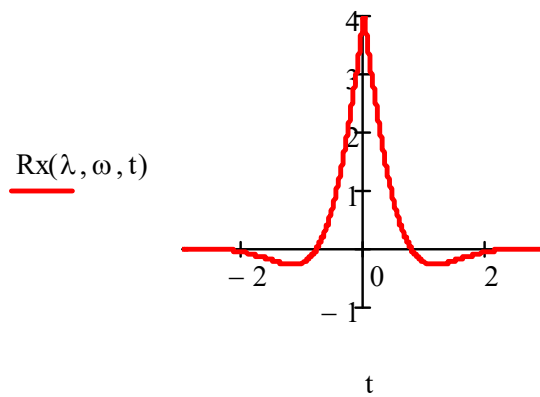


Рис. 7.5. $D_x = 4, \lambda = 2, \omega = 2, \sigma_x = \sqrt{D_x}, R_x(\lambda, \omega, t) = D_x e^{-\lambda|t|} \cos(\omega t)$

$$a_r = 0.05, \lambda_1 = 2, t_0 = 0.5, \omega_0 = 10, \sigma_y = 2,$$

$$R_{xy}(\lambda_1, \omega_1, t) = \sigma_x \sigma_y e^{-\lambda_1|t-t_0|} \cos[\omega_1(t-t_0)] + a_r \sin(\omega_0 t)$$

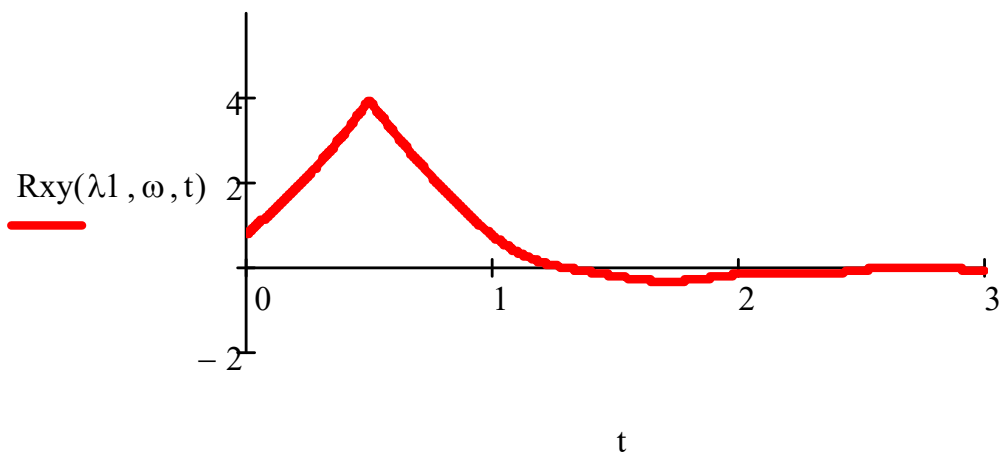


Рис. 7.6.

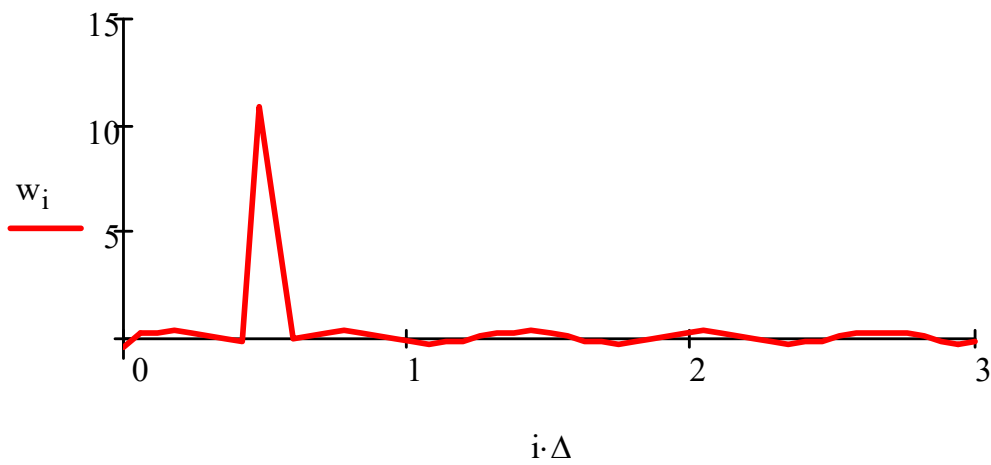


Рис. 7.7.

Враховуючи, що частотна характеристика об'єкту $W(j\omega)$ є перетворенням Фур'є його ПФ, знаходимо

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (7.16)$$

Суть другого підходу полягає в тому, що знаходження ПФ $w(t)$ значно спрощується, якщо використати вхідний сигнал $x(t)$ – білий шум. У цьому випадку функція автокореляції $R_{xx}(t)$ набуває виду

$$R_{xx}(t) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

а матриця (7.10) стає діагональною. Тоді розв'язок рівняння Вінера – Хопфа (7.4) набуває виду:

$$w(t) = \frac{1}{\sigma_x^2} R_{yx}(t)$$

для неперервного аргументу і

$$w(t_i) = \frac{1}{\sigma_x^2} R_{yx}(t_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

для дискретного задання інформації. (Проблема генерації білого шуму).

7.1.3. Метод наближеного визначення ПФ об'єкту, оснований на апроксимації характеристик $R_{xx}(t)$ та $R_{yx}(t)$ (непрямий метод визначення ПФ)

Рівняння Вінера – Хопфа може бути погано обумовленим. Це проявляється у тому, що навіть дуже малі варіації вхідних та вихідних даних кореляційних функцій $R_{xx}(t)$ та $R_{yx}(t)$ приводять до значних варіацій розв'язку рівняння Вінера – Хопфа (тобто варіацій ПФ $w(t)$). Цю обставину треба враховувати особливо через те, що замість реальних значень кореляційних функцій використовуються *їх оцінки* (Рис. 7.8). Тому розв'язки рівняння Вінера – Хопфа характеризуються значними відхиленнями від реальних ПФ, і можуть бути такими, що не відповідають реальним фізичним процесам, які проходять у об'єкті. **Фізичний зміст мають тільки гладкі розв'язки рівняння Вінера – Хопфа.** Тому перед розв'язуванням рівняння Вінера – Хопфа

проводять згладжування, апроксимацію оцінок $R_{xx}(t)$ та $R_{yx}(t)$ (Рис. 7.8).

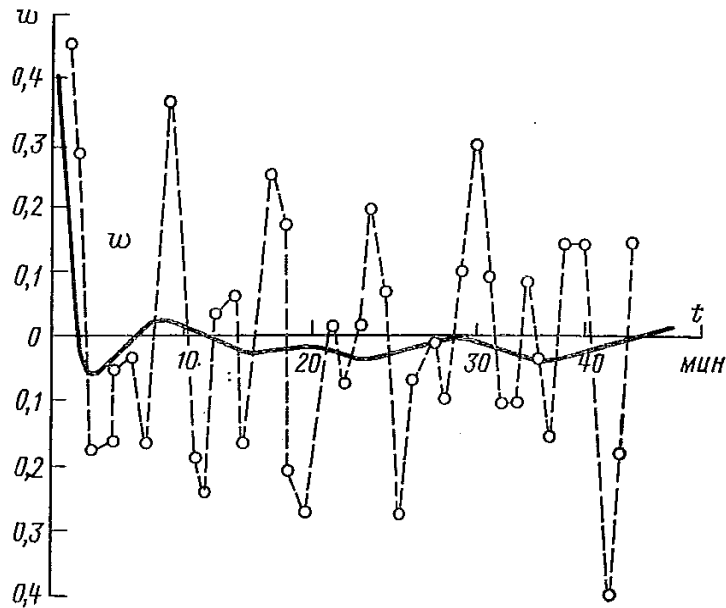


Рис. 7.8. Суцільна лінія – апроксимація, пунктир - експеримент

Найбільш простим методом згладжування оцінок $R_{xx}(t)$ та $R_{yx}(t)$ є їх апроксимація функціями, розглянутими у главі 6 (Методи апроксимації характеристик об'єкта). Після згладжування складається система рівнянь (7.8) або (7.14), розв'язок якої, знайдений за формулою (7.11), дасть шукану ІПФ. При необхідності аналогічно проводиться згладжування й інших характеристик.

7.1.4. Метод ідентифікації на узгоджених апроксимаціях імпульсної перехідної та кореляційної функцій

Одним із шляхів підвищення ефективності методів ідентифікації є попереднє згладжування кореляційних функцій об'єкта за допомогою деякого апроксимуючого полінома.

Нехай є відомими функції $R_{xx}(t)$, $R_{xy}(t)$ для $t \in [0, T]$ деякого об'єкта; t може приймати дискретні значення t_0, t_1, \dots, t_N із однаковим інтервалом Δ . Треба знайти його ІПФ $w(t)$. Для цього:

1) **Обираємо систему функцій** $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ ортонормованих на інтервалі часу $[0, T]$, T – довжина інтервалу затухання.

2) *Записуємо вирази, які апроксимують вибраними функціями* $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функції об'єкту $R_{xy}(t), w(t)$:

$$R_{yx}(t) = b_0\varphi_0(t) + b_1\varphi_1(t) + \dots + b_n\varphi_n(t), \quad (7.17)$$

$$w_n(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \quad (7.18)$$

де коефіцієнти $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ знаходимо за формулами

$$b_j = \int_0^T R_{xy}(t) \varphi_j(t) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (7.19)$$

якщо аргумент t функції $R_{xy}(t)$ є неперервним або

$$b_j = \Delta \left[R_{yx}(t_0) \varphi_j(t_0) + R_{yx}(t_1) \varphi_j(t_1) + \dots + R_{yx}(t_N) \varphi_j(t_N) \right]; \quad (7.20)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n$$

якщо аргумент t функції $R_{xy}(t)$ є дискретним. Коефіцієнти $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ залишаються невідомими, тому що $w(t)$ – невідома.

3) *Для знаходження $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.* Для цього підставляємо вирази (7.17), (7.18) у рівняння Вінера - Хопфа (7.5). Отримуємо

$$b_0\varphi_0(\tau) + b_1\varphi_1(\tau) + \dots + b_n\varphi_n(\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)] R_{xx}(t - \tau) dt,$$

або після розкриття квадратних дужок

$$b_0\varphi_0(\tau) + b_1\varphi_1(\tau) + \dots + b_n\varphi_n(\tau) =$$

$$= c_0 \int_0^T \varphi_0(t) R_{xx}(t - \tau) dt + c_1 \int_0^T \varphi_1(t) R_{xx}(t - \tau) dt + \dots +$$

$$+ c_n \int_0^T \varphi_n(t) R_{xx}(t - \tau) dt \quad (7.21)$$

Множимо обидві частини рівності (7.21) на $\varphi_0(\tau)$ та інтегруємо усі доданки по τ у межах від нуля до T . Враховуючи ортонормованість системи функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, отримуємо

$$b_0 = c_0 \int_0^T \tilde{\varphi}_0(t) \varphi_0(t) dt + c_1 \int_0^T \tilde{\varphi}_0(t) \varphi_1(t) dt + \dots + c_n \int_0^T \tilde{\varphi}_0(t) \varphi_n(t) dt$$

де

$$\tilde{\varphi}_0(t) = \int_0^T \varphi_0(\tau) R_{xx}(t-\tau) d\tau.$$

Таким чином, перше рівняння відносно невідомих коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ приймає вид

$$a_{00}c_0 + a_{01}c_1 + a_{02}c_2 + \dots + a_{0n}c_n = b_0, \quad (7.22)$$

де

$$a_{0j} = \int_0^T \tilde{\varphi}_0(t) \varphi_j(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Тепер множимо рівність (7.21) на $\varphi_1(\tau)$ та після виконання аналогічних перетворень, знаходимо

$$b_1 = c_0 \int_0^T \tilde{\varphi}_1(t) \varphi_0(t) dt + c_1 \int_0^T \tilde{\varphi}_1(t) \varphi_1(t) dt + \dots + c_n \int_0^T \tilde{\varphi}_1(t) \varphi_n(t) dt,$$

або

$$b_1 = a_{10}c_0 + a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n, \quad (7.23)$$

де

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \int_0^T \varphi_1(\tau) R_{xx}(t-\tau) d\tau;$$

$$a_{1j} = \int_0^T \tilde{\varphi}_1(t) \varphi_j(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Виконуючи такі ж перетворення із рештою функцій системи $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, отримаємо рівняння

$$b_2 = a_{20}c_0 + a_{21}c_1 + \dots + a_{2n}c_n,$$

$$b_n = a_{n0}c_0 + a_{n1}c_1 + \dots + a_{nn}c_n, \quad (7.24)$$

де, очевидно, що

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \int_0^T \varphi_k(\tau) R_{xx}(t-\tau) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots, n;$$

$$a_{kj} = \int_0^T \tilde{\varphi}_k(t) \varphi_j(t) dt, \quad k = 2, 3, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (7.25)$$

Таким чином, враховуючи рівності (7.22), (7.24), (7.25), відносно невідомих коефіцієнтів апроксимації $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ ПФ $w(t)$ отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{00}c_0 + a_{01}c_1 + a_{02}c_2 + \dots + a_{0n}c_n = b_0, \\ a_{10}c_0 + a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = b_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}c_0 + a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nn}c_n = b_n, \end{cases} \quad (7.26)$$

де $\tilde{\varphi}_k(t)$, a_{kj} визначаються формулами (7.25).

4) Розв'язуємо систему (7.26), та записуємо уже знайдену апроксимацію (7.18) ПФ $w(t)$. Зауважимо, число невідомих коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ таке, що $n \ll N$ (практично $n \leq 6$); це значно спрощує розв'язок системи (7.26) порівняно із системою (7.7), (7.8), де число невідомих досягає кількох десятків.

Якщо функції $R_{xx}(t), R_{xy}(t)$ задані у дискретних точках t_0, t_1, \dots, t_N із сталим кроком Δ у часі, то інтеграли (7.25) замінюються відповідними сумами:

$$\tilde{\varphi}_k(t_m) = \Delta \sum_{i=0}^N \varphi_k(\tau_i) R_{xx}(t_m - \tau_i); k = 0, 1, 2, \dots, n; m = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.27)$$

$$a_{kj} = \Delta \sum_{i=0}^N \tilde{\varphi}_k(t_i) \varphi_j(t_i), j = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n. \quad (7.28)$$

Структурна схема розглянутого алгоритму наведена на рис. 7.9.

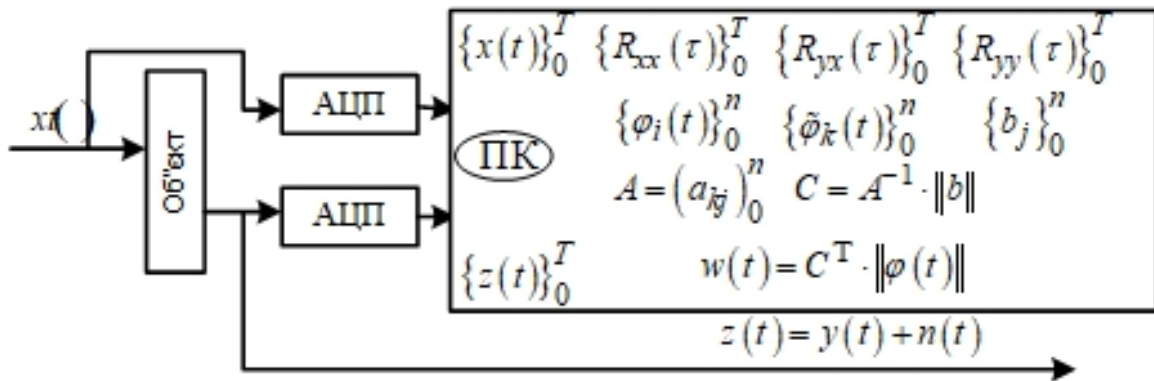


Рис. 7.9. N —число інтервалів, на які ділиться часовий проміжок;
 n —число функцій для апроксимації

Приклад 3.

Згідно із наведеною на рис. 7.9 структурною схемою на Mathcad складена програма. За цією програмою проведено розрахунки ПФ для автокореляційної функції рис. 7.10 та взаємно-кореляційної функції

рис. 7.11. На рис. 7.12 наведено графік знайденої ПФ при $N = 50; n = 9$.

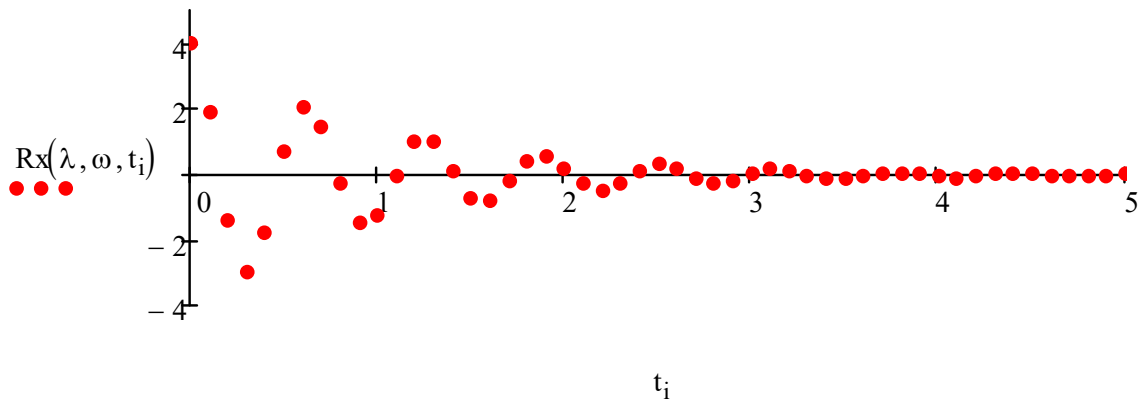


Рис. 7.10. $D_x = 4, \lambda = 1, \omega = 10, \sigma_x = \sqrt{D_x}, R_x(\lambda, \omega, t) = D_x e^{-\lambda|t|} \cos(\omega t)$

$$a_r = 0.05, \lambda_1 = 3, t_0 = 2, \omega_0 = 10, \sigma_y = 2, \omega_1 = 0$$

$$R_{xy}(\lambda_1, \omega_1, t) = \sigma_x \sigma_y e^{-\lambda_1|t-t_0|} \cos[\omega_1(t-t_0)] + a_r \sin(\omega_0 t)$$

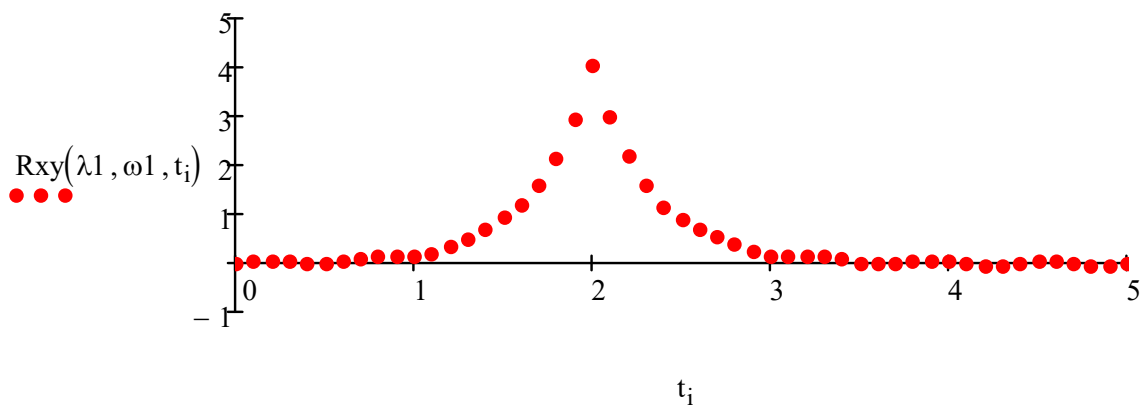


Рис. 7.11.

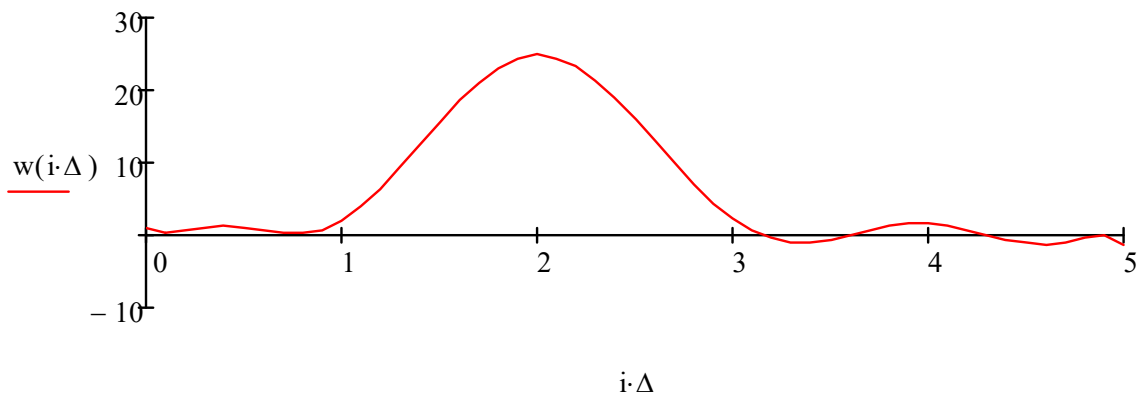


Рис. 7.12.

Висновки. Розглянуто три найбільш поширених способи знаходження ПФ об'єкту, наведено приклади.

Знайдені ПФ реального об'єкту та його моделі за прийнятим критерієм, наприклад, (2.6) дозволяють оцінити якість ідентифікації.

7.2. Ідентифікація за допомогою адаптивних моделей

Ідентифікація за допомогою адаптивних моделей, що автоматично налаштовуються під характеристики об'єкта, знайшла значне поширення, тому що такі моделі зручні для застосування у контурі управління.

Адаптивна модель представляє собою апаратуру або комплекс алгоритмів. Структурна схема адаптивної моделі представлена на рис. 7.13.

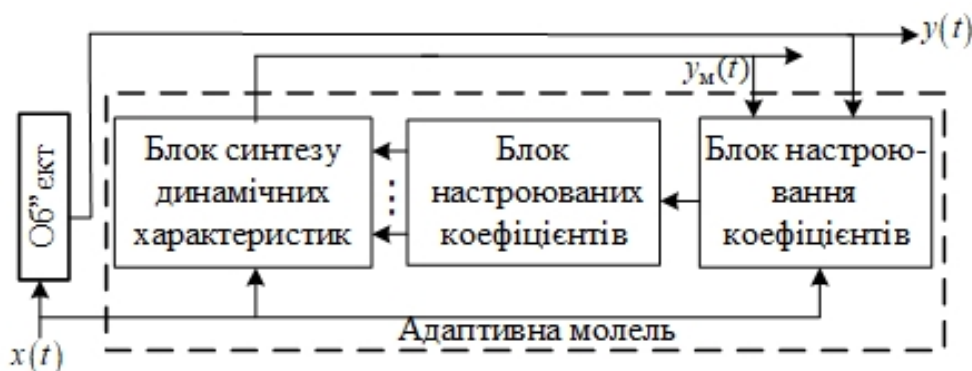


Рис. 7.13.

Відмітимо основні властивості блоків:

1) Блок синтезу динамічних характеристик об'єкту, або синтезатор. Даний блок представляє собою власне модель об'єкта із

точністю до параметрів i , як правило, реалізується у вигляді деякої системи функцій, частіше всього ортогональних, по якій розкладається ПФФ об'єкта $w(t)$.

2) Блок настанованих параметрів (коефіцієнтів) моделі, підбором яких досягається бажана ступінь близькості вихідних координат об'єкту та моделі.

3) Блок налаштування параметрів моделі, або аналізатор динамічних характеристик.

Синтезатори динамічних характеристик складаються із певних динамічних елементів $\varphi_i(\tau)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) та настанованих коефіцієнтів a_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Структура синтезаторів може бути паралельною (рис. 7.14) і послідовною (рис. 7.15).

Для синтезаторів паралельної структури справедливо

$$W_m(p) = \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k(p),$$

де $\Phi_k(p) = L\{\varphi_k(\tau)\}$.

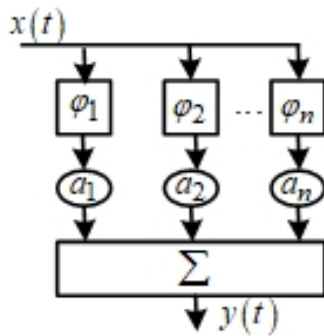


Рис. 7.14.

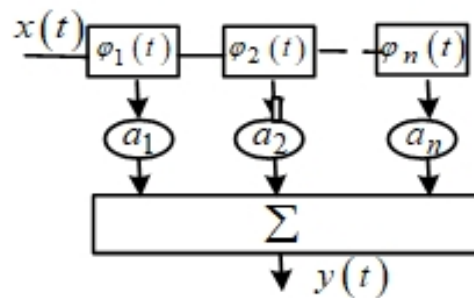


Рис. 7.15.

Для синтезаторів послідовної структури мають місце:

$$W_m(p) = \sum_{k=1}^n a_k \Psi_k(p); \tag{7.21}$$

$$\Psi_k(p) = \prod_{i=1}^k \Phi_i(p), \tag{7.22}$$

де $\Phi_i(p) = L\{\varphi_i(\tau)\}$.

Оскільки досліджувані об'єкти часто мають складну структуру, доцільніше застосування синтезаторів із зворотним зв'язком, у яких

використовується одна система елементів $\{\Phi_n(p)\}$ (рис. 7.16) або дві системи функцій, які, зокрема, можуть відрізнятися лише масштабом змінних (рис. 7.17).

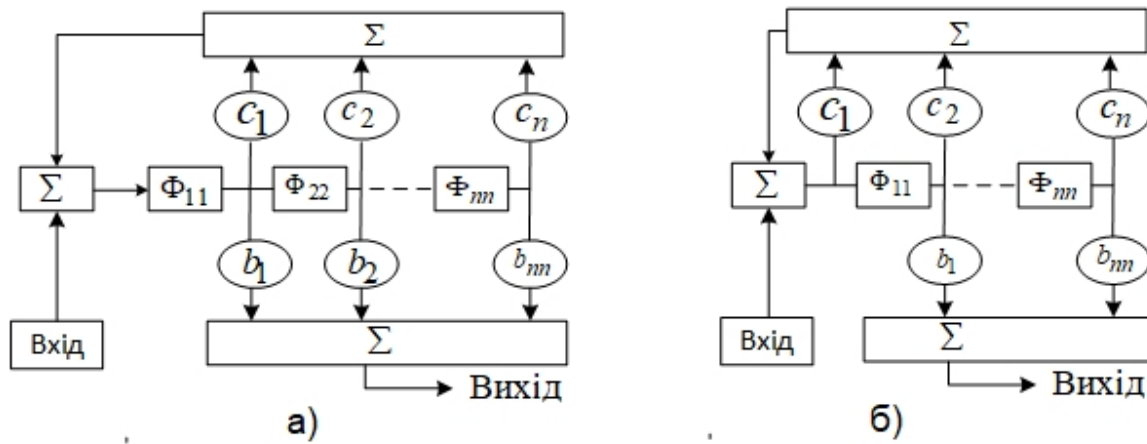


Рис. 7.16.

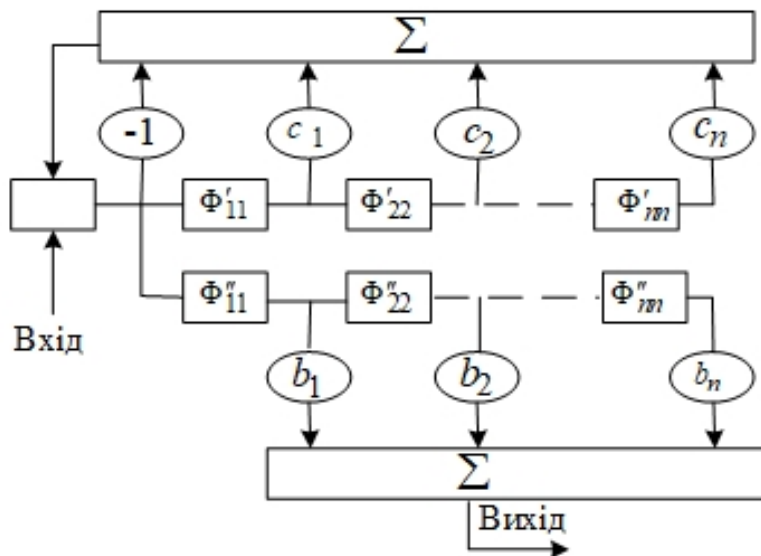


Рис. 7.17.

Функції $\varphi_i(\tau)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ повинні задовольняти умові ортогональності, Одним із найбільш розповсюджених видів синтезаторів – синтезатор на функціях Лагерра (6.22), (6.23)– показано на рис. 7.18.

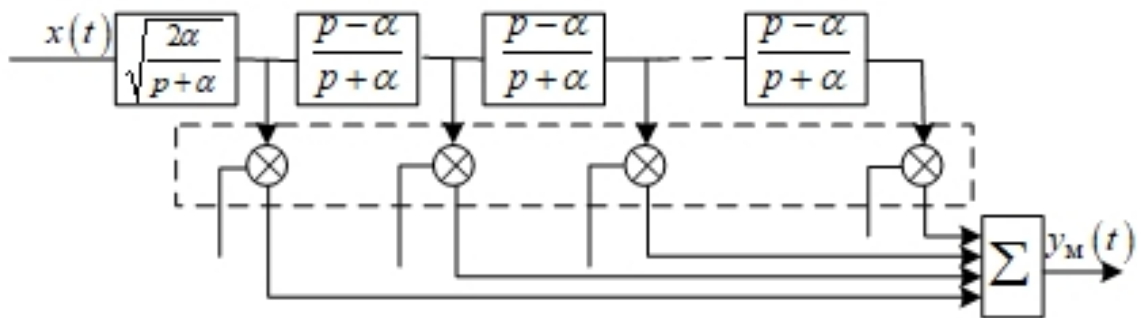


Рис. 7.18.

Якщо із деяких причин для синтезу динамічних характеристик вибрані не ортогональні функції, то їх можна ортогоналізувати за допомогою процедури Грамма–Шмідта. За допомогою синтезаторів можна побудувати любі адаптивні моделі.

У залежності від принципу роботи блоку настроювання параметрів усі адаптивні моделі можуть бути розділені на такі групи:

- 1) пошукові;
- 2) без пошукові (аналітичні), які у свою чергу можуть бути незамкнені і замкнуті.

Блок настроювання параметрів улюбій адаптивній моделі визначає параметри моделі таким чином, щоб мінімізувати критерій ідентифікації, тобто міру розбіжності між вихідними координатами об'єкту та моделі. Необхідною умовою досягнення вказаного мінімуму є рівність нулю градієнта критерію ідентифікації за параметрами моделі.

Якщо аналітичне визначення вказаного градієнта є складним, то використовують пошукові адаптивні моделі (рис. 7.19).



Рис. 7.19.

Ці моделі потребують меншої кількості апріорної інформації, але, як правило, зв'язані із необхідністю подачі на об'єкт спеціальних

пробних дій (сигналів). У пошукових адаптивних моделях блок настроювання параметрів представляє собою автоматизований оптимізатор.

Оптимізатор змінює параметри моделі у відповідності із алгоритмом пошуку екстремуму, мінімізуючи критерій ідентифікації. Як приклад, на рис. 7.20 представлена структурна схема пошукової адаптивної моделі, працюючої на принципі компенсації та мінімізації середньоквадратичної розбіжності вихідних координат об'єкту і моделі.

Безпошукові незамкнені системи проводять настроювання параметрів у відповідності із вибраним критерієм ідентифікації на основі інформації про вхідний та вихідний сигнали об'єкту. Порівняння вихідних координат об'єкту і моделі при цьому не проводиться. По суті безпошукові незамкнені адаптивні моделі представляють собою обчислювальні пристрої або блоки машинних програм.

Проте у ряді випадків виникає необхідність у перевірці правильності настроювання моделі. У таких випадках належить застосувати безпошукові моделі замкнутого типу, у яких настроювання параметрів проводиться на основі порівняння вихідних координат об'єкту й моделі.

По суті безпошукова адаптивна замкнута модель представляє собою слідкувальну систему із структурною схемою рис. 7.20

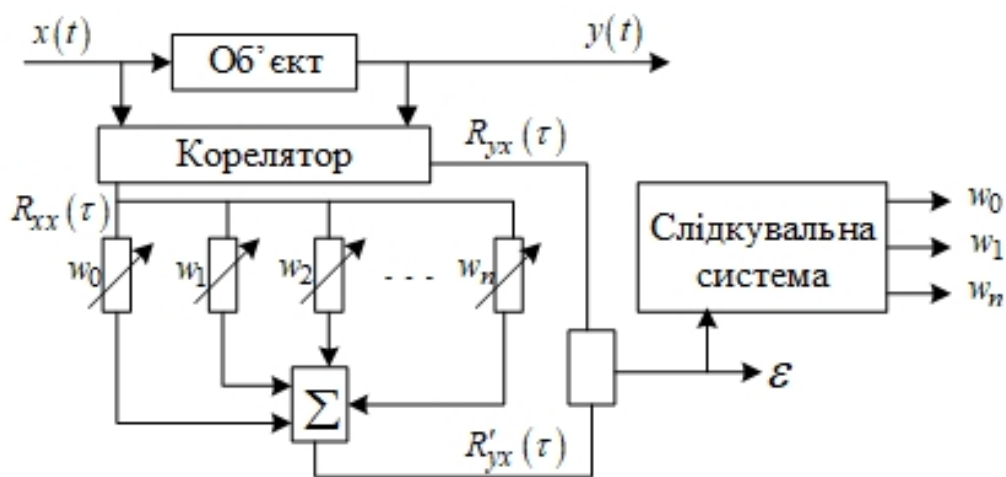


Рис. 7.20.

Вибравши у якості критерію ідентифікації відхилення відповідних взаємно – кореляційних функцій об'єкту і моделі

$$\varepsilon = R_{yx}(\tau) - R'_{yx}(\tau),$$

отримаємо адаптивну модель із наведеною структурною схемою.

7.3. Ідентифікація за допомогою градієнтного алгоритму

У останні роки знаходять поширення підхід до синтезу замкнених адаптивних моделей, оснований на застосуванні ітераційних алгоритмів градієнтного типу, а також ймовірнісних ітераційних алгоритмів (коли число настроюваних параметрів велике).

Розглянемо принцип побудови алгоритму градієнтного типу та його застосування до синтезу адаптивних моделей.

Нехай $J = J(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – критерій ідентифікації, $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – n -мірний вектор регульованих параметрів моделі, $\vec{a}^* = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*\}$ – таке значення вектора \vec{a} , яке мінімізує критерій J . Необхідна умова мінімуму, що визначає оптимальне значення \vec{a}^* , має вигляд:

$$\nabla J(\vec{a}) = \left\{ \frac{\partial J}{\partial a_1}, \frac{\partial J}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_n} \right\}^T = 0, \quad (7.23)$$

де ∇ – позначення градієнту.

Якщо рівняння (7.23) нелінійне, то для його розв'язання, як правило, застосовують ітераційні методи. Для цього його переписують у рівносильній формі

$$\vec{a} = \vec{a} - \Gamma \cdot \nabla J(\vec{a}) = 0,$$

де Γ – матриця розмірності $n \times n$ виду:

$$\Gamma = \Gamma[k] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \end{pmatrix}, \gamma > 0, \quad (7.24)$$

$$\Gamma = \Gamma[k] = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \dots, \gamma_n > 0, \quad (7.25)$$

$$\Gamma = [\nabla^2 J(\vec{a})]^{-1}, \nabla^2 J(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial a_1 \partial a_2} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial a_2 \partial a_2} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial a_2 \partial a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial a_n \partial a_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial a_n \partial a_2} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial a_n \partial a_n} \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Пошук оптимального значення вектора \vec{a} проводиться за допомогою послідовних наближень або ітерацій:

$$\vec{a}[k] = \vec{a}[k-1] - \Gamma[k-1] \cdot \nabla J(\vec{a}[k-1]), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.27)$$

де $\vec{a}[0]$ – нульове наближення, яке вибирається із фізичних (інтуїтивних) міркувань; запис $\vec{a}[k-1], \Gamma[k-1], \nabla J(\vec{a}[k-1])$ означає, що відповідні вирази обраховуються на « $k-1$ » наближенні.

Якщо у формулі (7.27) використовується матриця (7.24), то отримуємо чисто градієнтний метод; якщо матриця (7.25) – отримуємо псевдоградієнтний метод; якщо (7.26) – отримуємо метод Ньютонна (матриця $[\nabla^2 J(\vec{a})]$ в формулі (7.26) називається матрицею Гессе).

У зазначених умовах алгоритм (7.27) є збіжним до \vec{a}^* , тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}[k] = \vec{a}^*.$$

Швидкість збіжності вказаних алгоритмів визначається конкретною реалізацією алгоритму – вибором елементів матриці Γ . критерію J та особливостями характеристик об'єкту.

Найпростішими алгоритми будуть тоді, коли критерієм ідентифікації є середньоквадратичне відхилення (2.6) вихідних координат об'єкту і моделі. Тоді \vec{a}^* знаходиться як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

7.4. Ідентифікація параметрично заданих моделей

Розглядаються параметричні методи ідентифікації, тобто визначення параметрів моделі об'єкта, структура якого відома апріорно. Таким чином, задача полягає в знаходженні таких параметрів моделі об'єкта, щоб вихідний сигнал моделі та об'єкта задовольняли вибраному критерію якості ідентифікації (2.6)–(2.9).

7.4.1 Методи визначення параметрів моделі, заданої диференціальними рівняннями

У загальному випадку диференціальне рівняння лінійного або лінійаризованого об'єкту із сталими коефіцієнтами має вид:

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 z^{(1)} + a_0 z = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x, \\ m \leq n,$$

або

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} z^{(n-i)} = \sum_{j=0}^m b_{m-j} x^{(m-j)}, \quad m \leq n, \quad (7.27)$$

де $x(t)$ – вхідний сигнал (зовнішній вплив на об'єкт); $z(t)$ – вихідний сигнал (реакція об'єкту на зовнішній вплив).

Очевидно, що $a_n \neq 0$, тому усі члени рівняння (7.27) можна поділити на a_n , після чого воно набуде виду (для простоти збережено попередні позначення коефіцієнтів):

$$z^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_{n-i} z^{(n-i)} = \sum_{j=0}^m b_{m-j} x^{(m-j)}, \quad m \leq n \quad (7.28)$$

або

$$\sum_{i=1}^n a_{n-i} z^{(n-i)} - \sum_{j=0}^m b_{m-j} x^{(m-j)} = -z^{(n)}, \quad m \leq n. \quad (7.29)$$

Найпростіший шлях визначення коефіцієнтів цього рівняння полягає у вимірі значень вхідних і вихідних координат об'єкту та їх похідних у дискретні моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_N$. Таким чином, для кожного інтервалу спостереження можна отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; b_0, b_1, \dots, b_m$. Проте, на практиці вхідний сигнал $x(t)$ та й вихідний $y(t)$ із-за похибок вимірювань часто представляють собою випадкові величини, що утруднює обчислення їх похідних та приводить до значних похибок у визначенні невідомих $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; b_0, b_1, \dots, b_m$. Це приводить до необхідності застосування інших методів обробки вхідного та вихідного сигналів. Одним із таких методів є інтегрування диференціального рівняння, тобто перехід до еквівалентного рівняння, але яке не містить похідних.

Відомо, що інтегрування функції дає нову функцію із кращими властивостями (наприклад, зникають стрибки значень функції). Зауважимо, що інтегрування оди раз похідної функції k -го порядку

зменшує на одиницю порядок похідної, відповідно інтегрувавши її k разів – отримаємо саму функцію. Тому має місце наступна рівність:

$$\underbrace{\int_0^{t_k} \left(\int_0^\tau \cdots \left(\int_0^\tau z^{(n-i)}(\tau_1) d\tau_1 \right) \cdots d\tau_1 \right) d\tau_1}_{n\text{-разів}} = \underbrace{\int_0^{t_k} \left(\int_0^\tau \cdots \left(\int_0^\tau z(\tau_1) d\tau_1 \right) \cdots d\tau_1 \right) d\tau_1}_{i\text{-разів}}; \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Враховувавши останню рівність, виконаємо n -кратне інтегрування рівняння (7.29) при нульових початкових умовах, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n a_{n-i} z(i, t_k) - \sum_{j=0}^m b_{m-j} x(n-m+j, t_k) = -z(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (7.30)$$

де

$$z(i, t_k) = \int_0^{t_k} \underbrace{\left(\int_0^\tau \cdots \left(\int_0^\tau z(\tau_1) d\tau_1 \right) \cdots d\tau_1 \right)}_{i\text{-разів}} d\tau_1, \quad r = 1, 2, \dots, n, \\ x(s, t_k) = \int_0^{t_k} \underbrace{\left(\int_0^\tau \cdots \left(\int_0^\tau x(\tau_1) d\tau_1 \right) \cdots d\tau_1 \right)}_{s\text{-разів}} d\tau, \\ s = n-m, n-m+1, \dots, n;$$

запис $z(i, t_k)$ означає, що функція $z(t)$ інтегрується « i » разів на проміжку $[0, t_k]$.

Таким чином, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (7.30) відносно $n+m+1$ невідомих коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; b_0, b_1, \dots, b_m$. Очевидно, що для однозначності її розв'язку треба щоб система мала $n+m+1$ лінійно незалежних рівнянь. Для цього треба вибрати $\{t_1, t_2, \dots, t_{n+m+1}\} \in [0, T]$ різних значень t_k ($k = 1, 2, \dots, n+m+1$) і для кожного скласти рівняння (7.30). Це дає змогу вибрати такі значення $t_1, t_2, \dots, t_{n+m+1}$ в системі (7.30), які запобігають її погану обумовленість. Розв'язавши систему, визначимо коефіцієнти моделі, яка узгоджується з об'єктом.

Для прикладу розглянемо таке диференціальне рівняння

$$a_2 z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) - b_1 x_e'(t) - b_0 x_e(t) = -z'''(t), \quad (7.31)$$

у якому коефіцієнти a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 є невідомими.

Інтегруємо це рівняння тричі при нульових початкових умовах, отримуємо

$$\begin{aligned} & a_2 \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z''(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 + a_1 \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z'(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 + \\ & + a_0 \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 - b_1 \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} x'(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 - \\ & - b_0 \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} x(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 = - \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z'''(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\int_0^{\tau_1} z'(\tau) d\tau = z(\tau_1), \quad \int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z''(\tau) d\tau \right) d\tau_1 = z(\tau_2),$$

$$\int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z'''(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2 = z(t)$$

$$\int_0^{\tau_1} x'(\tau) d\tau = x(\tau_1),$$

отримуємо рівняння (7.31) у виді

$$a_2 z(1,t) + a_1 z(2,t) + a_0 z(3,t) - b_1 x(2,t) - b_0 x(3,t) = -z(t), \quad (7.32)$$

де

$$z(1,t) = \int_0^t z(\tau_2) d\tau_2,$$

$$z(2,t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} z(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau_2, \quad z(3,t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} z(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2,$$

$$x(2,t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} x(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau_2, \quad x(3,t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_1} x(\tau) d\tau \right) d\tau_1 \right) d\tau_2.$$

Таким чином, у рівнянні (7.32) коефіцієнти $z(1,t)$, $z(2,t)$, $z(3,t)$, $x(2,t)$, $x(3,t)$ є звичайними функціями змінної $t \in [0, t_N]$, а рівняння не є диференціальним. Оскільки a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 , невідомі, то для їх знаходження треба мати систему п'яти рівнянь. Для отримання цих рівнянь треба вибрати п'ять різних значень часу

$t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^* \in [0, t_N]$ та підставити їх у рівняння (7.32). Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 z(1, t_1^*) + a_1 z(2, t_1^*) + a_0 z(3, t_1^*) - b_1 x(2, t_1^*) - b_0 x(3, t_1^*) = -z(t_1^*), \\ a_2 z(1, t_2^*) + a_1 z(2, t_2^*) + a_0 z(3, t_2^*) - b_1 x(2, t_2^*) - b_0 x(3, t_2^*) = -z(t_2^*), \\ a_2 z(1, t_3^*) + a_1 z(2, t_3^*) + a_0 z(3, t_3^*) - b_1 x(2, t_3^*) - b_0 x(3, t_3^*) = -z(t_3^*), \\ a_2 z(1, t_4^*) + a_1 z(2, t_4^*) + a_0 z(3, t_4^*) - b_1 x(2, t_4^*) - b_0 x(3, t_4^*) = -z(t_4^*), \\ a_2 z(1, t_5^*) + a_1 z(2, t_5^*) + a_0 z(3, t_5^*) - b_1 x(2, t_5^*) - b_0 x(3, t_5^*) = -z(t_5^*). \end{cases}$$

або у матричному виді

$$A \cdot X = B, \quad (7.33)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} z(1, t_1^*) & z(2, t_1^*) & z(3, t_1^*) & -x(2, t_1^*) & -x(3, t_1^*) \\ z(1, t_2^*) & z(2, t_2^*) & z(3, t_2^*) & -x(2, t_2^*) & -x(3, t_2^*) \\ z(1, t_3^*) & z(2, t_3^*) & z(3, t_3^*) & -x(2, t_3^*) & -x(3, t_3^*) \\ z(1, t_4^*) & z(2, t_4^*) & z(3, t_4^*) & -x(2, t_4^*) & -x(3, t_4^*) \\ z(1, t_5^*) & z(2, t_5^*) & z(3, t_5^*) & -x(2, t_5^*) & -x(3, t_5^*) \end{pmatrix},$$

$$X = (a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad b_1 \quad b_0)^T,$$

$$B = (-z(t_1^*) \quad -z(t_2^*) \quad -z(t_3^*) \quad -z(t_4^*) \quad -z(t_5^*))^T.$$

Для існування єдиного розв'язку рівняння (7.33) необхідно й достатньо щоб $\det(A) \neq 0$. Не виключено, що серед $t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^* \in [0, t_N]$ знайдуться такі, що зазначена умова не виконується. Очевидно, що такі значення треба відкидати. Крім того, значення $t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*$ треба обирати таким способом, щоб відстань між двома сусідніми значеннями була якомога більшою. Також, враховуючи наявність випадкової складової у даних, треба використовувати статистичні методи, тому бажано використати якомога більше комбінацій значень $t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*, t_5^*$, для яких існує єдиний розв'язок рівняння (7.33). По отриманій таким способом множині розв'язків $\{a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad b_1 \quad b_0\}_k$ знаходимо оцінку математичного сподівання та середньо квадратичного відхилення кожного коефіцієнту.

Приклад 1.

Диференціальне рівняння $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$ є математичною моделлю деякого об'єкту. Визначити невідомі коефіцієнти a_1, a_0, b_0 , якщо відомі вхідний сигнал $x(t) = 5 \sin(2.5t)$ та вихідний $z(t)$ у вигляді таблиці (рис. 7.21.).

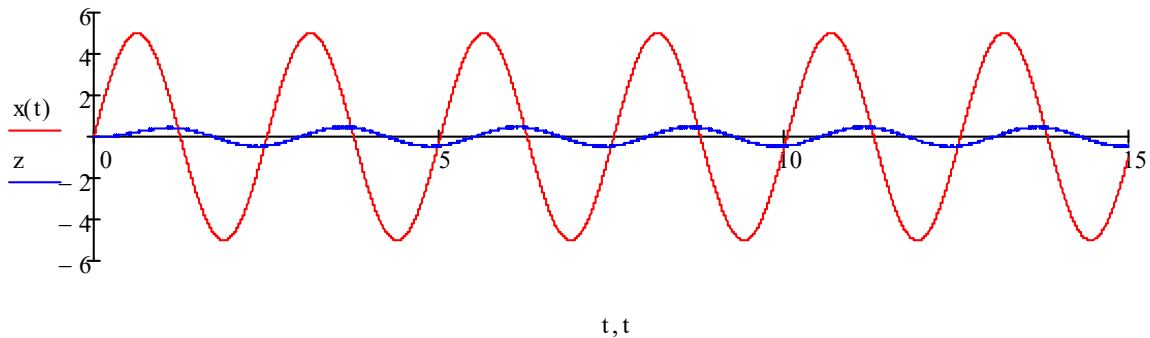


Рис. 7.21.

Відомо, що вихідний сигнал є дискретним і визначено із похибками, які можна представити у вигляді білого шуму.

На рис. 7.22. представлено фрагмент рис. 7.21.

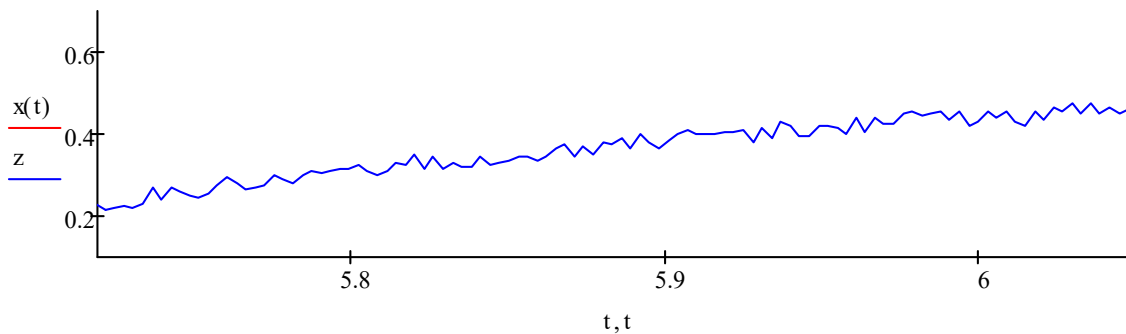


Рис. 7.22.

Розв'язок.

Без обмеження загальності приймемо початкові умови нульовими. Щоб позбутись похідних, двічі інтегруємо задане рівняння. Отримуємо

$$a_1 z(1, t) + a_0 z(2, t) - b_0 x(2, t) = -z(t), \quad (7.34)$$

де

$$z(1,t) = \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad z(2,t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_1} z(\tau) d\tau \right) d\tau_1,$$

$$x(2,t) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau_1} x(\tau) d\tau \right) d\tau_1.$$

На рис. 7.23 представлено графіки коефіцієнтів рівняння (7.34)

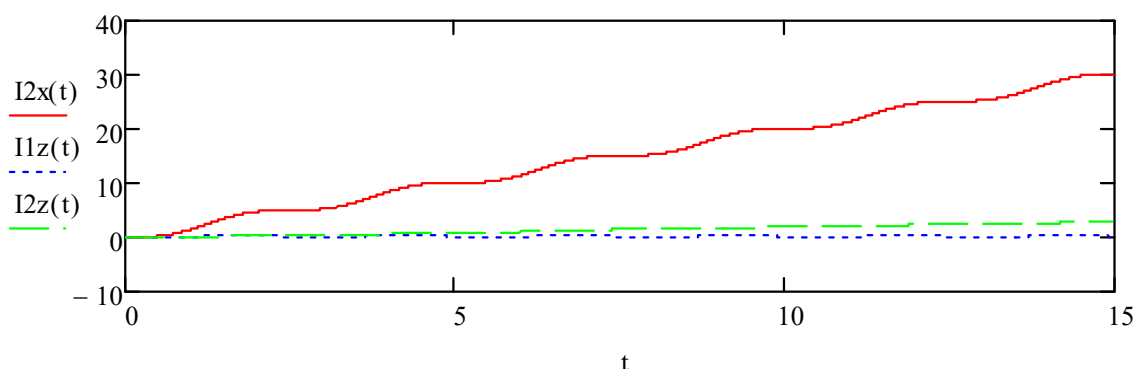


Рис. 7.23.

Виберемо три довільних **різних** значення змінної $t : t_1^*, t_2^*, t_3^*$ та підставимо послідовно у рівняння (7.34). Отримаємо наступну систему трьох лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_1, a_0, b_0

$$\begin{cases} a_1 z(1, t_1^*) + a_0 z(2, t_1^*) - b_0 x(2, t_1^*) = -z(t_1^*), \\ a_1 z(1, t_2^*) + a_0 z(2, t_2^*) - b_0 x(2, t_2^*) = -z(t_2^*), \\ a_1 z(1, t_3^*) + a_0 z(2, t_3^*) - b_0 x(2, t_3^*) = -z(t_3^*). \end{cases}$$

або у матричному виді

$$A \cdot X = B, \quad (7.35)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} z(1, t_1^*) & z(2, t_1^*) & -x(2, t_1^*) \\ z(1, t_2^*) & z(2, t_2^*) & -x(2, t_2^*) \\ z(1, t_3^*) & z(2, t_3^*) & -x(2, t_3^*) \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -z(t_1^*) \\ -z(t_2^*) \\ -z(t_3^*) \end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок рівняння (7.35) у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$, який існує тоді, коли 1) $\det(A) \neq 0$, або коли 2) матриця A не є погано обумовленою. Якщо ніякі два рядки або стовпці матриці A не

пропорційні, то перша умова виконується, що, взагалі-то, не виключає погані обумовленості матриці A . Тому на практиці у алгоритмах при виборі значень t_1^*, t_2^*, t_3^* ставлять умову $|\det(A)| > \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – константа, вибір якої залежить від конкретної задачі. У даному прикладі $\varepsilon = 0.01$.

При конкретних розрахунках із-за похибок вимірів розглядають множину значень $t_1^* \in [T_0^*, T_1^*], t_2^* \in [T_1^*, T_2^*], t_3^* \in [T_2^*, T_3^*]$, причому зазначені інтервали не перекриваються. Крім того, бажано щоб T_0^* було більшим перехідного інтервалу вихідного сигналу. У даному прикладі $T_0^* = 3\text{с}$ та усі інтервали однакової довжини, кожен містить 1000 значень вихідного сигналу, що охоплює часовий проміжок спостереження 9с. На рис. 7.24 наведено результати розрахунків коефіцієнтів у MathCad).

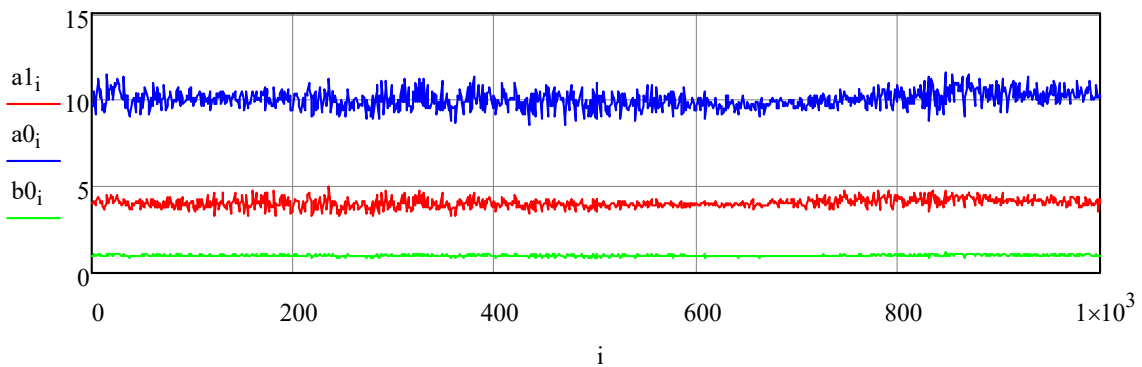


Рис. 7.24.

Статистична обробка проведених розрахунків дала наступні результати: $a_1' = 4.04$, $a_0' = 10.018$, $b_0' = 1.006$, $\sigma_{a_1} = 0.269$, $\sigma_{a_0} = 0.516$, $\sigma_{b_0} = 0.052$

де a_1' , a_0' , b_0' – точкові оцінки математичного сподівання коефіцієнтів; σ_{a_1} , σ_{a_0} , σ_{b_0} – їх середньоквадратичні відхилення.

Структурна схема алгоритму представлена на рис. 7.25.

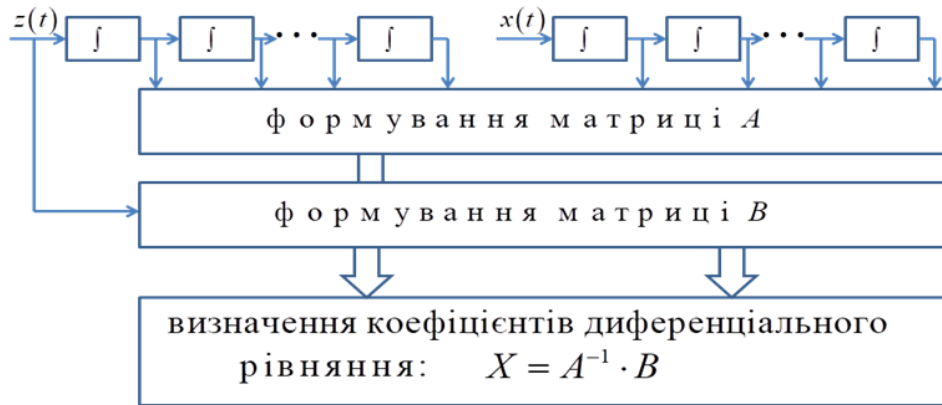


Рис. 7.25. Структурна схема алгоритму визначення коефіцієнтів диференціального рівняння; $x(t)$ та $z(t)$ – вхідний та вихідний сигнали

Матриця X має вид

$$X = (a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_1 \ a_0 \ b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_1 \ b_0)^T \quad (7.36)$$

Кожен рядок матриць A, B обраховується для різних $n + m + 1$ значень моментів часу $t_i^0, t_i^1, \dots, t_i^{n+m}$, таких, що кожен знаходяться у різних підінтервалах однакової довжини $\Delta = (T_k - \tau_{\text{пер}}) / (n + m + 1)$:

$$\tau_{\text{пер}} \leq t_i^0 < \tau_0, \tau_0 \leq t_i^1 < \tau_1, \dots, \tau_{n+m-1} \leq t_i^{n+m} \leq T_k, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

У результаті отримано вибірку обсягом s розв'язків виду (7.36), які в силу випадкових похибок вимірів будуть взагалі-то різними. Проводимо статистичну обробку кожного елемента матриці (7.36), отримуємо точкові оцінки математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення кожного коефіцієнта системи; при необхідності знаходимо довірчі інтервали.

7.4.2. Ідентифікація за передатною функцією об'єкту, заданого диференціальним рівнянням

Очевидно, що по знайденим оцінкам коефіцієнтів (параметрів) системи (7.35)

$$\bar{X} = (\bar{a}_{n-1} \ \bar{a}_{n-2} \ \dots \ \bar{a}_1 \ \bar{a}_0 \ \bar{b}_m \ \bar{b}_{m-1} \ \dots \ \bar{b}_1 \ \bar{b}_0)^T$$

легко записати операторну передатну функцію

$$W(p) = \frac{\bar{b}_m p^m + \bar{b}_{m-1} p^{m-1} + \dots + \bar{b}_1 p + \bar{b}_0}{p^n + \bar{a}_{n-1} p^{n-1} + \bar{a}_{n-2} p^{n-2} + \dots + \bar{a}_1 p + \bar{a}_0}$$

та частотну характеристику системи $W(j\omega)$

$$W(j\omega) = \frac{\bar{b}_m (j\omega)^m + \bar{b}_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + \bar{b}_1 (j\omega) + \bar{b}_0}{(j\omega)^n + \bar{a}_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \bar{a}_{n-2} (j\omega)^{n-2} + \dots + \bar{a}_1 (j\omega) + \bar{a}_0}$$

Таким чином, розглянуто ефективну методику визначення коефіцієнтів диференціального рівняння (параметрів об'єкту) по вхідному та вихідному сигналу, передатної функції та частотної характеристики із урахуванням похибок вимірів.

7.4.3. Ідентифікація на основі адаптивних методів визначення параметрів моделі

Розглянемо адаптивний алгоритм визначення параметрів (коефіцієнтів) моделі об'єкта, заданої диференціальним рівнянням

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x,$$

$$m \leq n.$$

Представимо його у виді

$$y = -\frac{a_1}{a_0} y^{(1)} - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_0} y^{(n-1)} - \frac{a_n}{a_0} y^{(n)} + \frac{b_0}{a_0} x + \frac{b_1}{a_0} x^{(1)} + \dots + \frac{b_{m-1}}{a_0} x^{(m-1)} + \frac{b_m}{a_0} x^{(m)}$$

або

$$y = c_0 x + c_1 x^{(1)} + \dots + c_m x^{(m)} + c_{m+1} y^{(1)} + c_{m+2} y^{(2)} + \dots + c_{m+n} y^{(n)}, \quad (7.37)$$

де

$$c_0 = \frac{b_0}{a_0}, c_1 = \frac{b_1}{a_0}, \dots, c_{m-1} = \frac{b_{m-1}}{a_0}, c_m = \frac{b_m}{a_0},$$

$$c_{m+1} = -\frac{a_1}{a_0}, c_{m+2} = -\frac{a_2}{a_0}, \dots, c_{m+n-1} = -\frac{a_{n-1}}{a_0}, c_{m+n} = -\frac{a_n}{a_0}.$$

Для зручності запису виразу (7.37) введемо наступні позначення $z_0 = x, z_1 = x^{(1)}, z_2 = x^{(2)}, \dots, z_m = x^{(m)}, z_{m+1} = y^{(1)}, z_{m+2} = y^{(2)}, \dots, z_{m+n} = y^{(n)}$.

Тоді вираз (7.37) запишеться так

$$y = c_0 z + c_1 z_1 + \dots + c_m z_m + c_{m+1} z_{m+1} + c_{m+2} z_{m+2} + \dots + c_{m+n-1} z_{m+n-1} + c_{m+n} z_{m+n}$$

або більш компактно так

$$y = \sum_{i=0}^{m+n} c_i z_i. \quad (7.38)$$

Нехай яким – не будь способом установлено наближені значення невідомих коефіцієнтів $c_0 \approx c_0^0, c_1 \approx c_1^0, c_2 \approx c_2^0, \dots, c_{m+n} \approx c_{m+n}^0$

(тут i подальшому верхній індекс позначає номер ітерації). Назвемо ці значення нульовим наближенням. Підставимо нульове наближення у формулу (7.38), отримаємо нульове наближення значення вихідного сигналу \tilde{y}^0

$$\tilde{y}^0 = \sum_{i=0}^{m+n} c_i^0 z_i .$$

Введемо квадратичний критерій ідентифікації

$$\varepsilon = \varepsilon(c_0^0, c_1^0, c_2^0, \dots, c_{m+n}^0) = (\tilde{y}^0 - y)^2 = \left(\sum_{i=0}^{m+n} c_i^0 z_i - y \right)^2 . \quad (7.39)$$

Зрозуміло, що значення цього критерію буде дорівнювати нулю, коли наближення $c_0^0, c_1^0, c_2^0, \dots, c_{m+n}^0$ співпадуть із дійсними значеннями $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m+n}$. Таким чином, нам треба знайти мінімум критерію (7.39) відносно змінних $c_0^0, c_1^0, c_2^0, \dots, c_{m+n}^0$. Для цього використаємо адаптивний алгоритм, основою якого є градієнтний метод. Суть цього методу полягає у властивості вектора градієнта функції багатьох змінних бути направленим завжди у сторону найшвидшого зростання цієї функції. (Рис. 7.26). Це означає, що знайшовши градієнт у певній точці та рухаючись вздовж нього на деяку відстань Δl , ми будемо наближатись до максимуму функції. Величина Δl не може бути великою, щоб не "проскочити" точку максимуму та вона повинна зменшуватись по мірі наближення до стаціонарної точки – точки у якій досягається максимум.

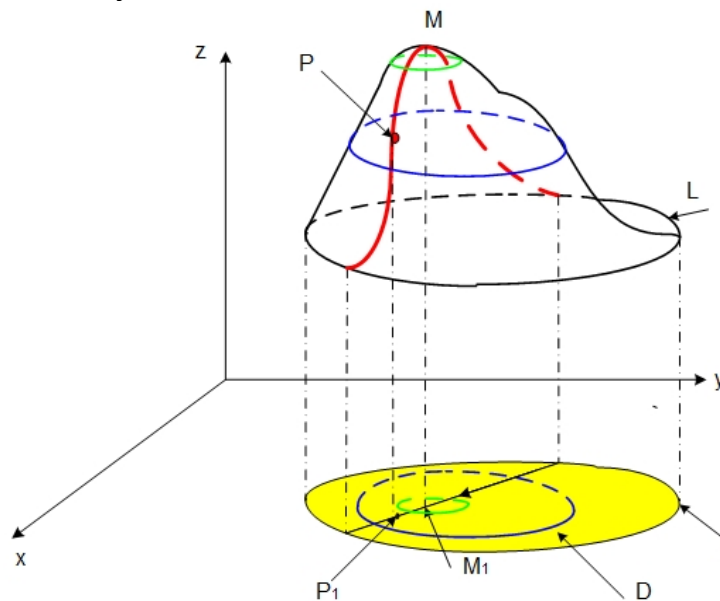


Рис. 7.26.

Щоб сказане залишалось справедливим для мінімуму функції, як має місце у нашому випадку, треба градієнт брати із протилежним знаком.

Запишемо градієнт функції (7.39)

$$\begin{aligned}\nabla \varepsilon &= \left\{ -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_0^0}, -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1^0}, \dots, -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_{m+n}^0} \right\} = \\ &= -2 \left\{ \left(\sum_{i=0}^{m+n} c_i^0 z_i - y \right) z_0, \left(\sum_{i=0}^{m+n} c_i^0 z_i - y \right) z_1, \dots, \left(\sum_{i=0}^{m+n} c_i^0 z_i - y \right) z_{m+n} \right\} = \\ &= -2 \left\{ (\tilde{y}^0 - y) z_0, (\tilde{y}^0 - y) z_1, \dots, (\tilde{y}^0 - y) z_{m+n} \right\}\end{aligned}$$

Тоді наступне наближення до дійсних значень коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m+n}$ буде визначатись за формулами

$$\begin{aligned}c_0^1 &= c_0^0 - \gamma^0 (\tilde{y}^0 - y) z_0, \\ c_1^1 &= c_1^0 - \gamma^0 (\tilde{y}^0 - y) z_1, \\ &\dots \\ c_{m+n}^1 &= c_{m+n}^0 - \gamma^0 (\tilde{y}^0 - y) z_{m+n}.\end{aligned}$$

де γ^0 – певним способом вибрана стала $0 < \gamma^0 < 1$.

Аналогічно запишемо друге наближення

$$\begin{aligned}c_0^2 &= c_0^1 - \gamma^1 (\tilde{y}^1 - y) z_0, \\ c_1^2 &= c_1^1 - \gamma^1 (\tilde{y}^1 - y) z_1, \\ &\dots \\ c_{m+n}^2 &= c_{m+n}^1 - \gamma^1 (\tilde{y}^1 - y) z_{m+n},\end{aligned}$$

і т.д. Загальна формула матиме вигляд

$$\begin{aligned}c_0^{s+1} &= c_0^s - \gamma^s (\tilde{y}^s - y) z_0, \\ c_1^{s+1} &= c_1^s - \gamma^s (\tilde{y}^s - y) z_1, \\ &\dots \\ c_{m+n}^{s+1} &= c_{m+n}^s - \gamma^s (\tilde{y}^s - y) z_{m+n},\end{aligned}\tag{7.40}$$

де $\tilde{y}^s = \sum_{i=0}^{m+n} c_i^s z_i$, $s = 0, 1, 2, \dots$, а γ^s – вибирається шляхом підбору таким, що $0 < \gamma^s < 1$. Теоретичні дослідження [12] показали, що

$\gamma^s, (s = 0, 1, 2, \dots)$ може представляти нескінченну послідовність **випадкових величин**, яка задовольняє умовам Робінса – Монро – Гладішева

$$\sum_{s=0}^{\infty} \gamma^s = \infty; \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma^s)^2 < \infty.$$

У такому випадку наведений алгоритм (7.40) є збіжним до дійсних значень $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m+n}$ із ймовірністю 1.

На рис. 7.27 наведена структурна схема адаптивного алгоритму

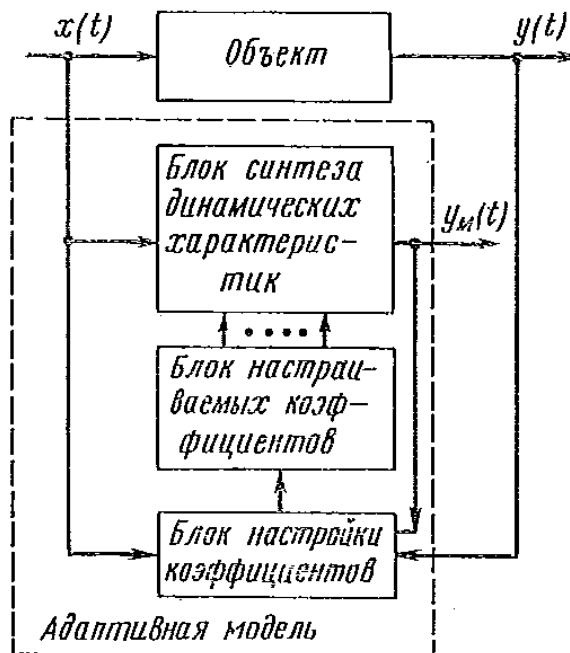


Рис. 7.27.

Треба відмітити, що застосування алгоритму обмежується рівняннями третього порядку із-за складності чисельного визначення похідних вищих порядків [5, с.163].

Зауважимо також, що швидкість збіжності алгоритмів типу (7.40) тим вища, чим ближче нульове наближення до дійсних.

Існує особливий, достатньо поширений на практиці клас задач, коли структура моделі та грубі оцінки її параметрів відомі, але значення параметрів мають дрейф. Для відслідковування такого дрейфу особливо зручні градієнтні та псевдо градієнтні алгоритми типу (7.40).

Зауваження. Зазначені недоліки можна обійти, якщо використати процедуру інтегрування диференціального рівняння, яку описано у п. 7.41.

Питання для самоперевірки:

1. Ідентифікація об'єктів шляхом визначення імпульсної перехідної функції по вимірам вхідного та вихідного сигналів(прямий метод), недоліки цього методу.

2. Ідентифікація об'єктів шляхом визначення імпульсної перехідної функції по кореляційним функціям вхідного та вихідного сигналів. Структурна схема методу.(Розглянути методи прямокутників та трапецій наближеного обчислення інтегралів).

3. Метод ідентифікації шляхом наближеного визначення ПФ об'єкту, оснований на апроксимації характеристик $R_{xx}(t)$ та $R_{yx}(t)$ (непрямий метод визначення ПФ).

4. Метод ідентифікації об'єктів на узгоджених апроксимаціях імпульсної перехідної та кореляційної функцій. Структурна схема алгоритму.

5. Ідентифікація за допомогою адаптивних моделей. Навести типові структурні схеми з різними блоками настоюваних параметрів та послідовним і паралельним використанням синтезаторів.

6. Ідентифікація за допомогою градієнтного алгоритму.

7. Ідентифікація параметрично заданих моделей. Методи визначення параметрів моделі, заданої диференціальними рівняннями.

8. Ідентифікація за передатною функцією об'єкта, заданого диференціальним рівнянням.

9. Ідентифікація на основі адаптивних методів визначення параметрів моделі. Структурна схема адаптивного алгоритму.

8. ОСОБЛИВОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Із розділу 7 слідує, що ідентифікація навіть лінійних динамічних об'єктів представляє собою досить складну задачу. При ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів труднощі значно зростають.

Однією із основних трудностей є залежність перехідного процесу нелінійного об'єкту не тільки від форми, але й від амплітуди вхідного сигналу, що висуває складні й суперечливі вимоги до вибору пробного сигналу при активній ідентифікації.

Другу серйозну перешкоду складає нескінченне різноманіття типів нелінійних операторів, що описують об'єкт.

Ці, а також ряд інших обставин є причиною того, що майже усі запропоновані до останнього часу методи ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів поки що далекі від практичного застосування.

Методи ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів діляться на дві основні групи:

- методи, основані на лінеаризації математичного опису об'єкту;
- методи, у яких модель об'єкту розглядається як суттєво нелінійна.

Найбільш повно розвинуті методи, основані на лінеаризації об'єктів. Простота і достатня у ряді випадків точність забезпечила їх переважний розвиток. Проте, дуже часто розгляд об'єктів у лінійному наближенні є недостатнім.

Так, при побудові систем автоматичного управління з прогнозуванням при значних змінах вхідних сигналів об'єкту, застосування його лінеаризованої моделі приводить до великих похибок.

У деяких випадках лінеаризована модель взагалі не має сенсу. Прикладом такого об'єкту є об'єкт екстремального регулювання, коли робота йде близько від точки екстремуму при гармонічному пошуковому сигналі. Тому методи ідентифікації, у яких опис об'єкту розглядається як суттєво нелінійний, набувають все більшого значення.

Методи можуть бути класифіковані по наступним ознакам [13]:

А. За наявною апріорною інформацією про об'єкт:

а) параметричні методи, у яких вид нелінійного диференціального оператора об'єкта відомий, а коефіцієнти його повністю або частково невідомі;

б) прямі методи, у яких апріорна інформація про об'єкт відсутня.

Б. По способу представлення оператора об'єкта:

а) у часовій області (для цього використовуються нелінійні диференціальні або інтегральні рівняння об'єкта, функціональні представлення і т. п.);

б) у частотній області (при цьому використовуються коефіцієнти підсилення по вищим гармонікам).

В. По методам відновлення невідомих параметрів об'єкта:

а) не ітераційні методи (метод найменших квадратів, кореляційний аналіз і т. д.);

б) ітераційні методи (регресійний аналіз, методи малого параметру, методи теорії статистичних рішень, стохастичної апроксимації і т. п.).

Г. По прийнятому критерію подібності об'єкта та моделі.

Зупинимось на деяких найбільш поширених методах.

8.1. Методи ідентифікації, на основі лінеаризації характеристик об'єктів

Ідея методів лінеаризації полягає у заміні нелінійної залежності

$y = f(x)$ лінійною $y = K \cdot x + b$, де K – коефіцієнт лінеаризації.

За певним критерієм можна прийняти, що лінійна залежність еквівалентна початковій в околі певної точки.

Розглянемо приклад лінеаризації об'єкта, структура якого представлена на рис. 8.1. Це найпростіший фільтр, що представляє каскадне з'єднання без інерційного нелінійного елемента (ланки) першого порядку.

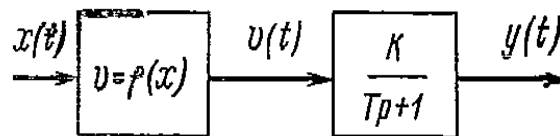


Рис. 8.1.

Рівняння об'єкта у загальному випадку має вид:

$$L[y(t)] = f[x(t)] \quad (8.1)$$

де L – лінійний диференціальний оператор.

Розкладемо $f(x)$ у степеневий ряд у околі робочої точки x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Введемо позначення

$$y_0 = f(x_0); \tilde{x} = x - x_0; \tilde{y} = y - y_0.$$

та запишемо оператор (10.1) у приростах \tilde{x}, \tilde{y}

$$L[y(t)] = f[x(t)] = f(x_0) + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + \dots \quad (8.2)$$

або

$$\begin{aligned} L[y(t)] - f(x_0) &= a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + \dots \Rightarrow L[y(t)] - L[y_0] = \\ &= a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow L[y(t) - y_0] &= a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + \dots \Rightarrow L[\tilde{y}(t)] = a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

В області малих змін \tilde{x} у ряді (8.3) можна нехтувати доданками степенів вище першого. Отримуємо лінеаризований оператор (8.1) у виді

$$L[\tilde{y}(t)] = a_1\tilde{x}(t)$$

де $K = a_1$ – коефіцієнт лінеаризації.

Таким чином, отримали задачу, яка розв'язується розглянутими раніше методами; і цей розв'язок має місце в околі робочої точки x_0 . Таким способом можна усю область не лінійності (8.1) розділити на куски лінійності й отримати розв'язок задачі ідентифікації в потрібній області. Такий метод досить поширений і носить назву кускової лінеаризації [5].

8.2. Гармонічна лінеаризація у задачах ідентифікації

Суть методу гармонічної лінеаризації полягає у заміні заданого нелінійного елементу лінійним із передатною функцією, рівною еквівалентному комплексному коефіцієнту підсилення по першій гармоніці та залежній від амплітуди.

Нехай для визначеності структура об'єкта має вид, показаний на рис. 8.2.

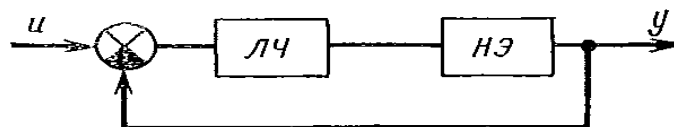


Рис. 8.2.

На вхід об'єкта надходить гармонічний сигнал

$$x(t) = A \sin \omega t.$$

Тоді вихідний сигнал об'єкта

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} K(A) A \sin [i\omega t + \varphi(A)] = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Im}(Y_i e^{j i \omega t}), \quad (8.4)$$

де $K(A)$ – еквівалентний комплексний коефіцієнт підсилення;

$Y_i = K(A) e^{j\varphi(A)}$; $\varphi(A)$ – фазова характеристика нелінійного елементу.

Припустимо, що інерційність лінійної частини об'єкта така, що у вихідному сигналі об'єкта суттєва лише перша гармоніка ($i = 1$).

Тоді

$$W(A) = \bar{W}(A) e^{j\varphi(A)} = \frac{Y_1}{X},$$

де Y_1 – перша гармоніка вихідного сигналу; $\bar{W}(A)$ – амплітудна характеристика нелінійного елементу;

Метод гармонічної лінеаризації є досить плідним при аналізі нелінійних систем, у тому числі і систем регулювання, у тих випадках, коли інерційність системи досить велика, а також для резонансних систем. За допомогою цього методу отримано математичний опис значного числа нелінійних систем [14,15, 16],

із яких особливо належить відмітити вдалу заміну релейної характеристики ланкою запізнення (затримки) [15] та компактний вираз функції для не лінійності редукційного типу [16].

Відомо ряд конструкцій приладів [17, 18, 19] для експериментального визначення $W(A)$.

Задача ідентифікації включає у себе зворотну задачу – визначення нелінійної залежності $y = f(x)$ по експериментально знайденому еквівалентному комплексному коефіцієнту підсилення $W(A)$. Це питання було досліджено у [20] для нелінійних пристроїв із нульовою пам'яттю. Для них

$$W(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(A \sin \psi) - f(-A \sin \psi)] \sin \psi d\psi$$

де ψ – фазовий зсув.

Якщо $y = f(x)$ – непарна функція, то

$$f(A) = -f(-A) = \int_0^{\pi/2} [2A \sin \psi W(A \sin \psi) + A^2 \sin \psi W(A \sin \psi)] d\psi .$$

У загальному випадку

$$f(A) = \int_0^{\pi/2} \left[A \sin \psi W(A \sin \psi) + \frac{A^2}{2} \sin^2 \psi W'(A \sin \psi) + AM'(A \sin \psi) \right] d\psi$$

де

$$M(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(A \sin \psi) d\psi$$

– головне значення $W(A)$.

Більш проста обчислювальна процедура [21] для однозначної нелінійності із нульовою пам'яттю приводить до формули

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3A}{2^{A-1}} \operatorname{Re} W\left(\frac{A}{2^n}\right) \quad (8.5)$$

Ряд (8.5) є швидкозбіжним. Застосування такого методу до ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів обмежено тим, що різним видам нелінійностей може відповідати один і той же еквівалентний комплексний коефіцієнт підсилення.

8.3. Статистична лінеаризація у задачах ідентифікації нелінійних об'єктів

Основна ідея статистичної лінеаризації вперше сформульовані в роботах [22, 23, 24].

Суть методу полягає у заміні нелінійної характеристики лінеаризованою залежністю, статистично еквівалентною початковому перетворенню. При цьому специфіка початкової нелінійної залежності зберігається оскільки параметри лінеаризованого зв'язку залежить від характеристик вхідного сигналу. Як і у методі гармонічної лінеаризації еквівалентний комплексний коефіцієнт підсилення залежить від амплітуди вхідного сигналу.

Представимо випадкові сигнали на вході $x(t)$ та виході $y(t)$ у вигляді суми відповідних математичних сподівань $m_x(t)$ та $m_y(t)$, які повільно змінюються, та центрованих випадкових складових $X^0(t)$, $Y^0(t)$ (рис. 8.3):

$$\begin{aligned} x(t) &= m_x(t) + X^0(t); \\ y(t) &= m_y(t) + Y^0(t). \end{aligned} \quad (8.6)$$

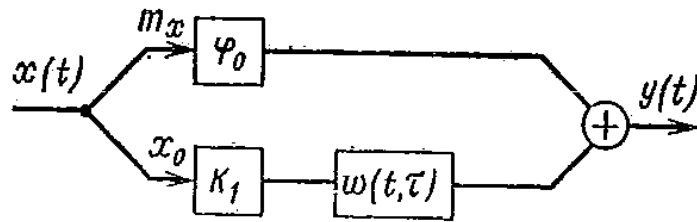


Рис. 8.3.

Найбільш загальною формою статистичної лінеаризації є заміна усіх нелінійних рівнянь системи наближеними лінійними відносно флуктуацій $X^0(t)$, $Y^0(t)$

$$y(t) \approx \varphi_0(t) + \int_{t_0}^t w(t, \tau) [x(\tau) - m_x(\tau)] d\tau. \quad (8.7)$$

де згідно із [5]

$$\varphi_0(t) = K_0 m_x(t); \quad w(t, \tau) = K_1 \delta(t - \tau) \quad (8.8)$$

та

$$K_0 = K_1 = K.$$

При цьому рекомендується визначати K із умови мінімуму середньоквадратичної похибки:

$$M \{ [y - Kx]^2 \} = \min$$

У [29] для визначення K_0 , K_1 використано умови збереження математичного сподівання та дисперсії вихідного сигналу:

$$M \{ K_0 m_x + K_1 (x - m_x) \} = m_y;$$

$$D \{ K_0 m_x + K_1 (x - m_x) \} = D_y$$

або із умови мінімуму середньоквадратичної похибки:

$$M \{ [y - K_0 m_x - K_1 (x - m_x)]^2 \} = \min$$

Усі методи статистичної лінеаризації мають одну спільну ваду, яка полягає у трудності оцінки правомірності такої методики.

8.4. Методи ідентифікації, на основі застосування функціональних степеневих рядів

Для ідентифікації нелінійних об'єктів застосовуються функціональні степеневі ряди у тому числі і ряди Вольтерра.

Розглянемо одномірний нелінійний динамічний об'єкт, заданий оператором:

$$y(t) = F[x(t), t \geq t_0], \quad (8.9)$$

що відповідає нелінійному диференціальному оператору досить загального виду

$$y(t) = f[y'(t), \dots, y^{(s)}(t), x(t), x'(t), \dots, x^{(r)}(t)], \quad (8.10)$$

де f – нелінійна функція, а $r \leq s$ із умови фізичної реалізації системи.

Якщо F представляє собою неперервний оператор, заданий у просторі неперервних функцій $x(t)$, то вираз (8.9) можна представити функціональним рядом Вольтерра:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_i(t, \tau_0, \dots, \tau_i) \prod_{l=0}^i x_l(\tau_l) d\tau_l \quad (8.11)$$

або

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^{\infty} w_0(t, \tau_1) x_0(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_1(t, \tau_1, \tau_2) x_0(\tau_1) x_1(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \dots + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_i(t, \tau_0, \dots, \tau_i) x_0(\tau_0) x_1(\tau_1) \dots x_i(\tau_i) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_i + \end{aligned} \quad (8.12)$$

Ряд (8.11) представляє собою узагальнення степеневого ряду на функціональний простір. Перший член цього ряду представляє інтеграл згортки, а члени більш високого порядку

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_i(t, \tau_0, \dots, \tau_i) x_0(\tau_0) x_1(\tau_1) \dots x_i(\tau_i) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_i$$

враховують динамічні не лінійності вищих порядків. Таким чином, ряд (8.12) узагальнює інтеграл згортки на випадок нелінійного об'єкта. Вираз $w_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$ ($i = 0, 1, \dots$) називають імпульсною перехідною функцією i -го порядку.

Розглянемо приклад. Нехай задано нелінійний безінерційний об'єкт із характеристикою

$$y = f(x),$$

де f – неперервна функція, яку можна представити степеневим рядом

$$y = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Тоді можна записати:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[\int_0^{\infty} \delta(t-\tau) x(\tau) d\tau \right]^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \prod_{k=1}^i \int_0^{\infty} \delta(t-\tau_k) x(\tau_k) d\tau_k = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{k=1}^i x(\tau_k) d\tau_k,$$

де $w_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = a_i \prod_{k=1}^i \delta(t-\tau_k)$.

Розглянемо об'єкт, модель якого представляє собою каскадне з'єднання лінійної інерційної ланки із імпульсною перехідною функцією $w(\tau)$ і нелінійного статичного перетворювача із характеристикою $y = f(z)$, де f – неперервна (рис. 8.4).

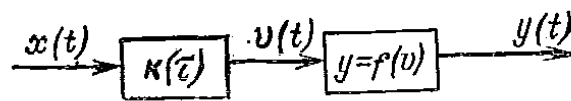


Рис. 8.4.

У цьому випадку

$$z(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

і

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[\int_0^{\infty} w(\tau) x(t-\tau) d\tau \right]^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w(\tau_1) \dots w(\tau_i) \prod_{k=1}^i x(t-\tau_k) d\tau_k =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{k=1}^i x(t-\tau_k) d\tau_k,$$

де $w_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = a_i w(\tau_1) \dots w(\tau_i) = a_i \prod_{k=1}^i w(\tau_k)$.

Розглянемо об'єкт, показаний на рис. 8.1. Для нього справедливо співвідношення

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(t-\tau) z(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w(t-\tau) \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i(\tau) \right] d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} w(t-\tau_1) \delta(t-\tau_2) \cdots \delta(t-\tau_i) \prod_{k=1}^i x(\tau_k) d\tau_k = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} w_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{k=1}^i x(\tau_k) d\tau_k,
\end{aligned}$$

де

$$w_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = a_i w(t-\tau_1) \delta(t-\tau_2) \cdots \delta(t-\tau_i) = a_i w(t-\tau_1) \prod_{k=2}^i \delta(t-\tau_k).$$

Таким чином, задача ідентифікації нелінійного динамічного об'єкта зводиться до визначення імпульсних перехідних функцій вищих порядків.

На практиці приходиться обмежуватись скінченним числом членів ряду Вольтерра. Тому питання про його збіжність має першочергове значення. У тому випадку, коли нелінійний динамічний об'єкт не містить обернених зв'язків, точність представлення його рядом Вольтерра обумовлюється точністю, з якою характеристики нелінійних без інерційних елементів представляються степеневим рядом.

Значно складніше питання точності розв'язується тоді, коли об'єкт містить зворотні зв'язки.

Наведені результати можуть бути узагальнені на багатомірні об'єкти.

Питання для самоперевірки:

1. Два основних методи ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів.
2. В чому суть методу лінеаризації ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів? Структурна схема методу.
3. Гармонічна лінеаризація у задачах ідентифікації. Структурна схема методу.
4. Статистична лінеаризація у задачах ідентифікації нелінійних об'єктів.
5. Методи ідентифікації, основані на застосуванні функціональних степеневих рядів.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления. - М.: Энергоатомиздат, 1987. – 80 с.,
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. -М.: Мир, 1975. - 686 с.
3. Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л. Идентификация систем управления. - М.: Наука, 1974. - 248 с.
4. Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. - М.: Связь, 1976. - 496 с.
5. Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов. - М.: Энергия, 1979. – 240 с.6. Вентцель Е. С. Овчаров Л. А Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.- М.: Высшая школа, 2000.- 384 с.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.- 479 с.
8. Бернштейн И.М., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. –М.: Наука, 2010.-608с.
9. Гроп Д. Методы идентификации систем.– М.: Мир. 1979.- 303с.
10. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя– М.: Наука, 1991.-432 с.
11. Kerr H., Surber W. N. Precision of Impulse-Response Identification based on Short Normal Operating Record.–«IRE Trans. Autom. Contr.», 1961, №2, p.141–142.
12. Браверман Э.М. О восстановлении коэффициентов дифференциальных уравнений.– «Автоматика и телемеханика», 1966, №3, с.17 – 22.
13. Александровский Н.М., Дейч А.М. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов.– «Автоматика и телемеханика», 1968, №1, с. 167–188.
14. Chen K. Quasi Linearization Techniques for Transient Study of Nonlinear Feedback Control Systems. – «Trans. IEE», 1955, p.2, v. 74, p. 962–970.
15. Leland H.R. Cross – Correlation Functions of Nonlinear Systems.– «IRE Trans. Applic. and Ind.», 1960, v. 9, №4, p. 421–422.
16. Krepler K., Werner G. W. Korrelationen mit Amplitudenguantisierung. – MSR, 1964, №4, S.381–383.
17. Вавилов А. А., Солодовников В. В. Прибор для сжатия частотных характеристик. – «Приборостроение», 1960, №6, с.14–18.

18. Захаров К. В., Святодух В. К. Прибор для определения частотных характеристик нелинейных систем.— «Автоматика и телемеханика», 1959, №12, с. 96–98.

19. Choudhury A. K., Bosu M. S., Mahalanabis A. K. Transfer function analyser for linear and nonlinear components. — «Electr. Engng», 1961, v.33, №400, p.1197.

20. Zadeh L. A. On the Identification Problem. — «Trans. IRE», 1965, ser. PGGT, v.3, №4, p. 421–435.

21. Цыпкин Я. З. О связи коэффициента усиления нелинейного элемента с его характеристикой.— «Автоматика и телемеханика», 1965, №5, с. 24–29.

22. Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных автоматических систем.— «Автоматика и телемеханика», 1956, №4, с.41–47.

23. Booton R. C. Nonlinear Control Systems with Random Inputs. — «Trans. IRE», 1954, ser. PGIT, №1, p. 8–10.

24. Booton R. C. The measurement and representation of nonlinear systems.— «Trans. IRE», 1954, PGCT, №4, p. 353–361.

Навчальне видання

Коваль Антон Валерійович

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Навчальний посібник

Відповідальний редактор
Комп'ютерний набір та верстка
Макетування

А.Г. Ткачук
А.В. Коваль
А.В. Коваль

Гарнітура Times New Roman