ЗАТВЕРДЖЕНО
науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 4 вересня 2025 р.
№ 5

ПРАКТИЧНІ РОБОТИ
з навчальної дисципліни

«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»

Частина 2: Дискретні та нелінійні системи

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
освітня програма «Комп'ютеризоване управління енергетичними системами»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки
кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна

Рекомендовано на засіданні
кафедри робототехніки,
електроенергетики та
автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна
25 серпня 2025 р., протокол № 7

Розробник: старший викладач кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна БОГДАНОВСЬКИЙ Мартін

Житомир
2025

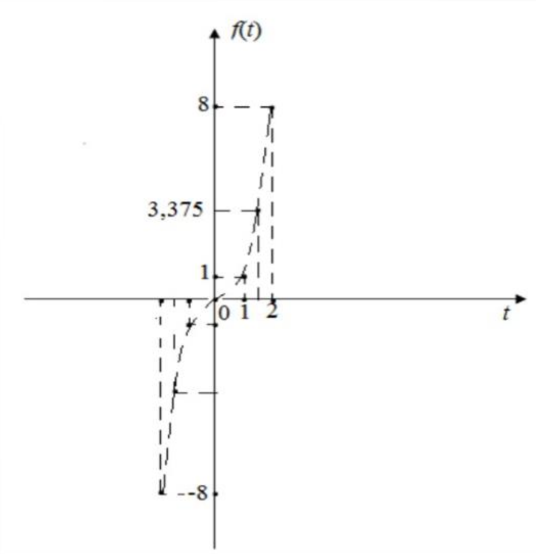
Формування гратчастої функції та кінцевих різниць

Практика №1

Визначення гратчастої функції

Розглянемо функцію f(t), яка визначена в окремих ізольованихних точках (дискретних) t1, t2, ...,tn, ... деякого проміжку T. Слід звертати увагу, що змінна величина t не є безперервною на проміжку T, а приймає на ньому лише окремі ізольовані значення.

Наприклад, функція $f(t) = t^3$,де змінна величина t приймає на проміжку [-2; 2] значення: t = - 2; - 1,5; - 1; 0; 1; 1,5; 2.



Визначення гратчастої функції

Функції f(tn), у яких аргумент tn є цілим числом, tn $\in$ Z, цілі варто позначити через f(n). Такі функції називаються гратчастими функціями.

Задача 1. Побудувати градчасті функції для наступних виразів:

а) $f(n) = C = \text{const}, n \in Z;$
б) $f(n) = 2^n, n \in Z;$
с) $f(n) = \ln n, n \in \mathrm{N}.$

Кінцеві різниці гратчастих функцій

Нехай дана ґратчаста функція f(n), n = 0, 1, 2, ... Функція

$\Delta f(n) = f(n + 1) – f(n)$ називається кінцевою різницею першого порядку

Відповідно різниці вищих порядків визначаться як:

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \\ - \ldots + (-1)^i C_k^i f(n+k-i) + \ldots + (-1)^k f(n),$$

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

Кінцеві різниці гратчастих функцій

Приклад обчислення різниці $\Delta^k f(n)$, n = 1, 2, ... якщо $f(n) = e^{2n}$

$$\Delta f(n) = e^{2(n+1)} - e^{2n} = e^{2n}(e^2 - 1);$$
$$\Delta^2 f(n) = e^{2(n+1)}(e^2 - 1) - e^{2n}(e^2 - 1) = (e^2 - 1)\cdot e^{2n}\cdot(e^2 - 1) = e^{2n}\cdot(e^2 - 1)^2$$

У випадку ступеневої функцій формується рекурсія:

$$\Delta^k f(n) = e^{2n}(e^2 - 1)^k,\ k = 1, 2, \ldots$$

Кінцеві різниці гратчастих функцій

Задача 2. Обчислити різниці $\Delta^3 f(n)$, n = 1, 2, ... якщо:

$f1(n) = 2n^2+2$
$f2(n) = 5n^2+2n$
$f3(n) = 1/(n-6)$

Дякую за увагу

Розв’язання однорідних різнецевих рівнянь (дійсні корені)

Практика №2

Поняття різнецнвого рівняння

Різницевим рівнянням k-го порядку називають будь-яке співвідношення, пов'язуюче невідому гратчасту функцію f(n) та її різниці до порядку k включно.

Різницеве рівняння k-го порядку записують у вигляді:

F(n,f(n),Δf(n),Δ2f(n), ..., Δkf(n)) = 0

Або виражаючи кінцеві різниці:
F(n, f(n), f(n+1), f(n+2), ..., f(n+k)) = 0.

Лінійне різнецеве рівняння

Лінійне різницеве рівняння k-го порядку з постійними коефіцієнтами має вигляд

$C0\Delta^{k}x(n) + C1\Delta^{k-1}x(n) + \ldots + Ckx(n) = \varphi(n)$,

де Ci = const (дійсні), i = 0, 1, ..., k; C0 ≠ 0, x(n) – невідома гратчаста функція.

Або

a0x(n + k) + a1x(n + k – 1) + ... + akx(n) = φ(n)

Якщо φ(n)=0 — рівняння називається однорідним

Загальний розв'язок

Загальний розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння k-го порядку з постійними коефіцієнтами має вигляд

$x^0(n) = C1x1(n) + C2x2(n) + ... + Ckxk(n)$, де C1, C2 ..., Ck — const.

Лінійно незалежні часні рішення цього рівняння шукабть в вигляді $x(n) = \lambda^n$,де $\lambda \neq 0$

$A0\lambda^k + a1\lambda^{k-1} + ... + ak\text{-}1\lambda + ak = 0$

При цьому виникають 3 випадки розв'язання

Випадок дійсних додатних коренів

Випадок дійсних додатних коренів λ

$$x_1(n) = \lambda_1^n, x_2(n) = \lambda_2^n, \ldots, x_k(n) = \lambda_k^n$$

Тоді рішення сформується як:

$$x^0(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$$

Наприклад:

$x(n + 2) – 5x(n + 1) + 6x(n) = 0.$

$\lambda 2– 5\lambda +6 = 0$ має корені $\lambda 1 = 2$ та $\lambda 2 = 3$.

Отже, загальний розв'язок $x^0(n) = C1\cdot 2^n + C2\cdot 3^n$,де C1, C2 - const.

Задача 1

Задача 1:

Розв’язати наступні різнецеві рівняння

x(n+1)+3x(n)=0
x(n+2)+4x(n+1)-5x(n)=0
2x(n+2)+14x(n+1)+24x(n)=0

Розв’язання однорідних різнецевих рівнянь (комплексні та кратні корені)

Практика №3

Рівняння з комплексно-спряженими коренями

Якщо серед різних коренів характеристичного рівняння є комплексно-спряжені корені виду $\lambda = \alpha \pm \beta i$.
То фрагмент рішення для даного кореня знаходиться як:

$x1(n) = r^n \cos(n\varphi)$; $x2(n) = r^n \sin(n\varphi)$

Наприклад, для $x(n + 3) - 4x(n + 2) + 6x(n + 1) - 4x(n) = 0$.
$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda 2 - 2\lambda + 2) = 0$

Отже розв'язок складається з випадку дійсного та пари комплексно спряжених коренів:

$$\lambda = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right) \qquad x_2(n) = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{3\pi n}{4} \text{ и } x_3(n) = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{3\pi n}{4}$$

Розв'язання різнецевих рівнянь

Таким чином загальний розв'язок з урахуванням дійсного кореня буде наступний:

$$x^0(n) = C_1 2^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(C_2 \cos\frac{3\pi n}{4} + C_3 \sin\frac{3\pi n}{4}\right),\ n = 0, 1, \ldots.$$

Задача 1:

x(n+2)+7x(n+1)-5x(n)=0
x(n+2)+4x(n+1)-3x(n)=0
3x(n+2)+11x(n+1)+40x(n)=0

Випадок кратного кореня

Якщо присутній λ – кратний корінь, тоді йому відповідатиме лінійно незалежні рішення:

$$x_1(n) = \lambda^n,\ x_2(n) = \lambda^n n,\ x_3(n) = \lambda^n n^2,\ \ldots,\ x_m(n) = \lambda^n n^{m-1}$$

Наприклад, для x(n + 3) - 3x(n + 2) + 3x(n + 1) + x(n) = 0
$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$

Отже розв’язок визначений випадком наявного кратного кореня:

$$x^0(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)(-1)^n$$

Розв’язання різнецевих рівнянь

Якщо присутній λ – кратний корінь, тоді йому відповідатиме лінійно незалежні рішення:

$$x_1(n) = \lambda^n,\ x_2(n) = \lambda^n n,\ x_3(n) = \lambda^n n^2,\ \ldots,\ x_m(n) = \lambda^n n^{m-1}$$

Наприклад, для x(n + 3) - 3x(n + 2) + 3x(n + 1) + x(n) = 0
$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$

Отже розв’язок визначений випадком наявного кратного кореня:

$$x^0(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)(-1)^n$$

Задача2:

x(n+2)-4x(n+1)+4x(n)=0
9x(n+2)+6x(n+1)+x(n)=0

Пошук оригіналів та зображень дискретних систем

Практика №5

Дискретне перетворення Лапласа

Ряд Лорана

Зображення
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}$$

$$|z| \geq R_1 > R$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f(n)|}$$

Оригінал
$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) \cdot z^{n-1} dz, \; n = 0, 1, \ldots,$$

Приклад застосування

Задано $f(n) = 1(n) = 1$ ➡ $Z\{1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$ $\quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \quad |z| > 1$

Задано $f(n) = a^n e^{\alpha n}$ ➡ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{\alpha n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{\alpha}}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{ae^{\alpha}}{z}} = \frac{z}{z - ae^{\alpha}}$

$|z| > |ae^{\alpha}| > |a|e^{\alpha}$

Задано $f(n) = \frac{a^n}{n!}$ ➡

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ $\quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^n}{n!} = e^{\frac{\alpha}{z}}$ $\quad |z| > |a|$

Знаходження оригіналу

Ствердження:
1) точки, у яких порушується аналітичність функції F(z), називаються особливими точками;
2) особливі точки, для кожної з яких існує така її околиця, у якій немає інших особливих точок функції F(z), називаються ізольованими особливими точками;
3) ізольована особлива точка z0 (z0 – комплексне число), функції F(z) називається полюсом, якщо lim F(z) при z->z0 = ∞
4) якщо F(z) = P(z)/Q(z) , де P(z) і Q(z) – багаточлени, то особливими точками є нулі знаменника, тобто корені багаточлена Q(z). Простому (не кратному) кореню відповідає простий полюс, кратному - кратний полюс.

Знаходження оригіналу

Перший спосіб

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_i} s(F(z)\cdot z^{n-1}) \qquad |z| = R_1$$

zi — прості полюси

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} s(F(z)\cdot z^{n-1}) = \lim_{z\to z_i}[(z-z_i)F(z)z^{n-1}]$$

z0 — полюси кратності m

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} s(F(z)\cdot z^{n-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m F(z)\cdot z^{n-1}].$$

Приклад застосування

Знайти оригінал

$$F(z) = \frac{z+2}{(z-2)(z+3)(z-1)}$$

Прості полюса

$$z_1 = -3,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2$$

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=z_1} s(F(z)\cdot z^{n-1}) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} s(F(z)\cdot z^{n-1}) + \operatorname*{Res}_{z=z_3} s(F(z)\cdot z^{n-1}) =$$

$$= \lim_{z\to -3}[(z+3)F(z)\cdot z^{n-1}] + \lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)\cdot z^{n-1}] + \lim_{z\to 2}[(z-2)F(z)\cdot z^{n-1}] =$$

$$= \lim_{z\to -3}\frac{z+2}{(z-2)(z-1)}\cdot z^{n-1} + \lim_{z\to 1}\frac{z+2}{(z-2)(z+3)}\cdot z^{n-1} + \lim_{z\to 2}\frac{z+2}{(z+3)(z-1)}\cdot z^{n-1} \doteqdot$$

$$\doteqdot -\frac{1}{20}\cdot(-3)^{n-1} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5}\cdot 2^n \quad\Rightarrow\quad f(n) = -\frac{1}{20}\cdot(-3)^{n-1} + \frac{2}{5}\cdot 2^n - \frac{3}{4}$$

Приклад застосування

Знайти оригінал $F(z) = \dfrac{z+3}{(z-2)^3}$

Кратний полюс m=3

$z = 2$

$$f(n) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z+3}{(z-2)^3}z^{n-1}\right]'' = \frac{1}{2}\left[(z+3)\cdot z^{n-1}\right]''_{z=2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[n\cdot z^{n-1} + 3(n-1)z^{n-2}\right]'_{z=2} = \frac{1}{2}\left[n(n-1)z^{n-2} + 3(n-1)(n-2)z^{n-3}\right]_{z=2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^{n-2} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2^{n-3} = (5n^2 - 11n + 6)\cdot 2^{n-4}.$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = 5(n-1)\left(n - \frac{5}{6}\right)\cdot 2^{n-4}$$

Знаходження оригіналу

Другий спосіб (прості полюси)

$$\frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} \qquad z_1 = -2,\ z_2 = -1$$

Метод невідомих коефіцієнтів

$A = -2, B = 3.$ $\qquad F(z) = -2\cdot\dfrac{1}{z+1} + 3\cdot\dfrac{1}{z+2}$

За таблицею перетворень Лапласа

$$a^n \risingdotseq \frac{z}{z-a}$$

$$a^{n-1} \risingdotseq \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}$$

$$\Downarrow$$

$$F(z) = -2\cdot\frac{1}{z+1} + 3\cdot\frac{1}{z+2} \risingdotseq -2\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot(-2)^{n-1}.$$

Третій спосіб (прості полюси) $f(n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}z_i^{\,n-1}$

$$F(z)=\frac{z+2}{z^3-7z+6}\qquad P(z)=z+2,\ \ Q(z)=z^3-7z+6=(z+3)(z-1)(z-2)$$

$$Q'(z)=3z^2-7$$

$$f(n)=\left.\frac{z+2}{3z^2-7}\right|_{z=-3}\cdot(-3)^{n-1}+\left.\frac{z+2}{3z^2-7}\right|_{z=1}\cdot 1^{n-1}+\left.\frac{z+2}{3z^2-7}\right|_{z=2}\cdot 2^{n-1}=$$
$$=-\frac{1}{20}(-3)^{n-1}-\frac{3}{4}\cdot 1^{n-1}+\frac{4}{5}\cdot 2^{n-1}=-\frac{1}{20}(-3)^{n-1}+\frac{4}{5}\cdot 2^{n-1}-\frac{3}{4}.$$

Завдання для самоконтролю

Знайти оригінал

- F(z) = z/(z-1)(z+4)
- F(z) = (z+1)/(z^2-z-2)
- F(z) = (z-3)/(z^3+2z^2-13z+10)

Знайти зображення

- f(n) = 4
- f(n) = n-2

Дякую за увагу

Побудова логарифмічних частотних характеристик дискретних САК та аналіз стійкості

Практика №6

Побудова логарифмічних амплітудно-частотних характеристик ЛАЧХ

ЛАЧХ будуються окремо в області нижніх частот (**НЧ**) та верхніх частот (**ВЧ**). Межою, що розділяє частотні області є частота зрізу **ωзр** за умови:

ωзр* Т< 2 де **Т** — період квантування.

Цю умову необхідно виконати для забезпечення правильної оцінки запасів стійкості та точності роботи системи, що узгоджується з теоремою Котельникова-Шеннона.

Неперервна частина системи

Нізькочастотна неперервна частина (**НЧ**) системи може бути представлена передатною функцією наступним чином

$$W_{нч}(s)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}\left(T_{j}s+1\right)}{s^{\upsilon}\prod_{i=1}^{n}\left(T_{i}s+1\right)}$$

Умови побудови псевдо ЛАЧХ

1. Величина, зворотня періоду квантування **T**, більше половини частоти зрізу **$\omega_{зр}$:** **$\omega_{ср} < 2/T$**.
2. На частоті зрізу **ЛАЧХ** непрерывної частини нахил −20 дБ/дек.
3. Сталим часу **T_j** ($j = 1, 2, ..., m$) відповідають частоти спряження менші ніж частота зрізу **$\omega_{cj} < \omega_{зр}$.**
4. Присутні l ($l < n$) сталі часу **T_i** ($i = 1, 2,..., l$), якім відповідають частоти спряження менші, ніж частота зрізу **$\omega_{ci} < \omega_{зр}$.**

Розділення передатної функції неперервної частини

Область нижніх частот:

$$Wнч_H(s) = \frac{k\prod_{j=1}^{m}(T_j s + 1)}{s^{\upsilon}\prod_{i=1}^{l}(T_i s + 1)}$$

Область верхніх частот

$$Wнч_B(s) = \frac{\omega_{cp}}{s\prod_{i=l+1}^{n}(T_i s + 1)}$$

Перехід до псевдочастоти

Область нижніх частот:

$$\lambda = \tfrac{2}{T} tg \frac{\omega T}{2}$$

$$W^{н}(j\lambda) = (1 - {j\lambda T}/{2})\frac{k\prod_{j=1}^{m}(1 + j\lambda T_j)}{(j\lambda)^r \prod_{i=1}^{l}(1 + j\lambda T_i)}$$

Область верхніх частот

$$W^{в}(j\lambda) = (1 - {j\lambda T}/{2})\frac{\omega_{cp}(1 + j\lambda({T}/{2} - T_{\Sigma}))}{(j\lambda)(1 + {j\lambda T}/{2})}$$

$$T_{\Sigma} = \sum_{i=l+1}^{n} T_i \cdot$$

Приклад побудови логарифмічної псевдо-частотної характеристики

$$K_{НЧ}(s) = \frac{K(1+25s)}{s^2(1+0{,}5s)(1+0{,}3s)},\ K = 0{,}01\ c^{-1}\quad T = 4\ c$$

Частота зрізу $\omega_c < 2/T = 0{,}5\ c^{-1}$

$\omega_{сопр1} = 1/25 = 0{,}04\ c^{-1}$

$\omega_{сопр2} = 1/0{,}5 = 2\ c^{-1}$ $\quad\omega_{сопр3} = 1/0{,}3 = 3{,}33\ c^{-1}$

НЧ

ВЧ

$$K(j\omega_w) = \frac{K(1 + j\omega_w \cdot 25)(1 + j\omega_w \cdot 1{,}2)}{(j\omega_w)^2}\frac{(1 - j\omega_w \cdot 2)}{(1 + j\omega_w \cdot 2)}$$

$$T_{\Sigma} = T_1 + T_2 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$$

$$\frac{T}{2} - T_{\Sigma} = 2 - 0{,}8 = 1{,}2\ c$$

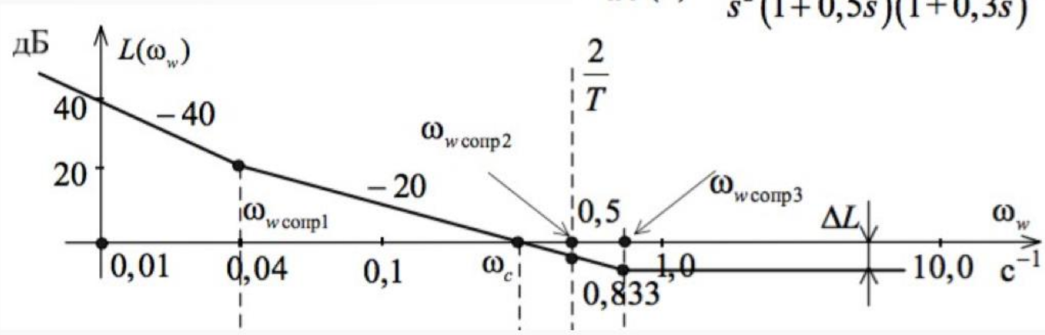
$$\varphi(\omega_w) = -2 \cdot 90^{\circ} + \mathrm{arctg}\,25\omega_w + \mathrm{arctg}\,1{,}2\omega_w - 2\,\mathrm{arctg}\,2\omega_w$$

Приклад побудови логарифмічної псевдо-частотної характеристики

НЧ $\omega_{w\text{сопр}1} = \omega_{\text{сопр}1} = 1/25 = 0{,}04\ \text{c}^{-1}$

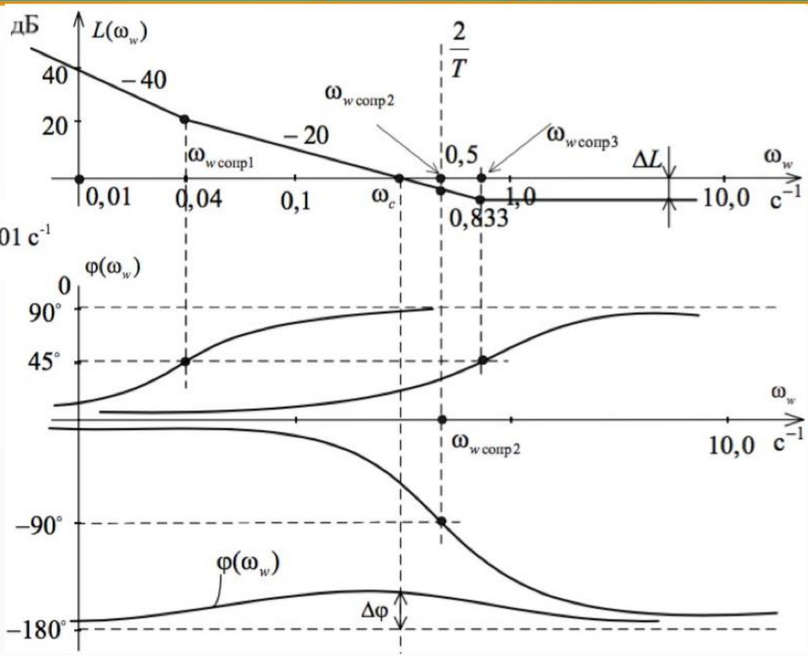
ВЧ $\omega_{w\text{сопр}2} = \dfrac{1}{\text{T}/2} = 1/2 = 0{,}5\ \text{c}^{-1}$ $\omega_{w\text{сопр}3} = 1/\left(\dfrac{T}{2} - T_{\Sigma}\right) = 1/(2-0{,}8) = 0{,}833\ \text{c}^{-1}$

$$K_{НЧ}(s) = \frac{K(1+25s)}{s^2(1+0{,}5s)(1+0{,}3s)},\ K = 0{,}01\ \text{c}^{-1}$$



Приклад побудови логарифмічної псевдо-частотної характеристики

$$K_{НЧ}(s) = \frac{K(1+25s)}{s^2(1+0{,}5s)(1+0{,}3s)},\ K = 0{,}01\ \text{c}^{-1}$$

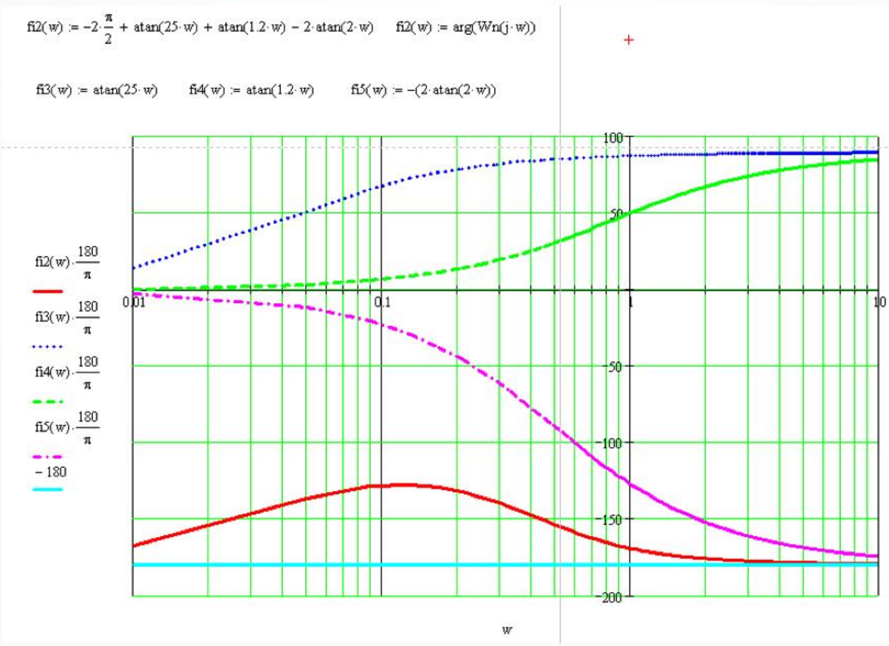


Запас за амплітудою 10 дБ

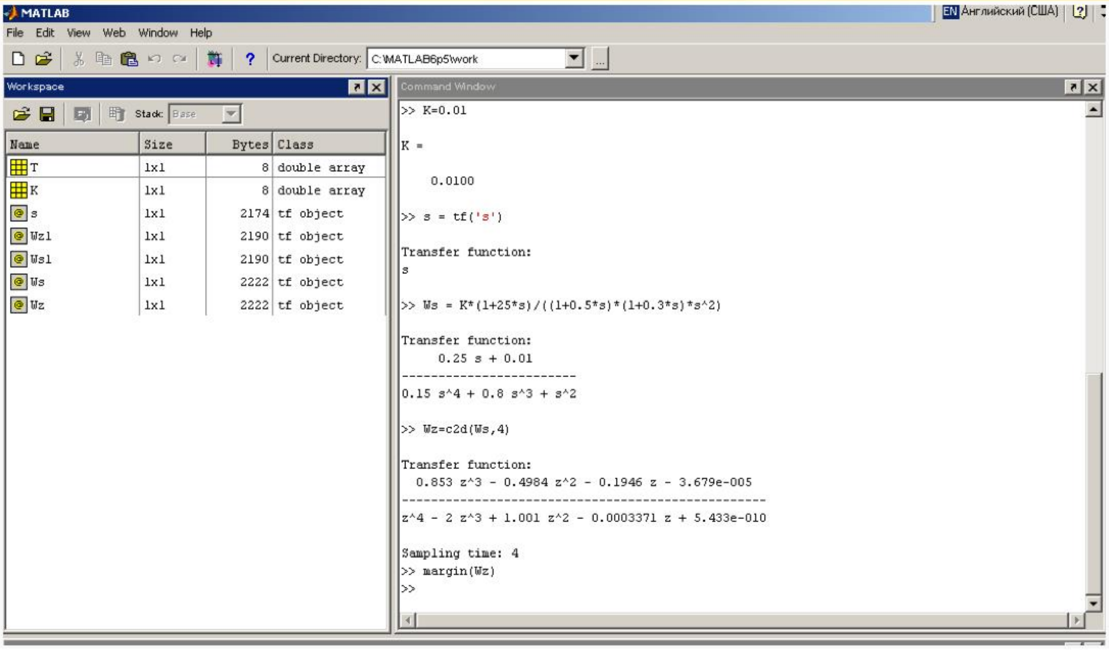
Запас за фазою 25 градусів

Побудова ЛАЧХ в середовищі MathCAD

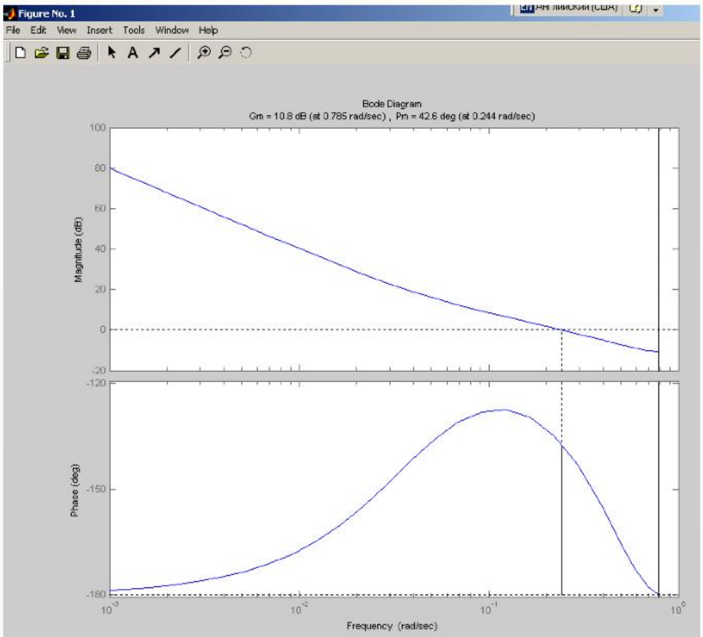
Побудова ЛФЧХ в середовищі MathCAD



Побудова ЛЧХ в середовищі MATLAB



Побудова ЛЧХ в середовищі MATLAB



Самостійна робота

Побудувати логарифмічні частотні характеристики для наступних систем:

W(s)=0.1(0.1s+1)/((0.5s+1)*(s+1))   при T=2

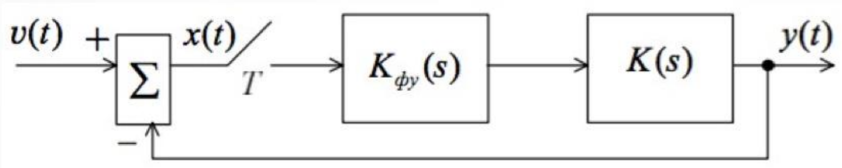
W(s)=2/(0.2s+1)*(0.05s+1))   при T=0,4

Дякую за увагу

Визначення точності та синтез ДСАК

Практика 7

Визначення усталеної похибки при східчастому вхідному сигналі



$$K(s)=\frac{K}{s+1}$$

$$K(z)=Z\left\{K_{фу}(s)K(s)\right\}=Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{K}{s+1}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{K}{s(s+1)}\right\}$$

Розкладаємо на елементарні дроби

$$\frac{K}{s(s+1)}=\frac{\beta_1}{s}+\frac{\beta_2}{s+1};\quad \beta_1=\frac{sK}{s(s+1)}\bigg|_{s=0}=K;\quad \beta_2=\frac{K(s+1)}{s(s+1)}\bigg|_{s=-1}=-K\,.$$

Визначення усталеної похибки при східчастому вхідному сигналі

$$Z\left\{\frac{K}{s}-\frac{K}{s+1}\right\}=K\frac{z}{z-1}-K\frac{z}{z-e^{-T}}=K\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right).$$

$$K(z)=\frac{z-1}{z}K\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right)=K\left(1-\frac{z-1}{z-e^{-T}}\right)=K\frac{1-e^{-T}}{z-e^{T}}.$$

Похибка за положенням

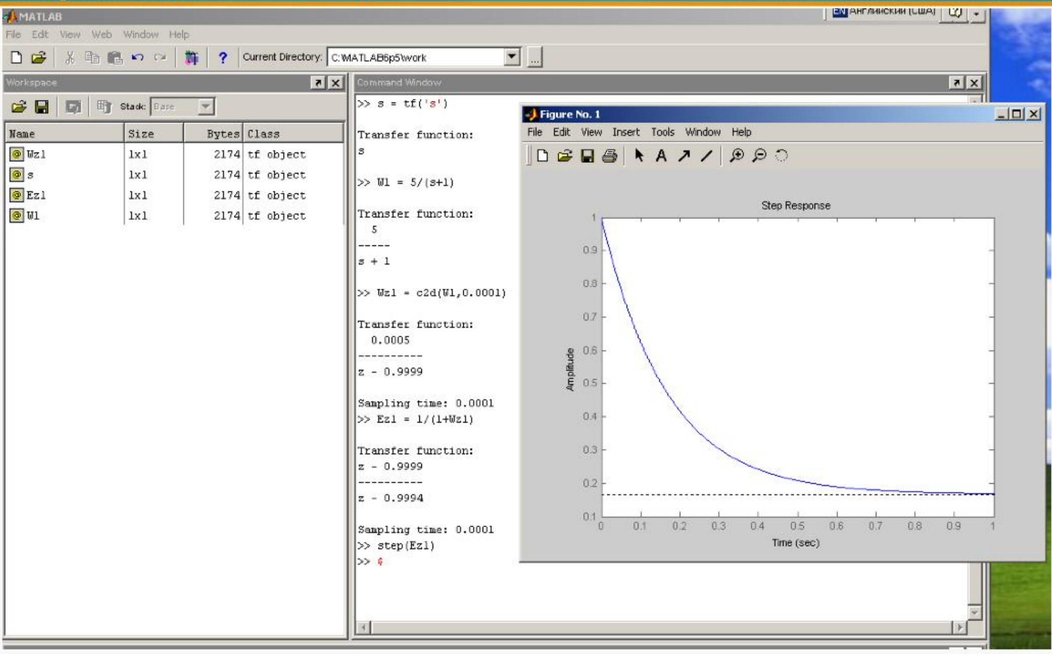
$$x^{0}_{уст}(kT)=\frac{V}{1+K_0} \qquad K_0=\lim_{z\to 1}K(z)=\frac{1}{1+K}.$$

Визначення усталеної похибки при східчастому вхідному сигналі

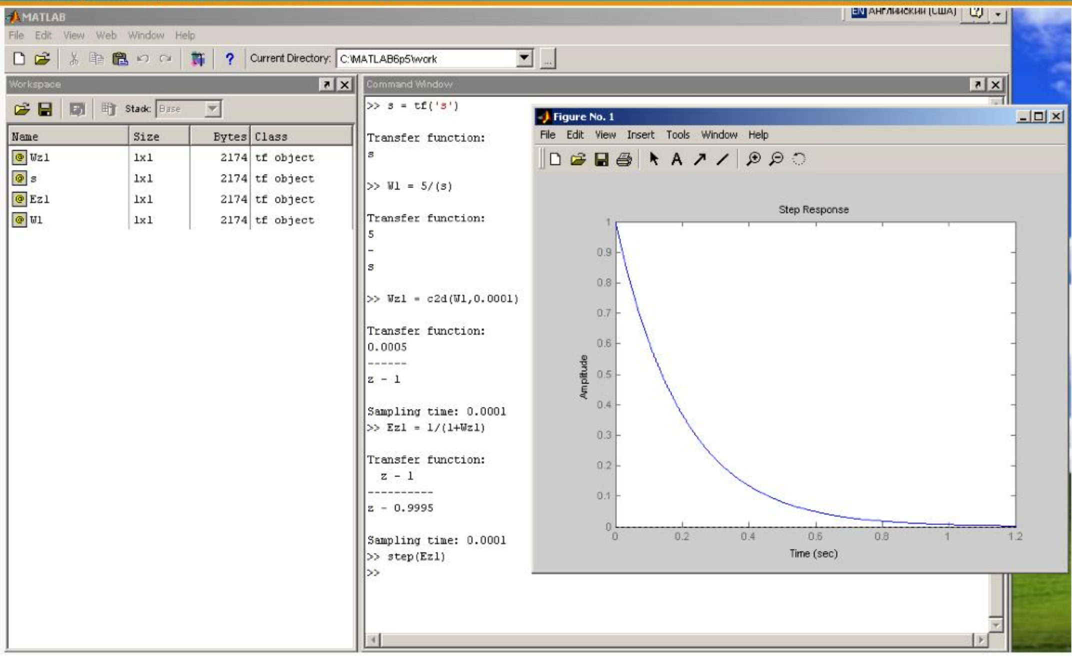
Випадок астатичної системи $K(s)=\dfrac{K}{s}$

$$K(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{K}{s^2}\right\}=\frac{z-1}{z}\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{T}{z-1},\; x^{0}_{уст}(kT)=\frac{V}{1+K_0}=\frac{1}{1+\infty}=0.$$

Розрахунок усталеної похибки у середовищі MATLAB

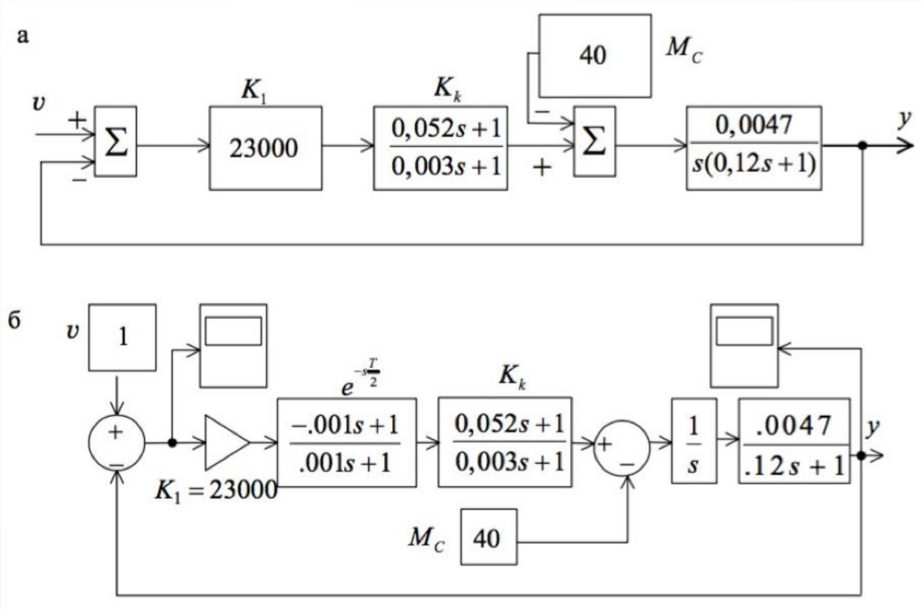


Розрахунок усталеної похибки у середовищі MATLAB



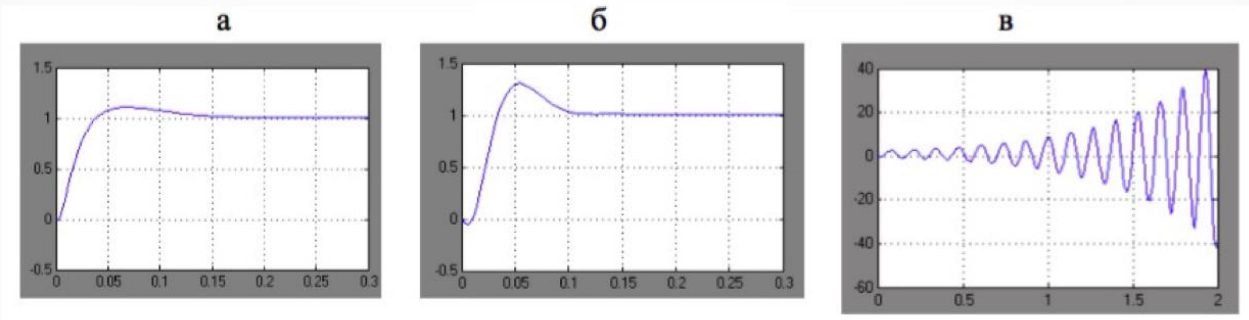
Корекція та аналіз системи в MATLAB

$$K_{ИЭ}(s)=e^{-s\frac{T}{2}}=\frac{1-s\frac{T}{2}}{1+s\frac{T}{2}}$$



Аналіз параметрів системи при виконанні корекції
а) Структура системи
б) Результат моделювання в MATLAB/Simulink

Корекція та аналіз системи в MATLAB



$$T=\frac{\pi}{10\omega_{max}}$$

$$\omega_{max}\approx 2\omega_c$$

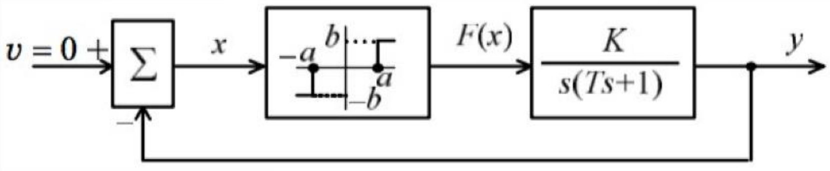
а) Tk = 0.002 б) Tk = 0.01 в) Tk = 0.03

Дякую за увагу

Аналіз нелінійної САК методом фазової площини

Практика №8

Метод побудови на окремих ділянках



$$T\ddot{x}+\dot{x}+F(x)K=0$$

$$x=-y;\quad \dot{x}=-\dot{y}$$

$$T\frac{d\dot{y}}{dt}+\dot{y}=KF(x) \qquad T\frac{d\dot{y}}{dt}+\dot{y}=K\begin{cases} b, & x>a,\ y<a, \\ 0, & |x|<a,\ |y|<a, \\ -b, & x<-a,\ y>a. \end{cases}$$

Ділянка дії зони нечутливості

$$T\frac{d\dot{y}}{dt}+\dot{y}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad dt=\frac{dy}{\dot{y}}$$

$$T\frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y}=-\dot{y} \qquad d\dot{y}=-\frac{1}{T}dy$$

$$\dot{y}=-\frac{1}{T}y+C_0$$

Ліва (права симетрично) ділянка від зони нечутливості

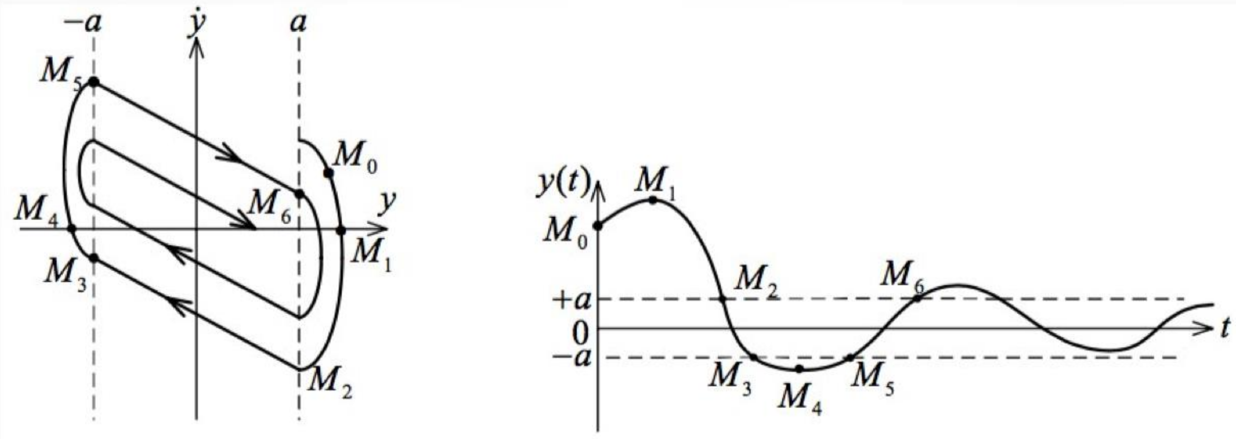
$$F(x) = -Kb \quad (x < -a;\ y > a)$$

$$T\frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = -Kb. \;\Rightarrow\; dt = \frac{dy}{\dot{y}} \;\Rightarrow\; T\frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y} = -\dot{y} - Kb$$

$$\Rightarrow\; dy = -T\frac{d\dot{y}\dot{y}}{\dot{y} + Kb} \;\Rightarrow\; \int dy = -T\int\frac{d\dot{y}(\dot{y} + Kb - Kb)}{\dot{y} + Kb} + C_1$$

$$\Rightarrow\; y = T\left[\int -d\dot{y} + \int\frac{Kb}{\dot{y} + Kb}d\dot{y}\right] + C_1 \;\Rightarrow\; y = T\left[Kb\ln\left(\dot{y} + Kb\right) - \dot{y}\right] + C_1$$

Фазова траєкторія



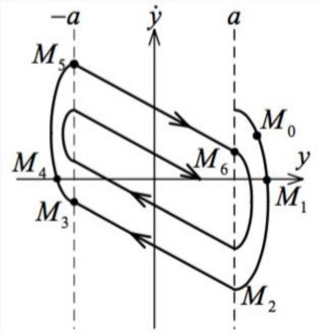
Сімейство фазових траєкторій, отриманих за різних початкових умов формує фазовий портрет, що характеризує один трьох граничних циклів та систему відповідно

Метод ізоклін

Ділянка 1 $|y| < a$

$$F(x) = 0 \quad T\frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = 0; \quad dt = \frac{dy}{\dot{y}}; \quad T\frac{d\dot{y}\dot{y}}{dy} + \dot{y} = 0$$

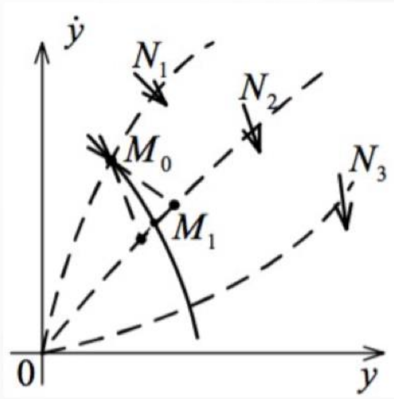
Ізокліна $\dfrac{d\dot{y}}{dy} = -\dfrac{1}{T} = N \ (\text{tg}\alpha = N)$



Визначення ізокліни

$$N_i = \frac{f_1(y_i, \dot{y}_i)}{f_2(y_i, \dot{y}_i)}$$

$$\dot{y}_i = f(N_i, y_i)$$

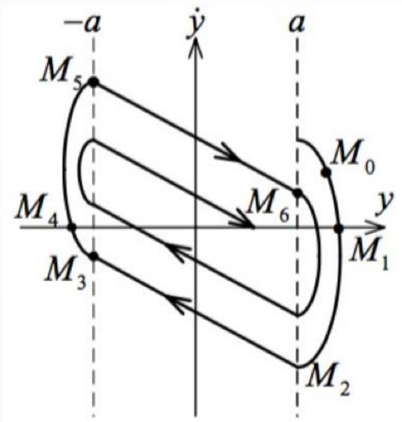


Метод ізоклін

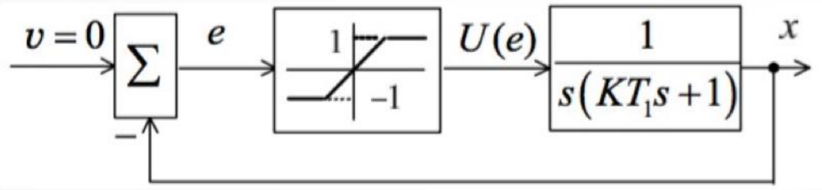
Ділянка 2

$$F(x) = -Kb \quad \frac{d\dot{y}}{dy} = -\frac{Kb + \dot{y}}{T\dot{y}} = N$$

$$\dot{y} = -\frac{Kb}{1 + NT}$$



Метод ізоклін для системи НЕ типу "насичення"



$$\frac{dx}{d\tau}=\dot{x} \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

Ділянка1 $$T_1K\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{dx}{d\tau}+x=0, \quad -1<x<1 \qquad T_1K\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}+\dot{x}+x=0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx}=N_i \qquad T_1KN_i\dot{x}+\dot{x}+x=0$$

Рівняння для ізоклін

$$\dot{x}=-\frac{x}{1+KT_1N_i}$$

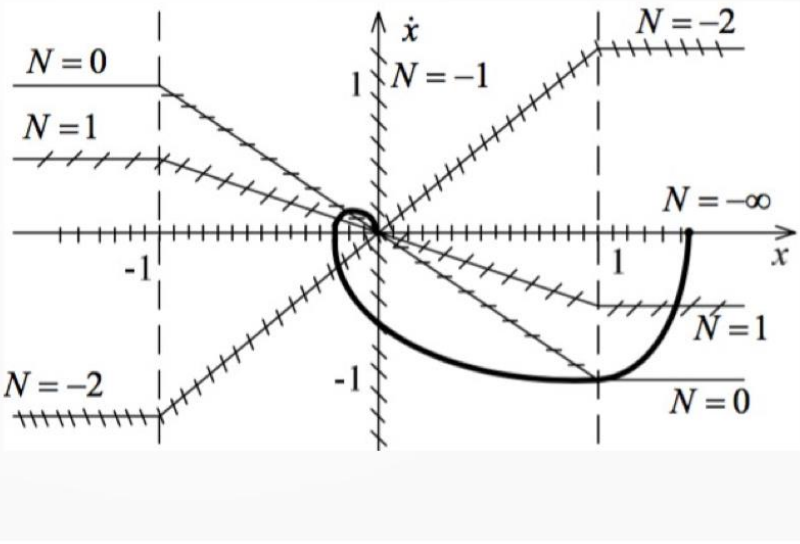
Метод ізоклін для системи НЕ типу "насичення"

Приймемо $KT_1=1$

Ділянка 2
"насичення"

$$\dot{x}=-\frac{1}{1+KT_1N_i}, \quad x\geq 1$$

$$\dot{x}=\frac{1}{1+KT_1N_i}, \quad x\leq -1$$



Дякую за увагу