

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 4 вересня 2025 р.
№ 5

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ з навчальної дисципліни

«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»

Частина 2: Дискретні та нелінійні системи

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
освітня програма «Комп'ютеризоване управління енергетичними системами»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки
кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна

Рекомендовано на засіданні
кафедри робототехніки,
електроенергетики та
автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна
25 серпня 2025 р., протокол № 7

Розробник: старший викладач кафедри робототехніки, електроенергетики та
автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна БОГДАНОВСЬКИЙ Мартін

Житомир
2025

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 2

**Державний університет
“Житомирська політехніка”**
Кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації
імені проф. Б.Б. Самотокіна

Теорія автоматичного керування

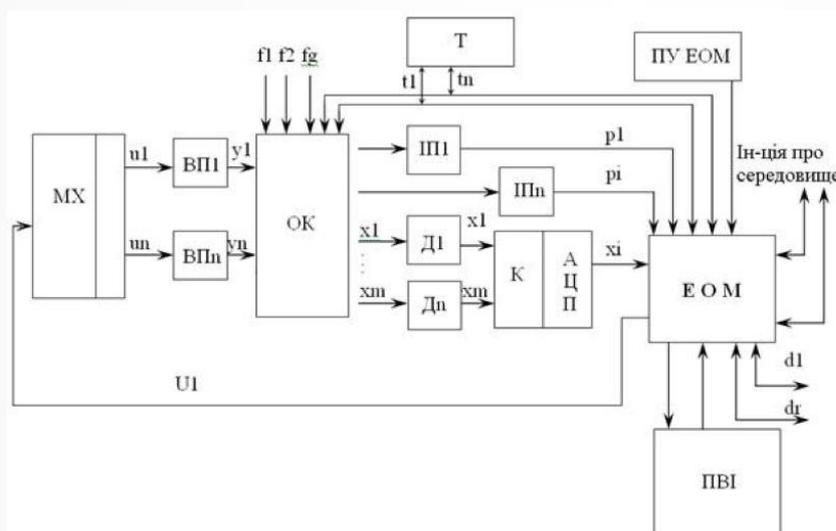
Конспект лекцій
Ч2. Дискретні та нелінійні системи

Богдановський М.В.

Дискретні системи автоматичного управління

Лекція №1

Узагальнена схема цифрової АСУ



МХ – мультиплексор;
 ОК – об'єкт керування;
 Д1, Дn – датчики;
 Хі, Хп – канали вимірювання;
 ВП – виконавчий пристрій;
 ІП – індикатори повідомлень;
 u1, un – сигнал керування;
 Т – таймер;
 ПУ ЕОМ – пульт управління електронно-обчислювальної машини;
 ПВІ – пристрій відображення інформації.

Загальні відомості про дискретні системи

Дискретні АСУ - системи, до складу яких, крім типових динамічних ланок, входять одна або кілька ланок, що виконують квантування неперервного сигналу.

Дискретні АСУ поділяються на:

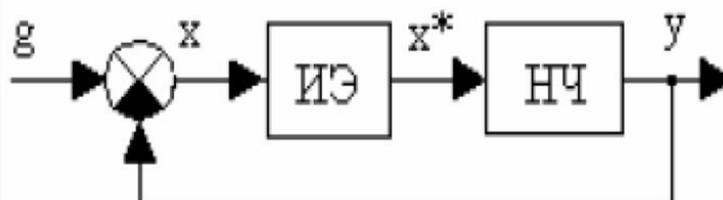
**імпульсні,
релейні
цифрові.**

Квантування сигналу здійснюється в імпульсних АСУ – **за часом**, у релейних – **за рівнем**, у цифрових – **за часом і за рівнем**.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 4

Структура та класифікація імпульсних систем

Квантовані за часом значення за допомогою імпульсної модуляції перетворюються на послідовність імпульсів, які впливають на неперервну частину системи. Процес квантування та імпульсна модуляція здійснюється імпульсним елементом. **Імпульсна АСУ складається з імпульсного елемента (ІЕ) та неперервної частини (НЧ)**, складеної з типових динамічних ланок.

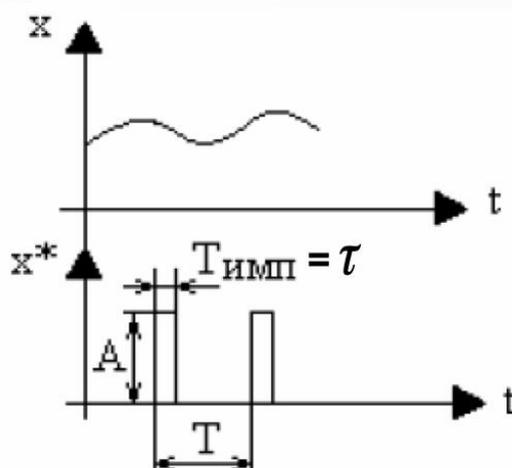


Параметри імпульсної модуляції

Процес імпульсної модуляції полягає у зміні за заданим тимчасовим законом будь-якого параметра імпульсів, що періодично повторюються:

- 1) **Амплітуди** імпульсу A ;
- 2) **Тривалості** або ширини імпульсу $T_{\text{імп}} = \tau$;
- 3) **Період повторення** (дискретності) або періоду квантування імпульсів T ;
- 4) **Скважність імпульсів**

$$\gamma = T_{\text{імп}} / T = \frac{\tau}{T} .$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 5

Види імпульсної модуляції

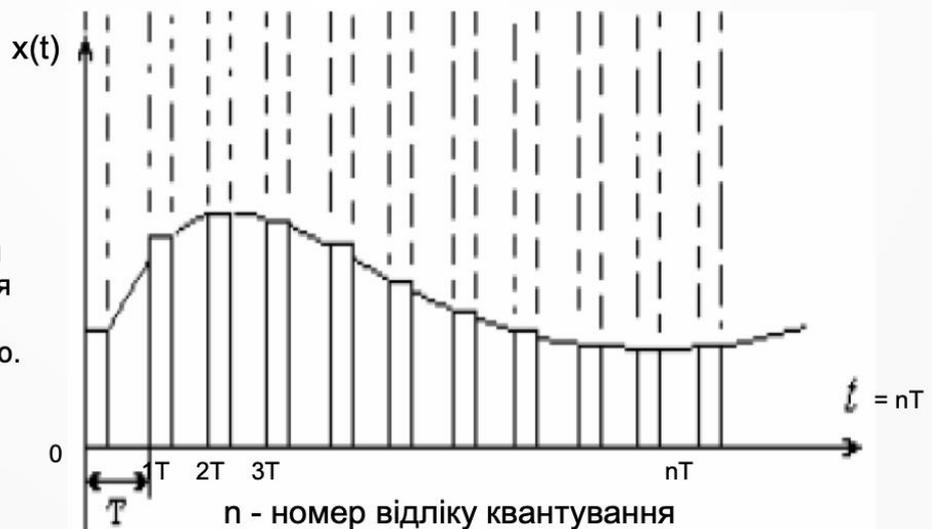
- 1) **амплітудно-імпульсна модуляція - АІМ** (амплітуда імпульсу пропорційна вхідному сигналу: $A = f(x)$ при $T = \text{const}$, $T_{\text{імп}} = \text{const}$);
- 2) **широтно-імпульсна модуляція - ШІМ** (тривалість імпульсу пропорційна вхідному сигналу: $T_{\text{імп}} = f(x)$ при $A = \text{const}$, $T = \text{const}$);
- 3) **часова імпульсна модуляція - ЧАІМ**, включає в себе:
 - фазо-імпульсну модуляцію - ФІМ** (фаза, тобто часове зрушення імпульсу відносно початку періоду слідування імпульсів T , пропорційна вхідному сигналу: $\phi = f(x)$ при $A = \text{const}$, $T = \text{const}$, $T_{\text{імп}} = \text{const}$);
 - частотно-імпульсну модуляцію - ЧІМ** (частота дискретизації пропорційна вхідному сигналу: $\omega_0 = f(x)$ при $A = \text{const}$, $T_{\text{імп}} = \text{const}$).

Величина, що визначальна закон модуляції, називається модулюючою величиною .

Квантування за часом

АІМ

Якщо виконується лише квантування за часом, то системи є лінійною.



Квантування за рівнем

Релейна система

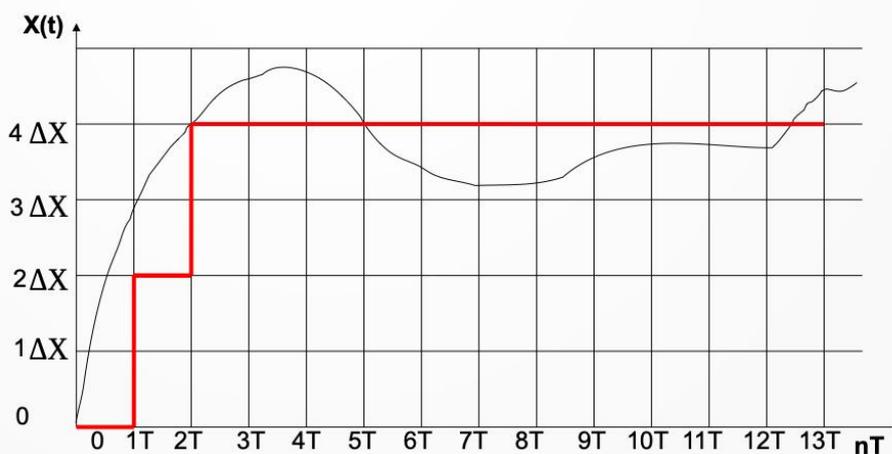
Квантуванням за рівнем породжує нелінійну систему



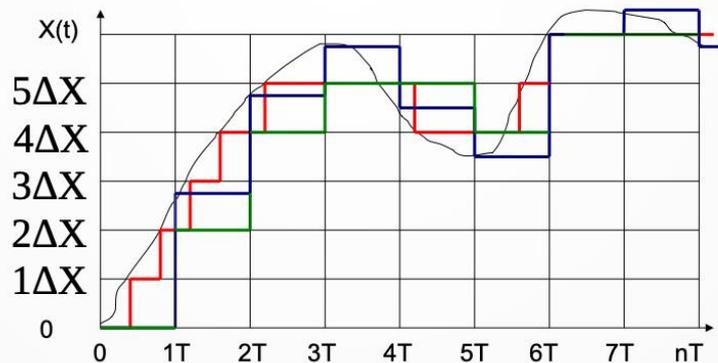
Квантування за часом та рівнем

Цифрова система

Використовується у системах на базі мікропроцесорів



Порівняння видів квантування



- Квантування за рівнем —
- Квантування за часом —
- Змішане квантування —

Переваги імпульсних АСУ

- Можливість керування великими потужностями з високою точністю;
- Можливість поділу в часі інформаційних сигналів при багатоканальній передачі (технологічні процеси);
- Забезпечення узгодженої (синхронної) роботи неперервних пристроїв із ЦОМ;
- Підвищена завадостійкість.

<https://www.youtube.com/watch?v=Kl2Kzwq4dKA>

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	<i>Випуск 1</i>	<i>Зміни 0</i>	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 90 / 8</i>

Дякую за увагу

Математичний опис систем дискретного керування

Лекція №2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 9

Опис дискретних АСУ

Дискретні АСУ зручно описувати **функцією дискретний змінної**, коли всі величини розглядаються в дискретні рівновіддалені моменти часу - **гратчастою функцією (ГФ) і різницеvim рівнянням**.

Гратчаста функція часу $x[nT]$, або в скороченому запису $x[n]$ - це математична функція, значення якої визначені в дискретні рівно-віддалені один від одного моменти часу $t = nT$,

де n - ціле позитивне число $0, 1, 2, \dots, n$;

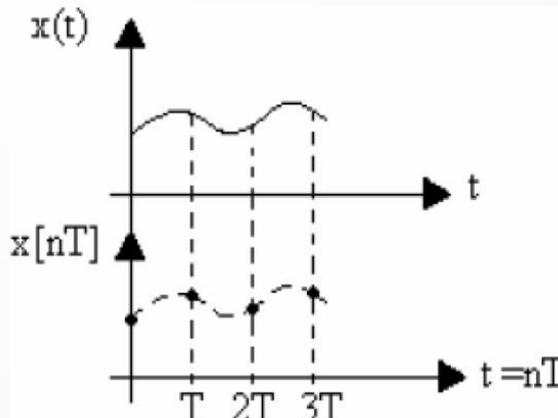
T – період дискретизації (квантування).

Гратчаста функція

ГФ є числовою послідовністю:
 $x[0], x[1T], x[2T], x[3T], \dots, x[nT]$

Якщо період квантування T заданий, то ГФ однозначно формується з початкової неперервної функції.

Операція заміни неперервної функції гратчастою: $x[nT] = x[n] = x(t)$ заміною $t = nT$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 10

Теорема Котельникова - Шеннона

В результаті дискретизації формується імпульсна послідовність $x(kT) \delta(t - kT)$, яка при $t = kT$ співпадає з початковим сигналом: $x(kT) = x(t) |_{t=kT}$ і не визначена в усі інші моменти часу (тобто між відліками k). Втрати інформації при квантуванні залежать від величини інтервалу квантування T (частоти квантування $2\pi/T$).

Згідно теоремі Котельникова-Шеннона, якщо спектр сигналу $x(t)$ обмежений максимальною частотою ω_{\max} , то точне відновлення функції $x(t)$ теоретично можливо за умови, що інтервал дискретизації T рівний:

$$T < \pi/\omega_{\max}.$$

Кінцеві різниці ґратчастих функцій

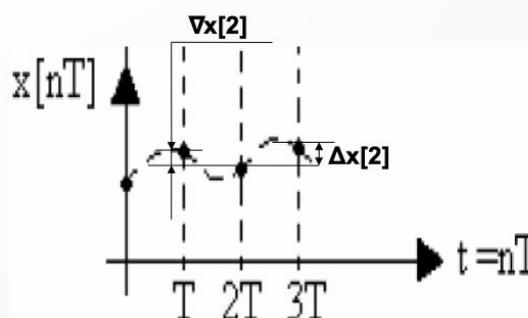
Дискретними аналогами похідних та інтегралів неперервних функцій для РФ є **кінцеві різниці (КР)** :
прямі (випереджуючі)
зворотні (відстаючі).

Перша пряма різниця:

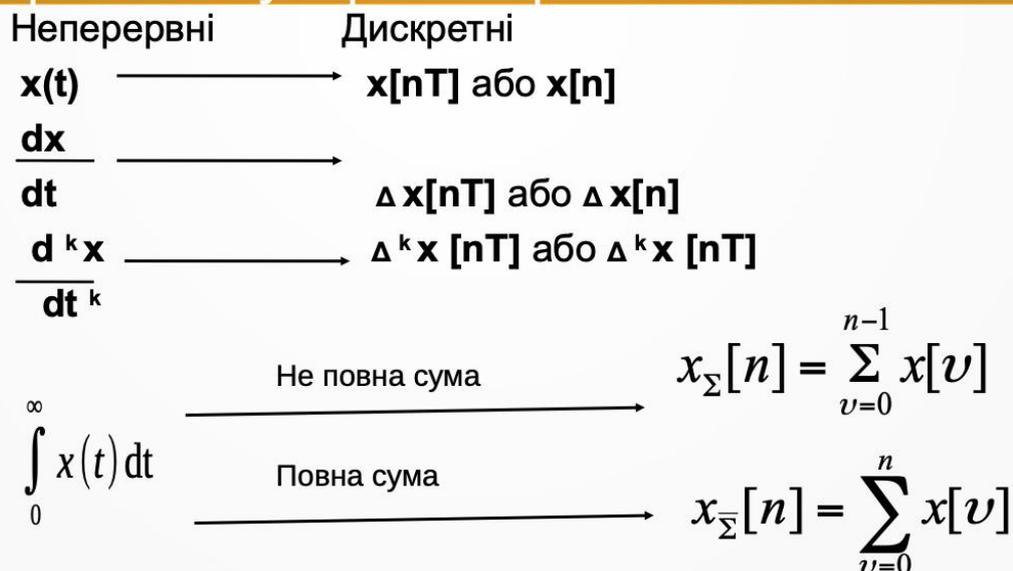
- $\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$

Перша зворотна різниця:

- $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$.



Операції в неперервному та дискретному просторі



Різницеві рівняння (**РР**) - (рівняння в кінцевих різницях) пов'язують між собою ґратчасті функції та їх кінцеві різниці. **РР – аналоги диференціальних рівнянь**, що описують неперервні АСУ.

При використанні прямих різниць неоднорідні лінійні **РР** m -го порядку мають вигляд:

$$a_0 \Delta^m y[n] + a_1 \Delta^{m-1} y[n] + \dots + a_{m-1} \Delta y[n] + a_m y[n] =$$

$$b_0 \Delta^k x[n] + b_1 \Delta^{k-1} x[n] + \dots + b_{k-1} \Delta x[n] + b_k x[n];$$

$k \leq m$; x – вхідна дія; y – вихідна дія.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 12

Однорідне різницеве рівняння

- **РР** можна записати через значення ґратчастої функції:

$$a_0^* y[n+m] + a_1^* y[n+m-1] + \dots + a_{m-1}^* y[n+1] + a_m^* y[n] =$$

$$b_0^* x[n+k] + b_1^* x[n+k-1] + \dots + b_{k-1}^* x[n+1] + b_k^* x[n].$$

При $x[n] = 0$ це рівняння стає **однорідним РР**, рішенням якого буде $y[n]$.

Загальне рішення однорідного **РР** при некрратних коренях характеристичного рівняння може бути записано:

$$y[n] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n$$

де C_i - Постійні коефіцієнти;
 z_i - коріння характеристичного рівняння: $a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0$

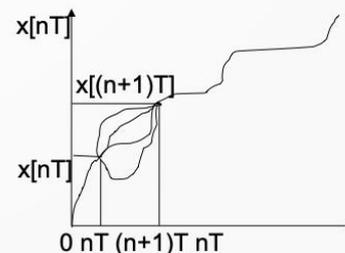
Відновлення неперервної функції

Завдання формування неперервної функції з **РР** не може бути вирішена однозначно без додаткових відомостей про поведінку функції в інтервалі між точками $t = nT$, т.к. **РФ**, заданої в дискретні моменти часу, може відповідати безліч безперервних функцій.

Виникає питання, якщо яких умовах можливо точне відновлення квантованої функції.

Відповідь на нього дає **теорема**

Котельникова-Шеннона.



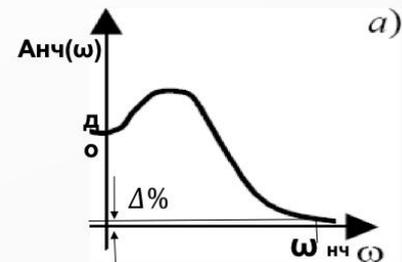
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 13

Спектр неперервної частини АСУ

Частота спектра вхідного сигналу – ω з визначається при розкладанні $x(t)$ до ряду Фур'є із заданою точністю.

При виборі частоти квантування ω слід враховувати і властивості неперервної частини (НЧ) АСУ (частоту пропускання НЧ – $\omega_{нч}$).

Якщо: $\omega з > \omega_{нч}$ НЧ є фільтром сигналів високої частоти, частоту квантування можна визначити: $\omega = 2 \omega_{нч}$.



Дякую за увагу

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 14

Методи дослідження дискретних систем

Лекція №3

Методи представлення рішень різницевих рівнянь

Для отримання можливості дослідження рішень **РР** у загальному вигляді широко використовуються наступні методи:

- дискретне перетворення Лапласа,
- **z** -перетворення,
- **w** -перетворення,
- частотні методи.

Метод Z-перетворення

- Z-перетворенням градчастої функції (ГГ) - $x[nT]$ називається функція комплексного аргументу z - $X(z)$, яка визначається виразом:

$$X(z) = Z\{x[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \times z^{-n}$$

- при $z > R=1/\rho$ де ρ - радіус збіжності ряду. Функція $x[nT]$ - оригінал
- $X(z)$ - зображення або
- z-перетворення** функції $x[nT]$.
- Z-перетворення дає можливість одержати з $X(z)$ значення ординат ГГ - $x[nT]$ у моменти квантування.

Z-перетворення часової функції

$x(t)$	$X(s)$	$x[nT]$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta[nT]$	1
$1(t)$	$1/s$	$1[nT]$	$z/(z-1)$
t	$1/s^2$	nT	$Tz/(z-1)^2$
$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$z/(z-d)$ ($d=e^{-\alpha T}$)
$t^2/2!$	$1/s^3$	$(nT)^2/2!$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$
$te^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)^2$	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zdT}{(z-d)^2}$ ($d=e^{-\alpha T}$)
$\frac{t^2}{2!}e^{-a t}$	$1/(s+\alpha)^3$	$\frac{(nT)^2}{2!}e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)dT^2}{2!(z-d)^3}$ ($d=e^{-\alpha T}$)

Для знаходження **z**-зображень **ГФ** за оригіналом і навпаки може бути застосована таблиця перетворення Лапласа.

Дискретне перетворення Лапласа реалізується шляхом уведення оператора:

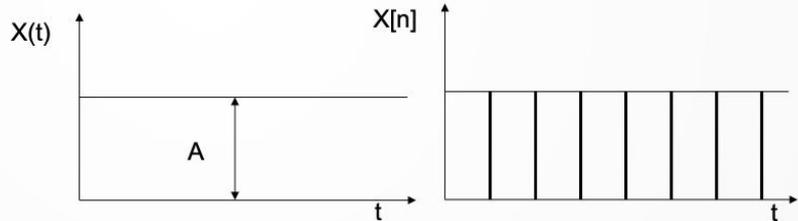
$$z = e^{sT}$$

Де T — період дискретизації

Розрахунок Z-перетворення

Підхід 1:
(за визначенням)

Приклад: **z** -
зображення
ступінчастої
функції



$$x[n] = A * 1[n] = A;$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] * z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} A * 1[n] * z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \\ &= A(z^{-0} + z^{-1} + z^{-2} + \dots) \approx A(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = \\ &= \left| \text{при } \frac{1}{z} < 1 \right| = \frac{A}{1 - z^{-1}} = \frac{A * z}{z - 1}. \end{aligned}$$

Розрахунок Z-перетворення

Підхід 2: (за використанням різниць):

Якщо відомо перетворення Лапласа **X (s)** вихідної безперервної функції **x (t)** , то можна обчислити **Z** -перетворення **X (z)**:

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{z}{z - e^{\frac{s_k}{T}}} \operatorname{Res}(X(s_k))$$

Де s_k – полюси (прості) перетворення Лапласа **X (s)** неперервної функції **x (t)** . У випадку кратного кореня застосовуються спеціальні формули.

Розрахунок Z-перетворення

- Приклад : $x(t) = 1(t)$; $X(s) = 1/s$.

Використаємо таблицю перетворення Лапласа:

$x(t)$	$X(s)$	$x[nT]$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta[nT]$	1
1(t)	1/s	1[nT]	$z/(z-1)$
t	1/s ²	nT	$Tz/(z-1)^2$
$e^{-\alpha t}$	1/(s+ α)	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$z/(z-d)$ ($d=e^{-\alpha T}$)
$t^2/2!$	1/s ³	$(nT)^2/2!$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} * 1$$

Властивості Z-перетворення

1. **Властивість лінійності** : зображення лінійної комбінації $\Gamma\Phi$ відповідає така ж лінійна комбінація z -зображень:

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \Leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

2. **Властивість усунення аргументу в області оригіналу**: зсув аргументу $[nT]$ в $\mathbf{P\Phi}$ на ціле число періодів $\pm kT$ відповідає множенню зображення $X(z)$ на: $z^{\pm k}$

$$x[(n \pm k)T] \Leftrightarrow z^{\pm k} X(z)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 18

Властивості Z-перетворення

3. Властивість зміщення незалежної змінної в області зображення : зсуву аргументу в z -зображенні на ціле число періодів у комплексній області відповідає множення z на

$$e^{aT}$$

4. Правило диференціювання зображення: множення $\Gamma\Phi$ на nT відповідає диференціюванню її z -зображення $X(z)$, результат якого множиться на $(-Tz)$:

$$nT * x[nT] \Leftrightarrow -Tz \frac{dX(z)}{dz}$$

Властивості Z-перетворення

5. Зв'язок початкових та кінцевих значень: початкове значення оригіналу $\Gamma\Phi$ дорівнює кінцевому значенню z -зображення :

$$\lim_{n \rightarrow 0} (x[nT]) = \lim_{z \rightarrow \infty} \{X(z)\}$$

Кінцеве значення $\Gamma\Phi$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x[nT]) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} X(z) \right\}$$

6. Зображення різниць:

$$z \left\{ \Delta^k x[nT] \right\} = (z-1)^k X(z)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 19

Приклад розрахунку прямої кінцевої різниці

Застосування визначення прямої різниці

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] = x[n+2] - x[n+1] - x[n+1] + x[n] = x[n+2] - 2x[n+1] + x[n].$$

Застосування властивості зображення різниць

$$\Delta^2 x[n] = (z-1)^2 X(z) = (z^2 - 2z + 1)X(z) \Leftrightarrow x[n+2] - 2x[n+1] + x[n].$$

Дякую за увагу

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 20

Властивості та характеристики імпульсних АСР

Лекція №4

Передатна функція імпульсної АСК в Z-зображенні

Різницеве рівняння (РР) АСР:

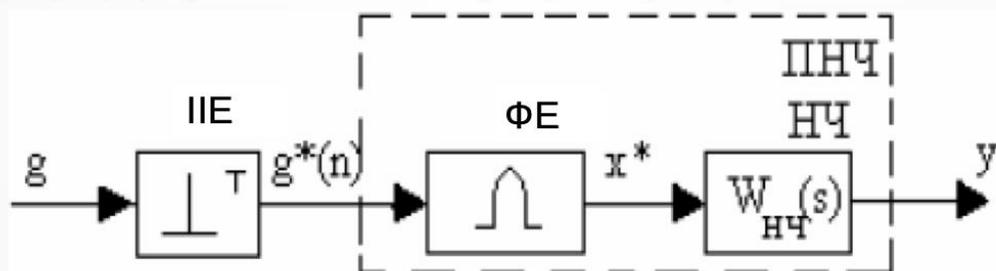
$$a_0 y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_{m-1} y[n+1] + a_m y[n] = b_0 x[n+k] + b_1 x[n+k-1] + \dots + b_{k-1} x[n+1] + b_k x[n].$$

Виконавши z - перетворення РР, отримаємо передатну функцію АСР в z - зображенні:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}.$$

Представлення імпульсного елемента

ІЕ є послідовним з'єднанням ідеального імпульсного елемента (**ІІЕ**) і формуючого елемента (**ФЕ**) або фільтра.



ІІЕ перетворює неперервний сигнал в миттєві імпульси у вигляді δ -функцій, а **ФЕ** формує з них імпульс заданої форми вихідного імпульсу реального імпульсного елемента (**РІЕ**).

Передатна функція формуючого елемента

На виході **ІІЕ** ширина імпульсу: $\rightarrow 0$; $\ll T$; $A * \tau = 1$

Дія **ІІЕ** зводиться до множення відліків квантованої функції $x(t)$ на дельта-функцію $\delta(t-nT)$. Форма імпульсу **ІІЕ** визначає вагову функцію **ФЕ** - $k_{ФЕ}(t)$. Тому, передатну функцію **ФЕ** визначимо як зображення форми імпульсу за Лапласом:

$$W_{ФЕ}(s) = L\{ k_{ФЕ}(t) \} .$$

ФЕ об'єднується з неперервною частиною (**НЧ**) АСУ в приведену неперервну частину (**ПНЧ**), передатна функція якої

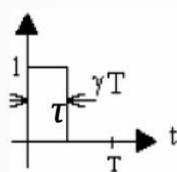
$$W_{ПНЧ}(s) = W_{ФЕ}(s) * W_{НЧ}(s).$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 22

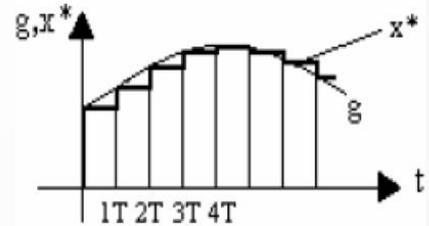
Представлення реального іспульсного елемента

У більшості випадків **PIE** формує прямокутні імпульси тривалості $T_{\text{imp}} = \gamma T$, тобто вагова функція **ФЕ** має вигляд:

$K_{\text{ФЕ}}(t)$



$$k_{\text{ФЭ}}(t) = \begin{cases} 1(t), & 0 \leq t \leq \gamma T; \\ 0, & t > \gamma T. \end{cases}$$



У цьому випадку передатна функція **ФЕ**:

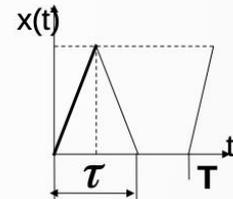
$$W_{\text{ФЕ}}(s) = \int_0^{\gamma T} 1(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\gamma T} = -\frac{1}{s} e^{-\gamma Ts} + \frac{1}{s}$$

Звідки: $W_{\text{ФЭ}}(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}$ **W_{ФЕ}(s)** - екстраполятор нульового порядку.
Порядок екстраполятора визначається порядком похідної форми імпульсу на інтервалі τ

Передатні функції формуючих елементів типових імпульсів

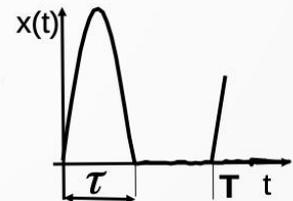
- Трикутний імпульс

$$W_{\text{ФЭ}}(s) = 2A \frac{(1 - e^{-\frac{s\tau}{2}})^2}{s^2}$$



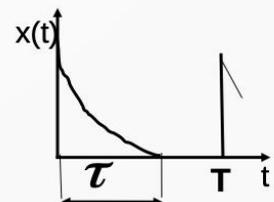
- Синусоїдальний імпульс

$$W_{\text{ФЭ}}(s) = AT \frac{\pi (1 + e^{s\tau})}{\gamma [s^2 T^2 + (\frac{\pi}{\gamma})^2]}$$



- Експоненційний імпульс

$$W_{\text{ФЭ}}(s) = \frac{AT}{sT + \frac{3}{\gamma}}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 23

Визначення передатної функції $W_{пнч}(s)$

Розглянемо за наявності формувача прямокутних імпульсів:

$$W_{пнч}(s) = W_{ФЕ}(s) * W_{нч}(s) = \frac{1 - e^{-\gamma T_s}}{s} \quad W_{нч}(s) = (1 - e^{-\tau s}) \frac{W(s)}{s}$$

Переходячи від неперервного перетворення Лапласа до z -перетворення:

$$W_{пнч}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$$

Вираз $\left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$ необхідно подати як суму елементарних дробів

(наприклад, за теоремою розкладання, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів), а потім виконати z -перетворення кожного з дробів.

Теорема розкладання

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} =$$

$$= \sum_{i=1}^v \frac{A_i}{s^i} + \sum_{k=1}^q \frac{B_k}{T_k s + 1} + \sum_{j=1}^r \frac{C_j + D_j s}{T_j^2 s^2 + 2\xi T_j s + 1}$$

A_i, B_k, C_j, D_j - Коефіцієнти розкладання, визначаються:

методом невизначених коефіцієнтів;
методом граничних значень;
шляхом підстановки чисельних значень.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 24

Приклад визначення дискретної передатної функції

Визначити дискретну передатну функцію імпульсної АСУ, у якій ІЕ формує прямокутні імпульси тривалості $\tau = 1$ с з періодом дискретизації $T = 1$ с, а неперервна частина задана передатною функцією:

$$W_{\text{нч}}(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)} \quad \text{при } k=10 \text{ с}^{-1}, T_1=2 \text{ с.}$$

Приклад визначення дискретної передатної функції

Дискретну передатну функцію розімкнутої імпульсної системи знаходимо, представляючи дріб у вигляді суми елементарних дробів:

$$\left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \frac{k}{s^2(T_1 s + 1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{T_1 s + 1} =$$

$$= \frac{(A_1 T_1 + B_1)s^2 + (A_1 + A_2 T_1)s + A_2}{s^2(T_1 s + 1)}$$

$$s^0 A_2 = k,$$

$$s^1 A_1 + A_2 T_1 = 0,$$

$$s^2 A_1 T_1 + B_1 = 0.$$

Приклад визначення дискретної передатної функції

$$\frac{k}{s^2(Ts+1)} = \frac{k}{s^2} - \frac{kT_1}{s} + \frac{kT_1}{s + \frac{1}{T_1}} = k \left[\frac{1}{s^2} - \frac{T_1}{s} + \frac{T_1}{s + \frac{1}{T_1}} \right]$$

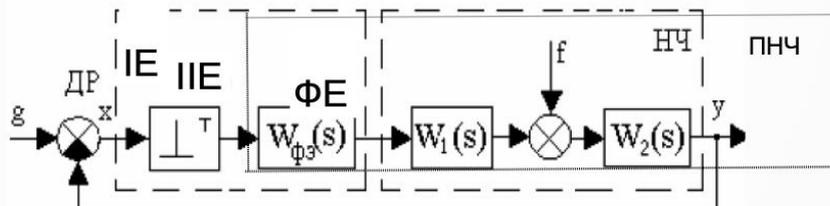
За допомогою таблиці відповідностей знайдемо z -перетворення для кожного з доданків в правій частині отриманого виразу:

$$z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_1 z}{z-1} + \frac{T_1 z}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} \right]$$

при формуванні прямокутних імпульсів:

$$W_{\text{пнч}}(z) = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{W_{\text{нч}}(s)}{s} \right\} = W_{\text{р}}(z) = 10 \left[\frac{1}{z-1} - \frac{0.8}{z-0.6} \right] = \frac{2(z+1)}{(z-1)(z-0.6)}$$

Структурні схеми та передавальні функції замкнутих дискретних АСР



$$x(t) = g(t) - y(t) \Rightarrow x[n] = g[n] - y[n] \Rightarrow X(z) = G(z) - Y(z)$$

$$\text{Зображення } \Gamma\Phi: y[n] \Rightarrow Y(z) = W(z) X(z)$$

$$W(z) = Z\{W_{\text{ФЭ}}(s) * W_1(s) * W_2(s)\}.$$

$$\text{Зображення сигналу похибки: } X(z) = \{1/[1 + W(z)]\} * G(z)$$

$$\text{Тоді зображення вихідної координати: } Y(z) = \{W(z)/[1 + W(z)]\} * G(z)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 26

Передатна функція замкненої АСР

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{W_{\text{пр}}(z)}{1 + W_{\text{р}}(z)} = \frac{W_{\text{фе}}(z)W_{\text{нч.пр}}(z)}{1 + W_{\text{фе}}(z)W_{\text{нч.р}}(z)} = \\
 &= \frac{\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{пнч.пр}}(s)}{s} \right\}}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{пнч.р}}(s)}{s} \right\}}
 \end{aligned}$$

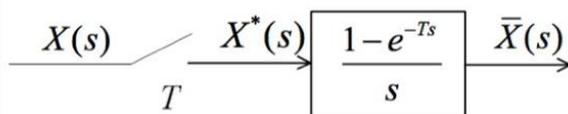
Дякую за увагу

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 27

Частотні властивості та характеристики дискретних САК

Лекція №5

Частотні властивості дискретного перетворення Лапласа



Перетворений сигнал

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

Частотна функція перетворення

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s) + \frac{f(0)}{2}$$

$$\omega_s = 2\pi / T$$

Властивість дискретного перетворення

$$F^*(s) = F^*(s + j\omega_s)$$



$$F^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kT(s + j\omega_s)}$$

Перетворення Ейлера

$$e^{-j2\pi k} = \cos 2k\pi - j\sin 2k\pi = 1$$

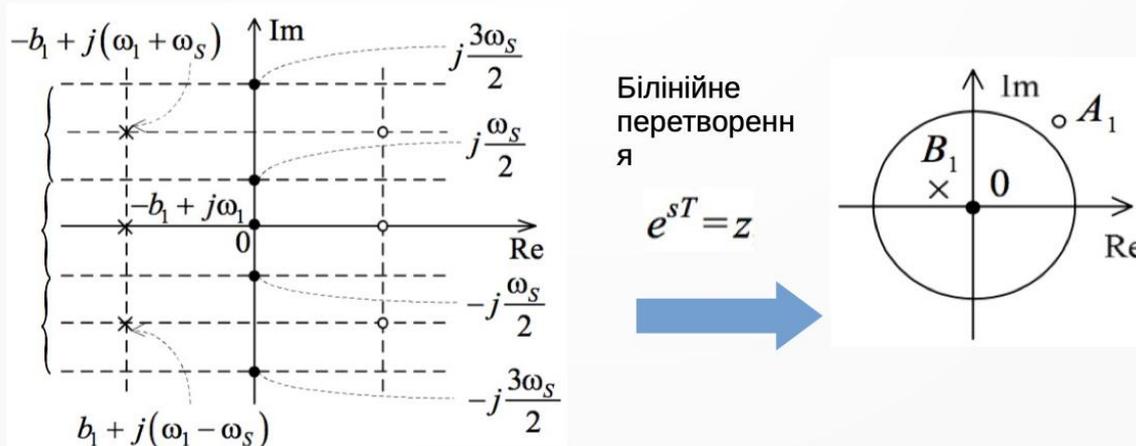


$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} e^{-jkT\omega_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Представлення нулів та полюсів $F^*(s)$

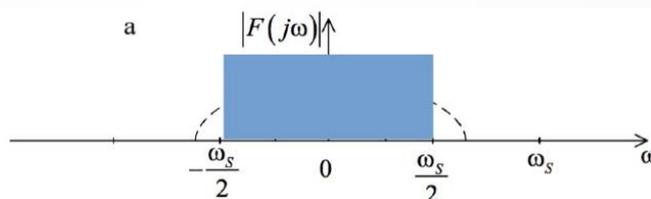
Якщо функція $F(s)$ має полюс $s = s_1$, то і функція $F^*(s)$ має полюси $s = s_1 + jm\omega_s$, $m=0, \pm 1, \pm 2..$

Те ж саме стосується і нулів з періодичністю $j\omega_s$

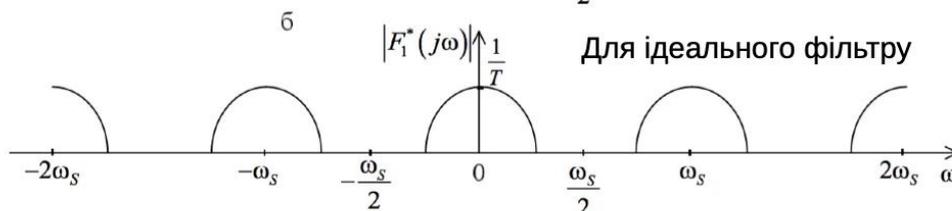


Спектральні властивості процесу квантування

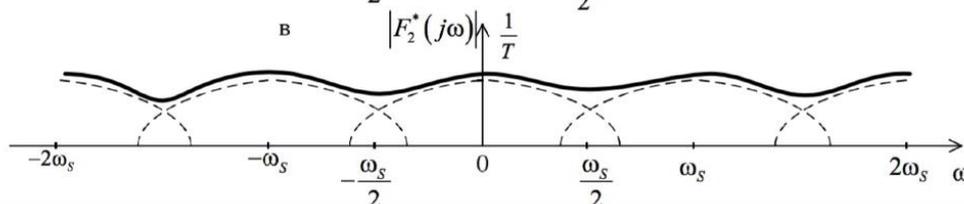
Спектри вхідних функцій



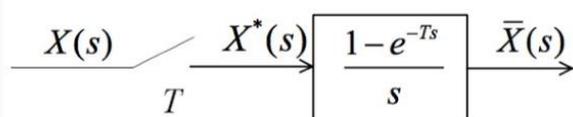
Квантування сигналу F1 з можливістю відновлення



Квантування сигналу F2 без можливості відновлення



Поновлення даних



$$K_{\Phi Y}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$K_{\Phi Y}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} e^{j\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}} = \frac{2e^{j\omega \frac{T}{2}}}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j} = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

$$\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi\omega}{\omega_s}$$

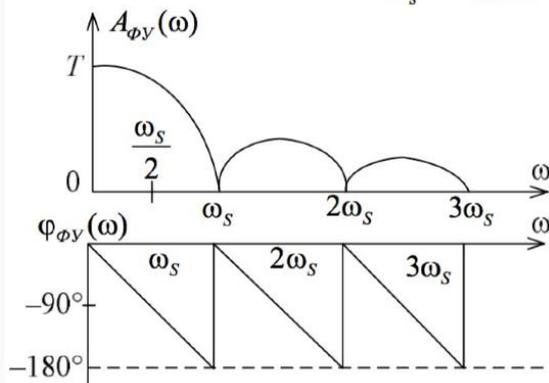


$$K_{\Phi Y}(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_s}}$$

Частотні характеристики фільтра

АЧХ

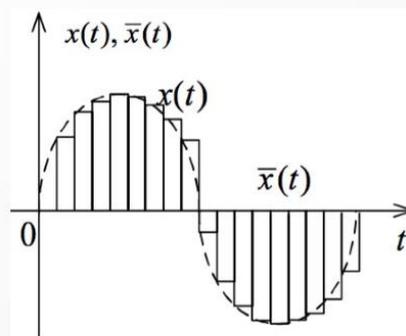
$$A_{\Phi Y}(\omega) = |K_{\Phi Y}(j\omega)| = T \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}$$



ФЧХ

$$\varphi_{\Phi Y}(\omega) = \arg K_{\Phi Y}(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \pi, & \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) < 0 \\ -\frac{\pi\omega}{\omega_s}, & \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) > 0 \end{cases}$$

Умова відновлення $\omega \ll \omega_s/2$



Практичні наслідки частотного перетворення

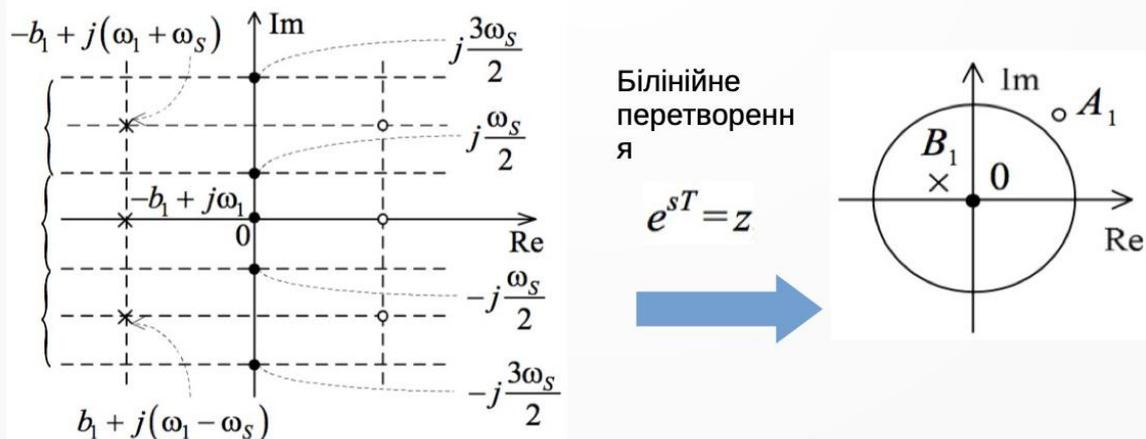
- Вирази для частотних характеристик (ЧХ) імпульсних систем отримуються з $W(z)$ шляхом заміни оператора z на e^{sT}
- Оскільки частота ω входить до показника ступеню, то ЧХ є періодичними функціями частоти, з періодом зміни $\pm\pi/\omega$ або $(2\pi/\omega)$.
- Отже неможливо розрізнити складові, частоти яких кратні частоті квантування імпульсного елементу $\omega_0 = 2\pi/T$.

$$e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$$

Представлення нулів та полюсів $F^*(s)$

Якщо функція $F(s)$ має полюс $s = s_1$, то і функція $F^*(s)$ має полюси $s = s_1 + jm\omega_s$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Те ж саме стосується і нулів з періодичністю $j\omega_s$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 31

Перетворення простору змінних для частотних характеристик

Через складність обчислень частотних характеристик, на практиці вони визначаються відносно **абсолютної псевдочастоти λ** шляхом білінійного перетворення із врахуванням основних властивостей квантування.

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \quad w = \frac{j\lambda T}{2}$$

w — комплексна змінна перетворення

Визначення псевдочастоти

Реальна та псевдо частоти зв'язані наступним виразом

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

- Псевдо частота на інтервалах частот, где $\omega T < 2$, приблизно дорівнює кутовій частоті сигналу $\lambda \approx \omega$. При зміні частоти від $-\pi/T < \omega < +\pi/T$ псевдо частота приймає значення $-\infty < \lambda < +\infty$.
- Для переходу від дискретної передаточної функції розімкненої системи $W_p(z)$ к АФЧХ - $W_p(j\lambda)$ необхідно зробити заміну

$$z = \frac{[1 + j\lambda T/2]}{[1 - j\lambda T/2]}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 32

Побудова логарифмічних амплітудно-частотних характеристик ЛАЧХ

ЛАЧХ будуються окремо в області нижніх частот (**НЧ**) та верхніх частот (**ВЧ**). Межею, що розділяє частотні області є частота зрізу $\omega_{зр}$ за умови:

$\omega_{зр} * T < 2$ де T — період квантування.

Цю умову необхідно виконати для забезпечення правильної оцінки запасів стійкості та точності роботи системи, що узгоджується з теоремою Котельникова-Шеннона.

Неперервна частина системи

Нізькочастотна неперервна частина (**НЧ**) системи може бути представлена передатною функцією наступним чином

$$W_{НЧ}(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 33

Умови побудови псевдо ЛАЧХ

1. Величина, зворотня періоду квантування T , більше половини частоти зрізу $\omega_{зр}$: $\omega_{зр} < 2/T$.
2. На частоті зрізу **ЛАЧХ** неперервної частини нахил -20 дБ/дек.
3. Сталим часу T_j ($j = 1, 2, \dots, m$) відповідають частоти спряження менші ніж частота зрізу $\omega_{сj} < \omega_{зр}$.
4. Присутні l ($l < n$) сталі часу T_i ($i = 1, 2, \dots, l$), яким відповідають частоти спряження менші, ніж частота зрізу $\omega_{сі} < \omega_{зр}$.

Розділення передатної функції неперервної частини

Область нижніх частот:

$$W_{нч_H}(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^l \prod_{i=1}^l (T_i s + 1)}$$

Область верхніх частот

$$W_{нч_B}(s) = \frac{\omega_{зр}}{s \prod_{i=l+1}^n (T_i s + 1)}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 34

Перехід до псевдочастоти

Область нижніх частот:

$$W^H(j\lambda) = (1 - j\lambda T/2) \frac{k \prod_{j=1}^m (1 + j\lambda T_j)}{(j\lambda)^r \prod_{i=1}^l (1 + j\lambda T_i)}$$

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

Область верхніх частот

$$W^e(j\lambda) = (1 - j\lambda T/2) \frac{\omega_{cp} (1 + j\lambda(T/2 - T_\Sigma))}{(j\lambda)(1 + j\lambda T/2)}$$

$$T_\Sigma = \sum_{i=l+1}^n T_i$$

- В НЧ області АФЧХ імпульсної АСР формується з $W_{нч}(s)$ підстановкою $s = j\lambda$ і добутком на множник $(1 - j\lambda T/2)$. В цій області $\lambda \approx \omega$. Впливом додаткового множника в НЧ області можна знехтувати, оскільки $\omega_{cp} < 2/T$.
- В області нижніх частот ЧХ імпульсної АСР співпадає з ЧХ її неперервної частини.
- Початок ЛАЧХ в ВЧ області совпадає з кінцем ЛАЧХ, побудованої в НЧ області.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	<i>Випуск 1</i>	<i>Зміни 0</i>	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 90 / 35</i>

Дякую за увагу

Аналіз стійкості дискретних САК

Лекція №6

УМОВИ СТІЙКОСТІ ДСАК

Різницеве рівняння

$$(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)Y(z) = (b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m)V(z)$$

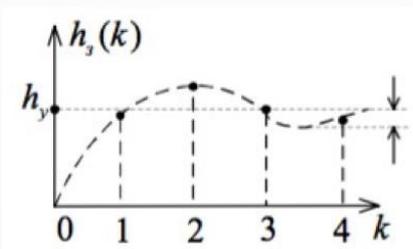
$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

Розв'язок

$$y(k) = y_{\text{св}}(k) + y_{\text{в}}(k)$$

$$y_{\text{св}}(k) = \sum_{i=0}^n c_i z_i^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{\text{св}}(k) = 0$$



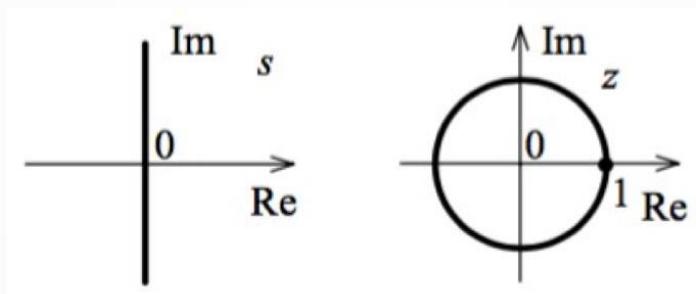
$$|z_i| < 1$$

$$1 + K(z) = 0$$

$K(z)$ — передатна функція розімкненої системи

Графічна інтерпретація умови стійкості

$$z = e^{j\omega T}$$



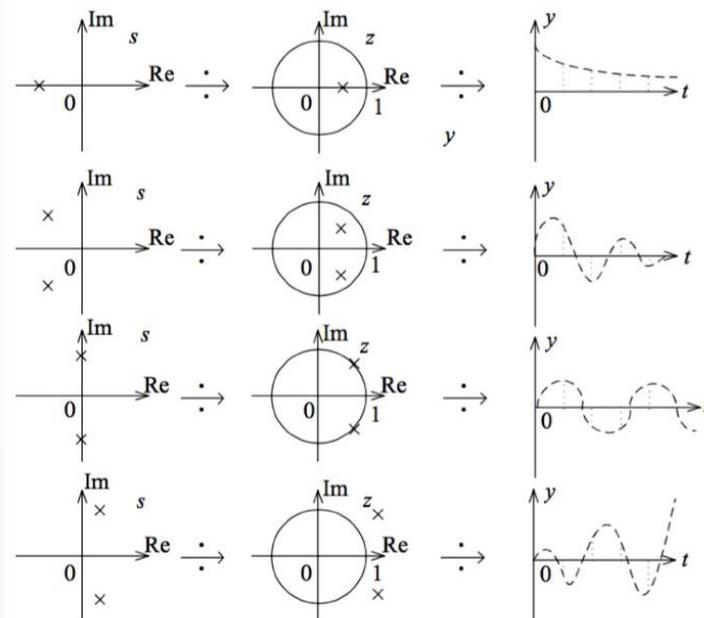
$$s = c + j\omega$$

$$z = e^{sT} = e^{cT} e^{j\omega T}$$

$$c \rightarrow -\infty$$

$$z \rightarrow 0$$

Вплив розташування полюсів на коливальність



Білінійне перетворення

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad \longleftrightarrow \quad w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$$

$$w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \Bigg|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2 e^{j\omega T} - 1}{T e^{j\omega T} + 1} = \frac{2 e^{j\omega T} - e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{T e^{j\omega T} + e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{2 e^{j\frac{\omega T}{2}} (e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}})}{T e^{j\frac{\omega T}{2}} (e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}})}$$

$$w = \frac{2}{T} j \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\cos \frac{\omega T}{2}} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90/38

Перехід до псевдо частоти

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}$$

$$\omega_w \approx \frac{2}{T} \omega \frac{T}{2} = \omega_w = \omega$$



$$\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$$

$$\omega < \frac{2\pi}{10T} = \frac{\omega_s}{10}$$

Перехід можливий у випадку, якщо частота дискретизація у 10 чи більше разів більше за найбільшу частоту в спектрі неперервного сигналу

Критерій Рауса-Гурвіца

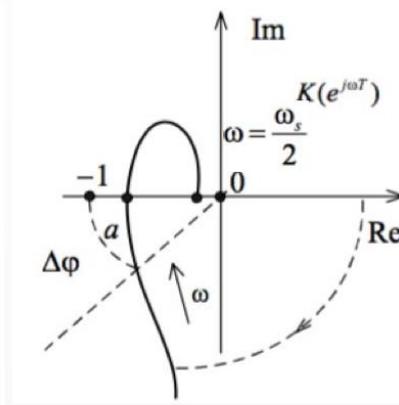
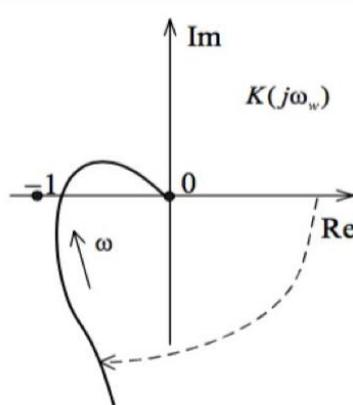
Дискретна система буде стійкою, якщо при $a_0 > 0$ усі елементи першого стовпця матриці Рауса також > 0 чи усі діагональні визначники матриці Гурвіца > 0

$$1 + K(w) = 1 + K(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}} = 0$$

Критерій Найквіста

$K(s)$	$s = j\omega$	$0 \leq j\omega \leq j\infty$
$K(z)$	$z = e^{j\omega T}$	$0 \leq \omega T \leq \pi$
$K(w)$	$w = j\omega_w$	$0 \leq j\omega_w \leq j\infty$

Дискретна система буде стійкою якщо годограф не охоплює точку з координатами $(-1, j0)$



Логарифмічний критерій Найквіста

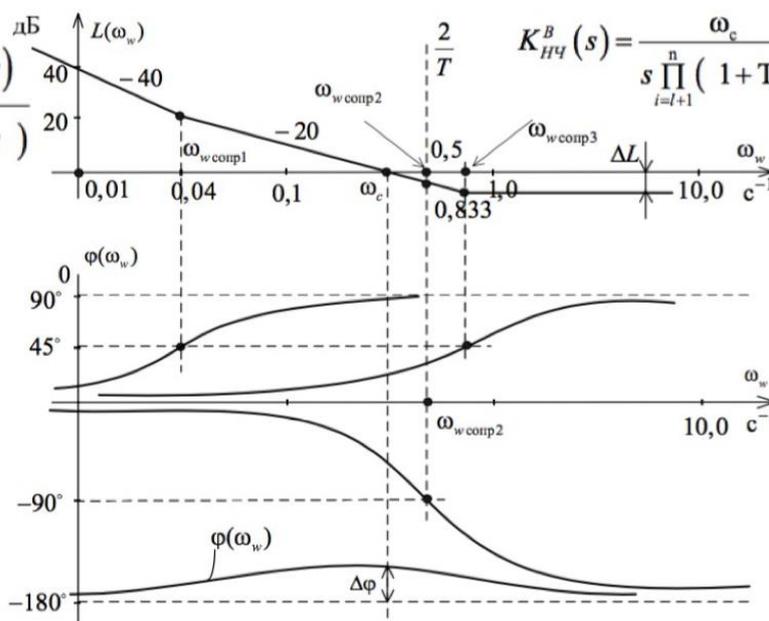
$$K_{НЧ}^H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^v \prod_{i=1}^l (1 + T_i s)}$$

$$K_{НЧ}^B(s) = \frac{\omega_c}{s \prod_{i=1}^n (1 + T_i s)}$$

Побудова виконується окремо в області нижній та верхніх частот

$$\omega_c < \frac{2}{T}$$

Перетин вісі частот ЛАЧХ неперервної $K(s)$ має бути з нахилом -20 дБ/дек



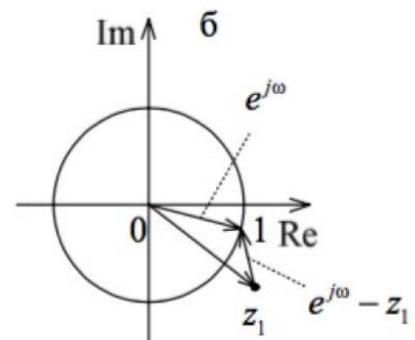
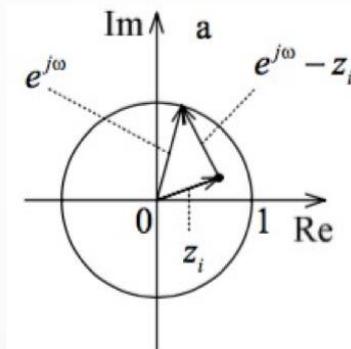
Критерій Міхайлова

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$$

$$D(e^{j\omega}) = a_0 (e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_n) = 0$$

Необхідно і достатньо,
щоб сумарний поворот
векторів
дорівнював $2\pi n$
знаходився в колі
одиничного радіусу при:

$$0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$$



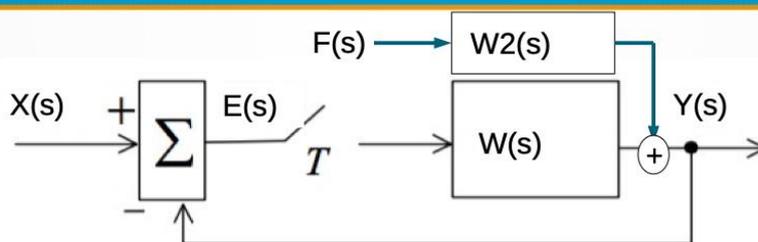
Дякую за увагу

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 41

Точність дискретних систем автоматичного управління

Лекція №7

Визначення точності



$$\varepsilon(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \varepsilon_g(\infty) + \varepsilon_f(\infty) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} \times \frac{G(z)}{1+W(z)} \right\} + \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z-1}{z} \times \frac{Z\{W_2(s)F(s)\}}{1+W(z)} \right\}$$

$$z = e^{sT} \rightarrow \left. \begin{array}{l} E(s) \text{ у} \\ \text{сталому} \\ \text{режимі} \end{array} \right| (s=0) \rightarrow \underline{\underline{z=1}}$$

Властивості усталеної похибки

$$\varepsilon(\infty) = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_0}{1 + W(z)} \rightarrow g(t) = g_0 \times 1(t) \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_1 T}{(z-1) W(z)} \rightarrow g(t) = g_1 \times t \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{g_2 T^2}{(z-1)^2 W(z)} \rightarrow g(t) = \frac{g_2 t^2}{2!} \end{cases}$$

Усталена похибка пропорційна величині вхідної дії та періоду дискретизації

Похибка астатичних САУ

Астатична система r -го порядку

$$W(z) = \frac{W_1(z)}{(z-1)^r} \quad \mathbf{W(1)} \rightarrow \infty$$

При $r > 1$

$\varepsilon(\infty) = 0$, якщо $k < r$;

$$\varepsilon(\infty) = \frac{g_k T^k}{W(1)}, \text{ якщо } k = r$$

$\varepsilon(\infty) = \infty$, якщо $k > r$.

Якщо порядок астатизму r САУ більше за порядок вхідного сигналу k у складі $W_1(z)$ — усталена помилка системи буде нульовою

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 43

Визначення усталеної помилки при неперервному вхідному сигналі

$$\varepsilon[nT] = C_0 g[nT] + \frac{C_1}{1!} g'[nT] + \frac{C_2}{2!} g''[nT] + \dots + \frac{C_k}{k!} g^{(k)}[nT], \quad g[nT] = g(t)|_{t=nT}$$

Де $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ – Коефіцієнти помилок

$$\begin{aligned} C_0 &= E(1); \\ C_1 &= T * E'(1); \\ C_2 &= T^2 [E''(1) + E'(1)]; \\ C_3 &= T^3 [E'''(1) + 3E''(1) + E'(1)]; \end{aligned} \quad E^{(k)}(1) = \left. \frac{d^{(k)} E(z)}{dz^k} \right|_{z=1}$$

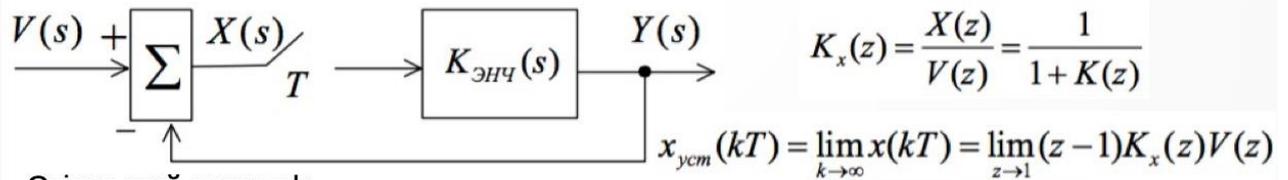
Визначення усталеної помилки при дискретному вхідному сигналі

$$\varepsilon[nT] = \bar{C}_0 g[nT] + \frac{\bar{C}_1}{1!} \Delta g[nT] + \frac{\bar{C}_2}{2!} \Delta^2 g[nT] + \dots + \frac{\bar{C}_k}{k!} \Delta^k g[nT],$$

$$\begin{aligned} \text{Де } \bar{C}_0 &= C_0; \quad \bar{C}_1 = C_1 / T; \quad \bar{C}_2 = C_2 / T^2; \dots \\ \bar{C}_k &= C_k / T^k. \end{aligned}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 44

Визначення усталеної помилки для східчастого сигналу ($\kappa = 0$)

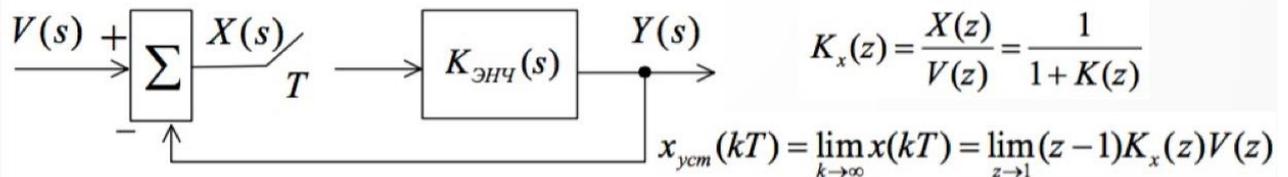


Східчастий сигнал $\kappa = 0$

$$V(z) = V \frac{z}{z-1} \quad x_{ycm}^0(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_x(z)V \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z)Vz = V \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z) = \frac{V}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} K(z)} = \frac{V}{1 + K_0}$$

K_0 — коефіцієнт похибки за положенням

Якщо $K(z)$ має полюс $z = 1$ (тобто множник знаменника $(z-1)$) і відповідає системі з астатизмом першого порядку, тоді K_0 прямує до нескінченності а відповідно усталена похибка прямує до 0



Лінійний сигнал $\kappa = 1$

$$x'_{ycm}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_x(z)V \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z)V \frac{Tz}{(z-1)}$$

$$V(z) = V \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{VTz}{[1 + K(z)](z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{VTz}{(z-1) + (z-1)K(z)} = \frac{VT}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K(z)} = \frac{V}{K_v}$$

$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1)K(z)$ Коефіцієнт помилки за швидкістю

Якщо $K(z)$ має 2 полюси $z = 1$ (тобто множник знаменника $(z-1)^2$) і відповідає системі з астатизмом другого порядку, тоді K_v прямує до нескінченності а відповідно усталена похибка прямує до 0

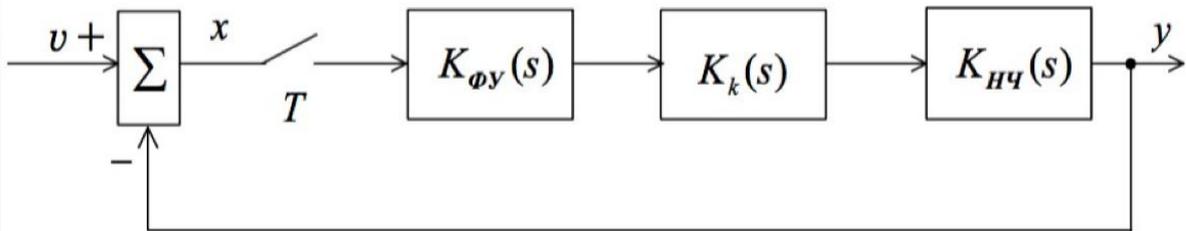
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 45

Дякую за увагу

Синтез дискретних СИСТЕМ

Лекція №8

Заміна дискретної системи еквівалентною неперервною



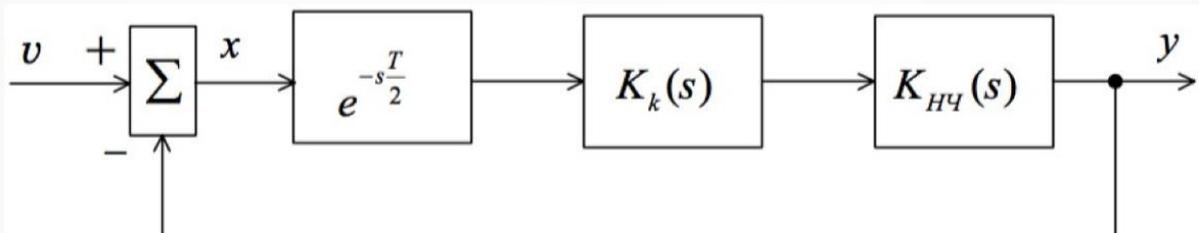
$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \quad X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT} T$$

$$K_{ИЭ} = \frac{X^*(s)}{X(p)} = \frac{1}{T} \quad K_{\phi y}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad K_{\phi y}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega T \frac{2}}{2}$$

Заміна дискретної системи еквівалентною неперервною

Якщо $\frac{\omega T}{2} \ll 1 \implies \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T \frac{2}}{2} = 1 \implies K_{\phi y}(j\omega) = T e^{-j\omega \frac{T}{2}}$

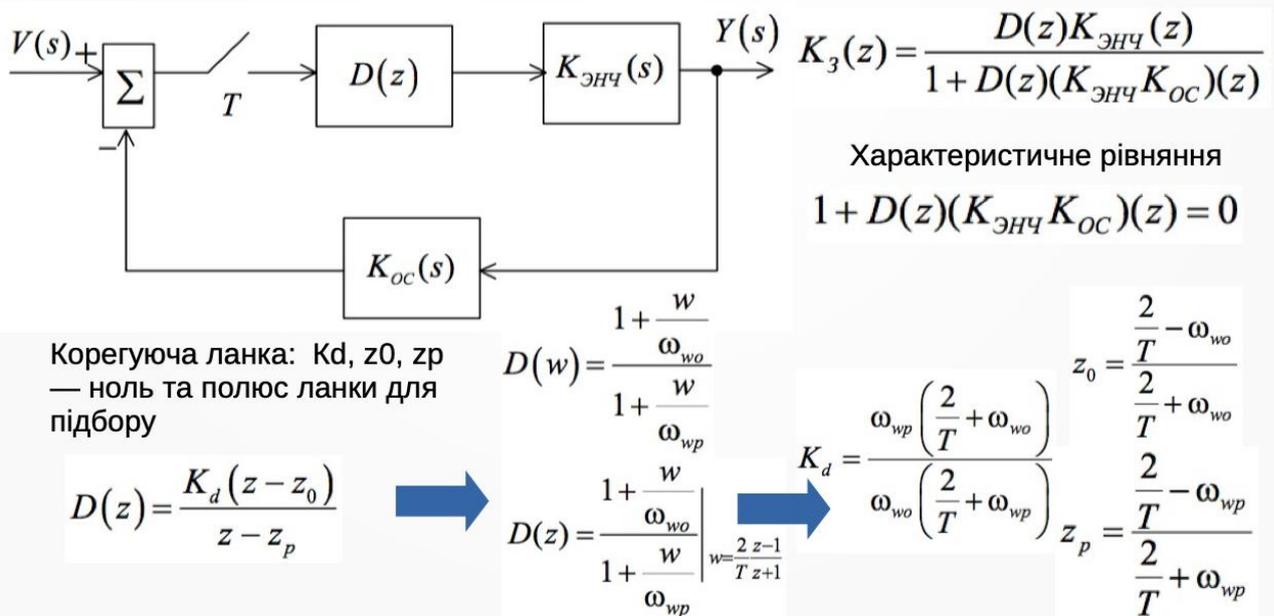
$$K_{ИЭ}(s) = K_{ИЭ}(s) K_{\phi y}(s) = \frac{1}{T} T e^{-s \frac{T}{2}} = e^{-s \frac{T}{2}} \quad K_{ИЭ}(s) = e^{-s \frac{T}{2}} = \frac{1 - s \frac{T}{2}}{1 + s \frac{T}{2}}$$



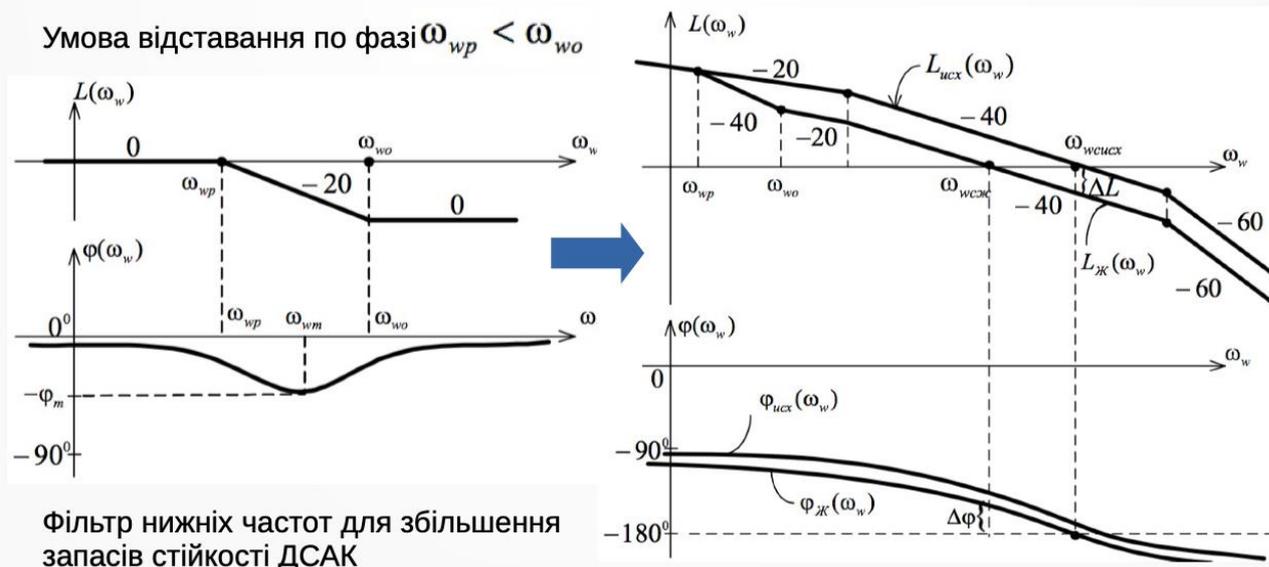
Умови заміни та вибору періоду квантування

- 1) $T \ll \frac{\pi}{\omega_{\max}}$ $\omega_{\max} = (2 \div 5)\omega_c$ ω_{\max} - максимальна частота у вхідних та збудованих сигналах
- 2) $T \ll \frac{t_p}{n}$ t_p, n — час регулювання та порядок системи відповідно
- 3) $T \ll \sqrt{\frac{8e_{\text{доп}}}{\ddot{v}_{\max}}}$ $e_{\text{доп}}, v_{\max}$ — задано помилка слідкування та максимальне прискорення вхідного сигналу слідкуючої системи
- 4) $T \ll (0,1 \div 0,5)/\omega_p$ ω_p, M — робоча частота сигналів системи та показник коливальності
 $T \ll (2/\omega_c) M / (M + 1)$

Використання w-перетворення для синтезу дискретних систем



Синтез регулятора з відставанням по фазі



Порядок синтезу ДСАК з регулятором відставання за фазою

- Отримати дискретну передатну функцію еквівалентної непе $K_{ЭНЧ}(z)$ і частини
- Перейти від z до w прос $D(w) = D(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}}$
- Побудувати логарифмічну частотну характеристику із дотриманням точності системи (коефіцієнт передачі при внесенні в систему корегуючої ланки має залишитись незмінним - компенсація)

$$K_{ЭНЧ}(j\omega_w) = K_{ЭНЧ}(w) \Big|_{w = j\omega_w}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 49

Порядок синтезу ДСАК з регулятором відставання за фазою

- Визначити частоту зрізу, що гарантує задану швидкодію та запас по фазі

$$\omega_{\text{всж}} = \arg K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{всж}}) = -180^\circ + \Delta\varphi + 5^\circ \quad \omega_{\text{всж}} = \frac{b\pi}{t_p} \quad b = 2 \div 5$$

- Визначити частоту спряження за нулем регулятора в десять раз меншою за частоту зрізу

- Визначити частоту спряження за полюсом регулятора

$$\frac{\omega_{\text{wp}}}{\omega_{\text{wo}}} = \frac{1}{|K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{всж}})|}$$

Порядок синтезу ДСАК з регулятором відставання за фазою

- Визначити передатну функцію корегуючої ланки

$$D(w) = K_{\text{эс}} \frac{1 + \frac{w}{\omega_{\text{wo}}}}{1 + \frac{w}{\omega_{\text{wp}}}}$$

- Перерахувати передатну функцію в дискретну форму

$$D(z) = \frac{K_d(z - z_0)}{z - z_p}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	<i>Випуск 1</i>	<i>Зміни 0</i>	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 90 / 50</i>

Дякую за увагу

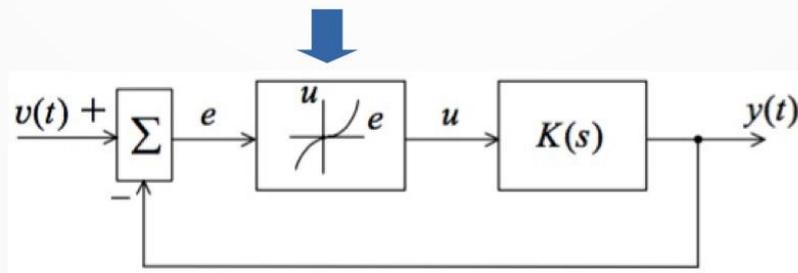
Нелінійні системи. Загальні властивості

Лекція №9

Визначення

Нелінійною називається така система, до складу якої входить хоча б один елемент з нелінійними властивостями

Нелінійні елементи бувають природні та штучні

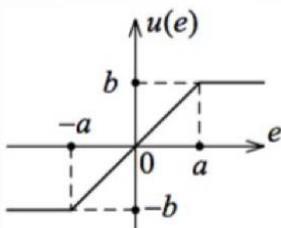


Властивості нелінійних систем

- Не може бути застосований принцип суперпозиції (реакція системи залежить від величини сигналу окремого контуру та початкових умов)
- Можуть виникати автоколивання, амплітуда яких не залежать від початкових умов та зовнішніх впливів
- Можливо декілька станів рівноваги, гармонічно зв'язаних з рівнем вхідного сигналу або лише з початковими умовами
- Можлива стрибкоподібна зміна рівня вихідного сигналу при зростанні частоти і навпаки: різке спадання при зменшенні частоти

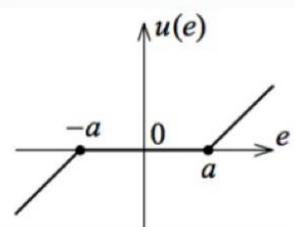
Типові нелінійні характеристики

Насичення
(обмеження)



$$u(e) = \begin{cases} b, & e \geq a, \\ \frac{b}{a}e, & |e| < a, \\ -b, & e \leq -a. \end{cases}$$

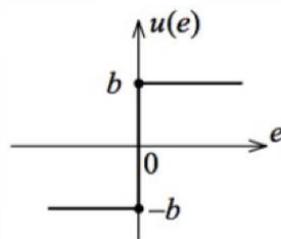
Зона
нечутливості



$$u(e) = \begin{cases} k(e-a), & e > a, \\ 0, & |e| \leq a, \\ k(e+a), & e < -a. \end{cases}$$

Типові нелінійні характеристики

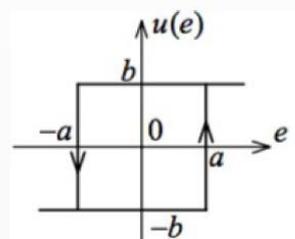
Ідеальне двопозиційне
реле



$$u(e) = b \operatorname{sign}(e)$$

$$\operatorname{sign}(e) = \begin{cases} 1, & e > 0, \\ -1, & e < 0. \end{cases}$$

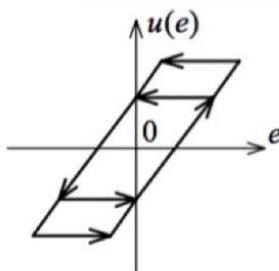
Реальне двопозиційне
реле



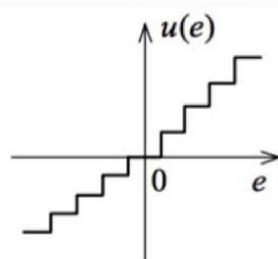
$$u(e, \dot{e}) = \begin{cases} -b, & e < a, \dot{e} > 0, \\ -b, & e < -a, \dot{e} < 0, \\ b, & e > a, \dot{e} > 0, \\ b, & e > -a, \dot{e} < 0. \end{cases}$$

Типові нелінійні характеристики

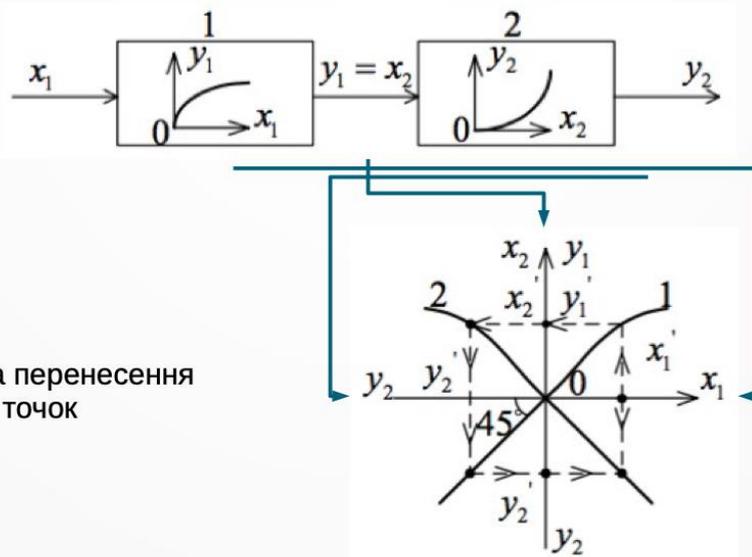
Люфт (ковзання)



Квантувач (екстраполятор)

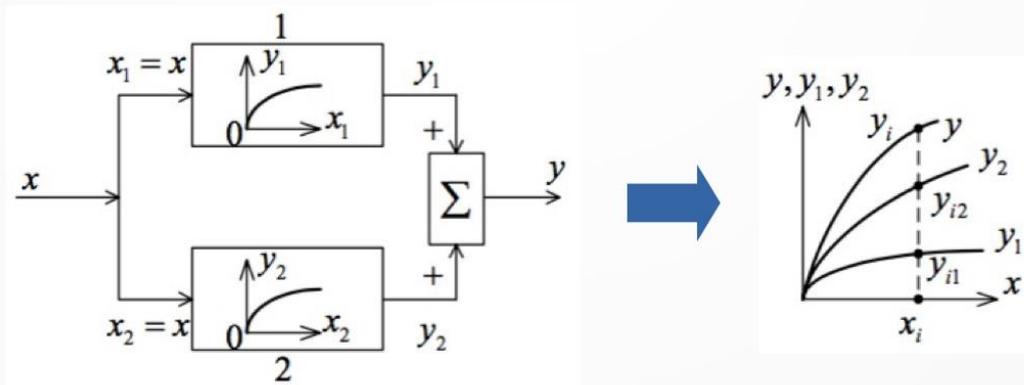


Послідовне з'єднання нелінійних елементів

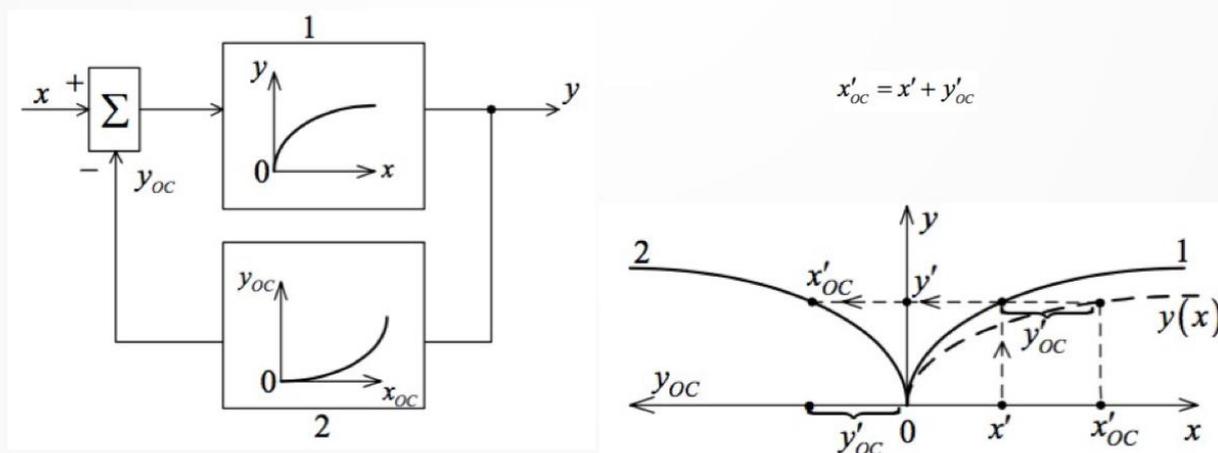


Діаграма перенесення робочих точок

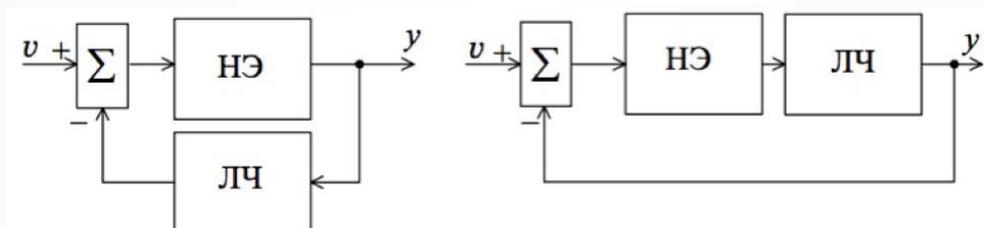
Паралельне з'єднання нелінійних елементів



З'єднання із зворотнім зв'язком



Перетворення структурних схем



В процесі перетворення не можна переносити через НЕ лінійні елементи системи. Сигнал на вході НЕ має лишатись таким же, як до перетворення.

Класифікація нелінійних систем

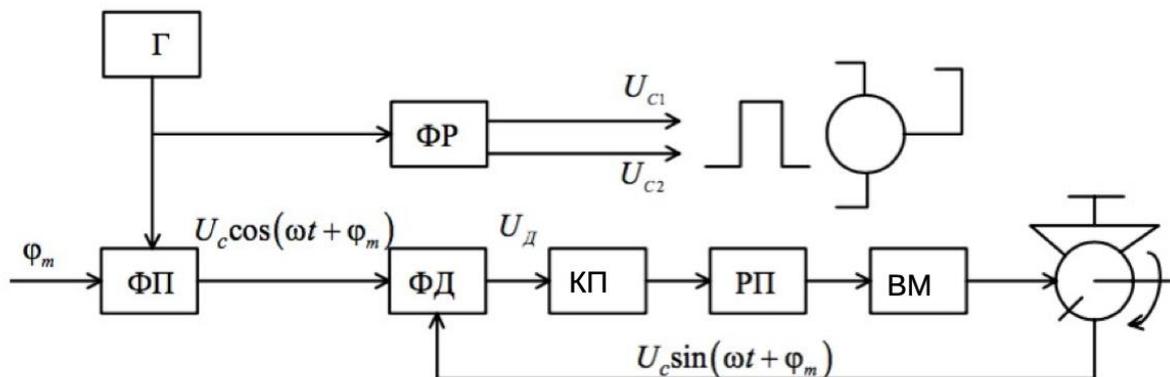
- На базі нелінійних диференційних рівнянь (нелінійні вектор-функції)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, v) \\ y = \varphi(t, x, v) \end{cases}$$
- Нелінійні імпульсні системи

$$x(k+1) = f(k, x(k), v(k)),$$

$$y(k) = \varphi(k, x(k), v(k)).$$
- Релейні системи
- Нелінійні САУ + ЕОМ (стаціонарні — не міняються параметри системи з плином часу та не стаціонарні)
- Автономні нелінійні системи — відсутні задаючі впливи в системі

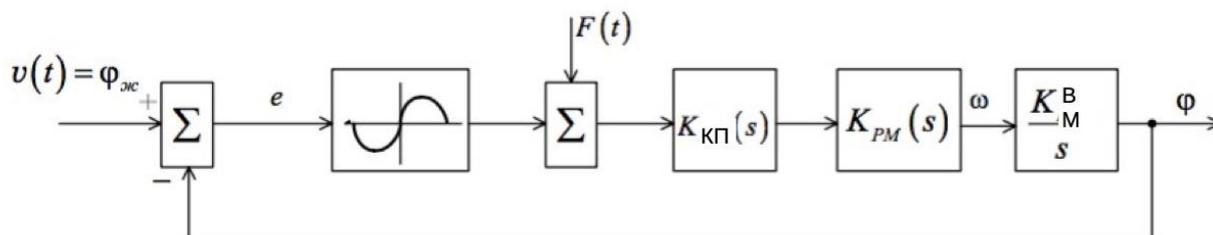
Приклад нелінійної САУ. Привод подачі верстату



Склад: Генератор, Фазовий Регулятор, Фазовий Перетворювач, Фазовий Детектор, Пристрій Керування, Регульований Привод, Виконавчий Механізм

Приклад нелінійної САУ. Привод подачі верстату

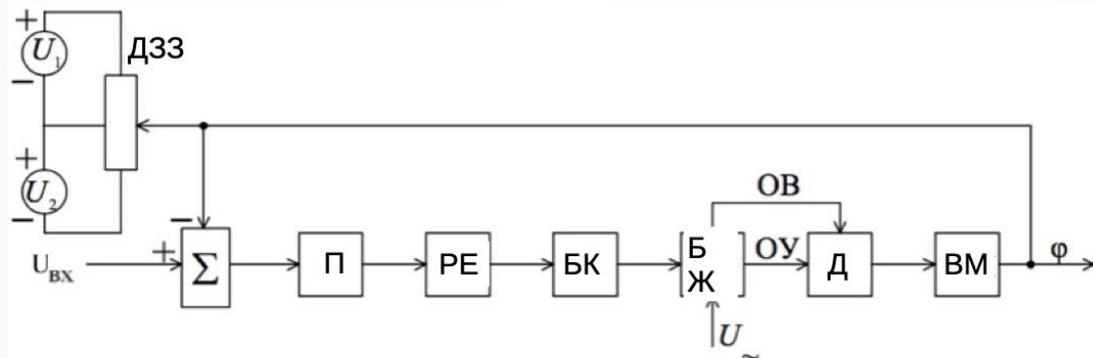
$$U_D = U_C \cos(\omega t + \varphi_m) U_C \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_C}{2} [\sin(\varphi_m - \varphi) + \cos(2\omega t + \varphi_m + \varphi)].$$



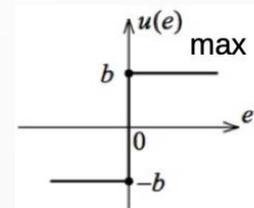
Система може розглядатися лінійною за умови

$$|e| \ll \frac{\pi}{2}$$

Приклад нелінійної САУ. Релейний асинхронний привод



Склад: Підсилювач, Релейний елемент, Блок комутації, Блок живлення, Двигун, Виконавчий механізм Датчик зворотнього зв'язку.



Дякую за увагу

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 58

Аналіз нелінійної САК методом фазової площини

Лекція №10

Класифікація методів аналізу НСАК

- Точні методи: метод фазової площини, точкових перетворень, метод Попова, метод Ляпунова.
- Наближені методи: Метод статичної та гармонійнолі лінеаризації (метод Гольдфарба)
- Чисельні методи та методи цифрового інтегрування: використання ЕОМ та ПЗ MATLAB, MathCAD, MAPLE тощо

Визначення фазового простору

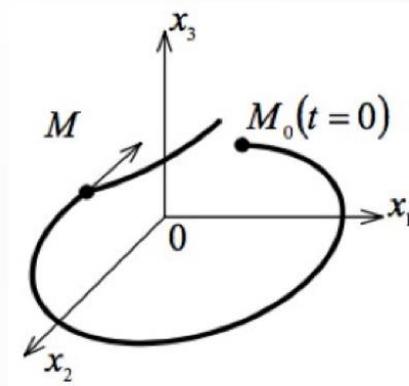
Простір змінних

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, f, v), \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, f, v), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, f, v) \end{cases}$$

Початкові умови

$$x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}$$

$$t = 0$$



Приклад автономної лінійної системи

Задача Коші. Зниження порядку рівняння заміною похідних змінних та формування системи рівнянь 1 порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$$



$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -a_1 \dot{x} - a_2 x, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Позбавлення незалежної змінної інтегрування поділом одного рівняння на інше

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{\dot{x}}$$

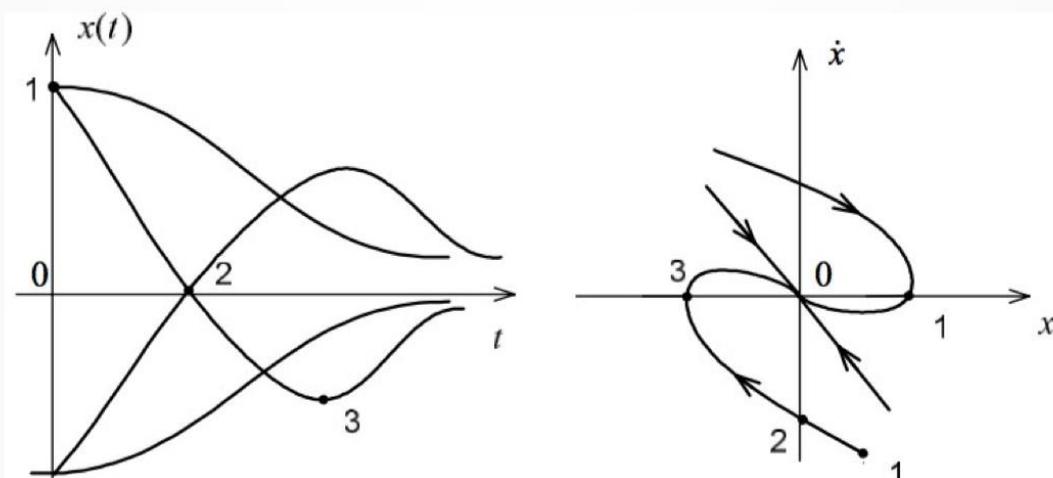
Загальне рішення

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 60

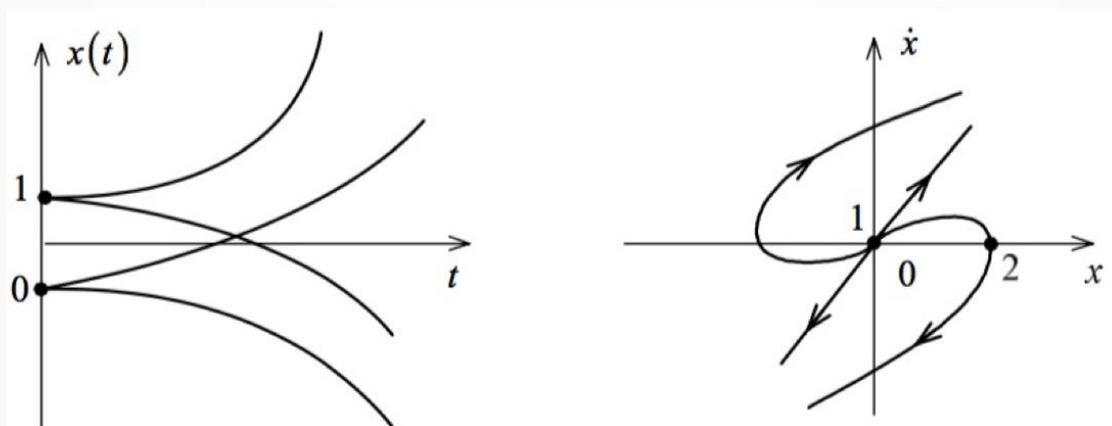
Варіанти розв'язку від параметрів

Корені дійсні та від'ємні $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$



Варіанти розв'язку від параметрів

Корені дійсні та додатні $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$

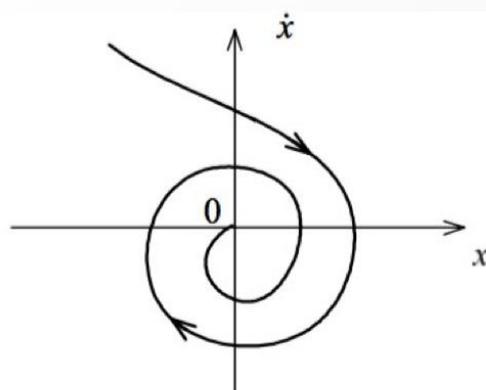
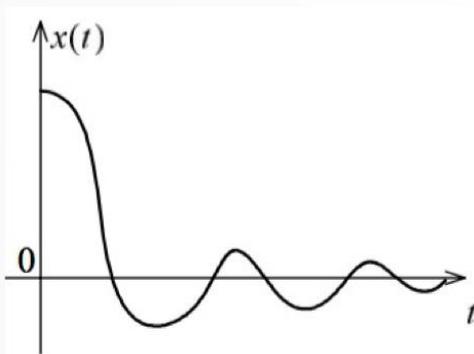


Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 61

Варіанти розв'язку від параметрів

Корені комплексні з від'ємною дійсною частиною

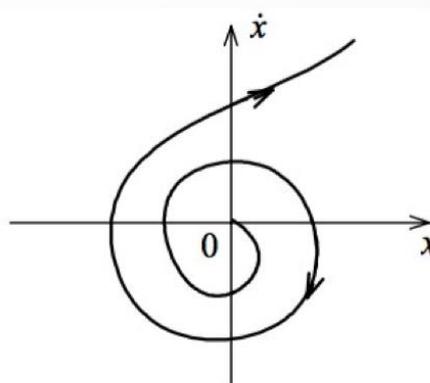
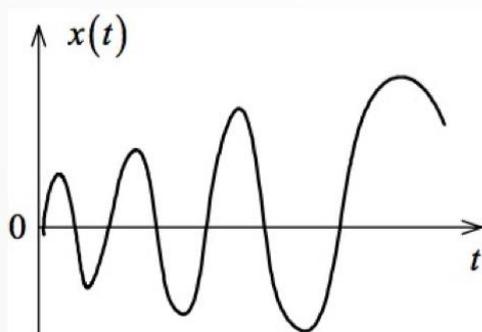
$$a_1^2 < 4a_2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$$



Варіанти розв'язку від параметрів

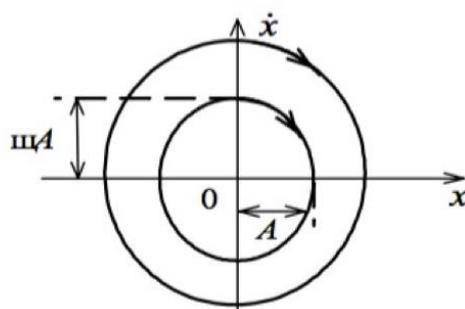
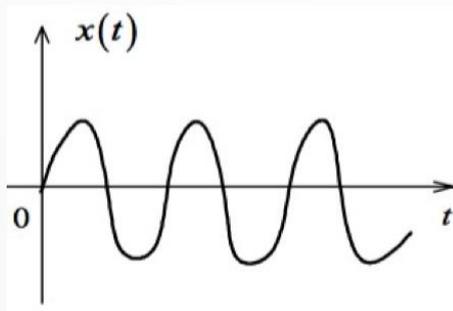
Корені комплексні з додатньою дійсною частиною

$$a_1^2 < 4a_2, \quad a_1 < 0, \quad a_2 > 0$$



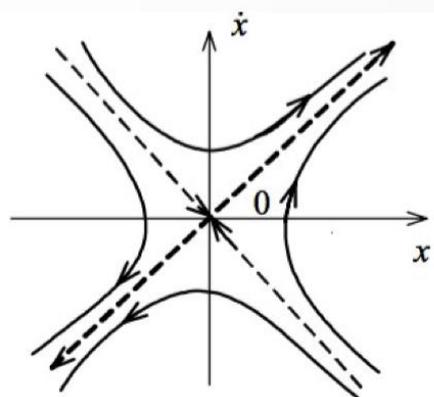
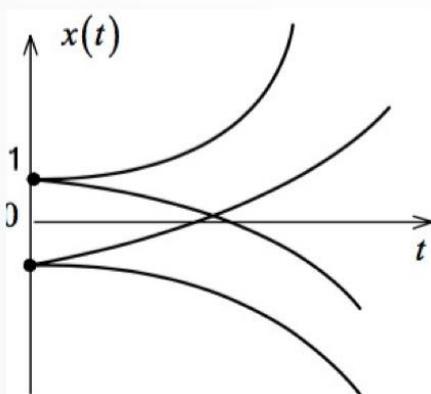
Варіанти розв'язку від параметрів

Корені суто уявні $a_1 = 0$, $a_2 > 0$



Варіанти розв'язку від параметрів

Корені із різними знаками $a_2 < 0$



Особливі точки

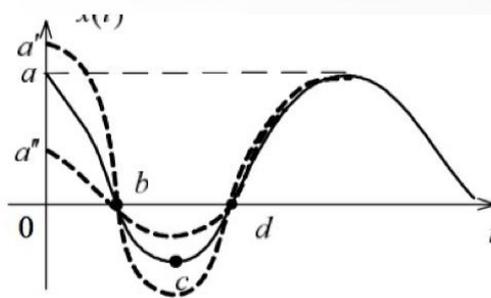
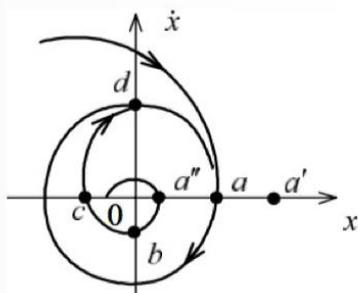
Точки, в яких нахил дотичних до фазових траєкторій при заданих початкових умовах є не однозначно визначеним називаються особливими

$$\frac{dx}{dt} = -a_1 - a_2 \frac{0}{0}$$

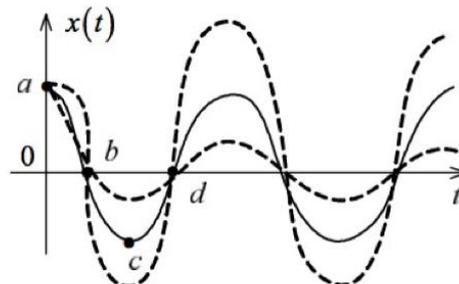
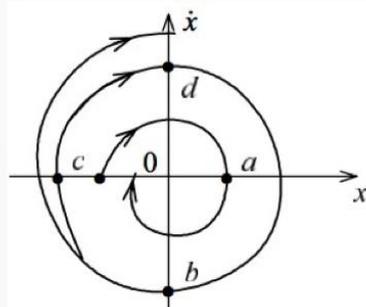
- Через всяку точку фазової площини за винятком особливих проходить лише одна фазова траєкторія (не перетинаються)
- У верхній напівплощині траєкторія формується зліва направо а у нижній справа наліво
- В точках де швидкість координати = 0 а їх функція не = 0 фазова траєкторія перетинає вісь абсцис під прямим кутом крім особливих точок

Класифікація фазових портретів за межевим циклом

Стійкий
межевий
цикл



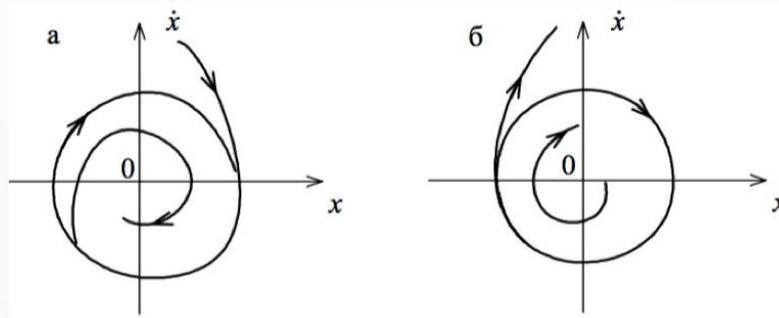
Не стійкий
межевий
цикл



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 64

Класифікація фазових портретів за межевим циклом

Напівстійкий межевий цикл



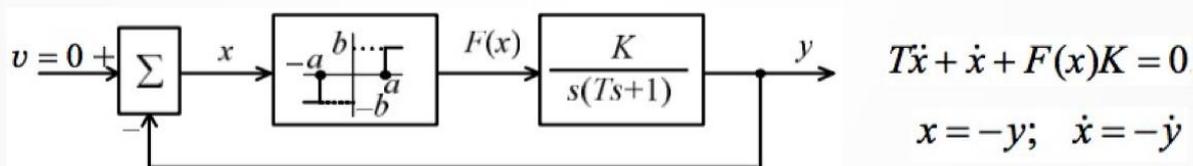
В бік стійкості
стійкості

В бік втрати

Методи побудови фазових портретів

- Метод побудови на окремих ділянках
- Метод ізоклін
- Метод Л'єнара
- Дельта метод

Метод побудови на окремих ділянках



$$T \frac{dy}{dt} + y = KF(x) \quad T \frac{dy}{dt} + y = K \begin{cases} b, & x > a, & y < a, \\ 0, & |x| < a, & |y| < a, \\ -b, & x < -a, & y > a. \end{cases}$$

Ділянка дії зони нечутливості

$$T \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad dt = \frac{dy}{\dot{y}}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{T} y + C_0 \quad \leftarrow \quad T \frac{dy}{dy} \dot{y} = -\dot{y} \quad dy = -\frac{1}{T} dy$$

Ліва (права симетрично) ділянка від зони нечутливості

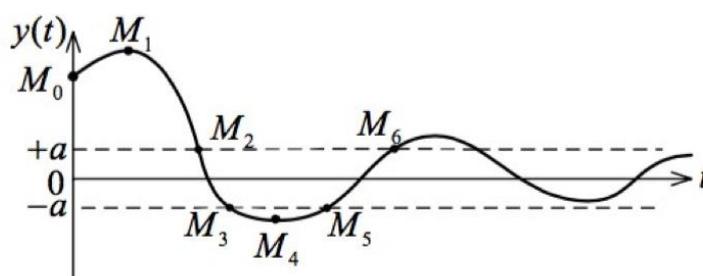
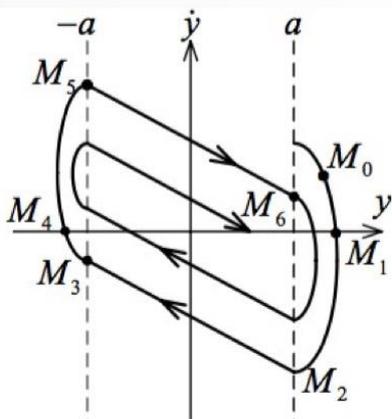
$$F(x) = -Kb \quad (x < -a, y > a)$$

$$T \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = -Kb \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dy}{\dot{y}} \quad \Rightarrow \quad T \frac{d\dot{y}}{dy} \dot{y} = -\dot{y} - Kb$$

$$\Rightarrow \quad dy = -T \frac{d\dot{y}}{\dot{y} + Kb} \quad \Rightarrow \quad \int dy = -T \int \frac{d\dot{y}(\dot{y} + Kb - Kb)}{\dot{y} + Kb} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y = T \left[\int -d\dot{y} + \int \frac{Kb}{\dot{y} + Kb} d\dot{y} \right] + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = T [Kb \ln(\dot{y} + Kb) - \dot{y}] + C_1$$

Фазова траєкторія



Сімейство фазових траєкторій, отриманих за різних початкових умов формує фазовий портрет, що характеризує один трьох граничних циклів та систему відповідно

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 67

Дякую за увагу

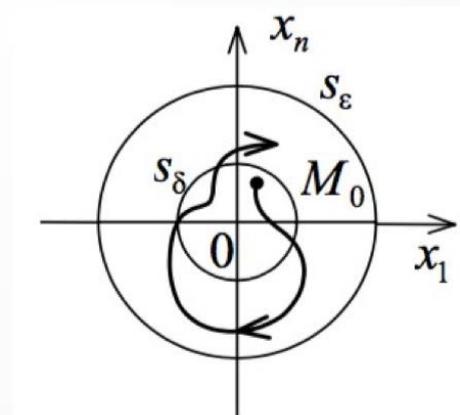
Аналіз нелінійних систем. Методи Ляпунова та Попова

Лекція №11

Визначення стійкості за Ляпуновим

Не збурений рух в автономній системі стійкий, якщо при малому параметрі ε можливо зазначити такий параметр δ що при початку рушу з підпростору s_δ ми не полишимо підпростору s_ε

- Якщо усі фазові координати збігаються до початку координат, система є асимптотично стійкою.
- Якщо фазові координати розбігаються, система не стійка або прямує до граничного циклу



$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(0) \in R^n$$

Лінійне наближення за Ляпуновим

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0$$

$$\dot{x} = Ax$$

Лінеаризація. Розклад у ряд Тейлора

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0} x$$

- Якщо лінеаризована система (ЛС) стійка, то вихідна нелінійна система буде також асимптотично стійкою “в малому” навколо стану рівноваги. Якщо ЛС не стійка, то нелінійна також не стійка.

Приклад застосування лінеаризації та наближення

Нелінійна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2. \end{cases}$$



$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 - 2x_2 = 0, \\ f_2 = x_1x_2 - x_2 = 0, \end{cases}$$

Початкові умови автономної системи

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = 0$$

Лінеаризація, визначення власних похідних

$$\dot{x}_1 = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x^0} x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x^0} x_2 = 2x_1 \Big|_0 x_1 + (-2) \Big|_0 x_2 = 0x_1 - 2x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x^0} x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x^0} x_2 = x_2 \Big|_0 x_1 + (x_1 - 1) \Big|_0 x_2 = 0x_1 - 1x_2.$$

Приклад застосування лінеаризації та наближення

Матрична форма лінеаризованої системи

$$\dot{X} = AX \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$(\det[\lambda E - A] = 0)$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 0 = 0.$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1.$$

Оскільки один з коренів 0 — про стійкість системи не можливо нічого сказати (не усі від'ємні)

Другий метод Ляпунова

- Не потрібно розв'язувати систему диф. рівнянь

Функція Ляпунова

$$\text{Додатно визначена} \quad \begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Від'ємно визначена} \quad \begin{cases} V(x) < 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

Повна похідна

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x).$$

$$\dot{V}(0) = 0.$$

Теорема Ляпунова

- Стан системи є асимптотично стійким, якщо для додатно визначеної функції Ляпунова її повна похідна є від'ємно визначена функція.

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \neq 0, & V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) < 0 & \forall x \neq 0, & \dot{V}(0) = 0. \end{cases}$$

- Стан системи не стійкий якщо

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \neq 0, & V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) > 0 & \forall x \neq 0, & \dot{V}(0) = 0 \end{cases}$$

Приклад використання другого методу Ляпунова

Нелінійна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Обрана функція Ляпунова за умов теореми 1

$$\begin{cases} V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall x \neq 0, \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

Повна похідна

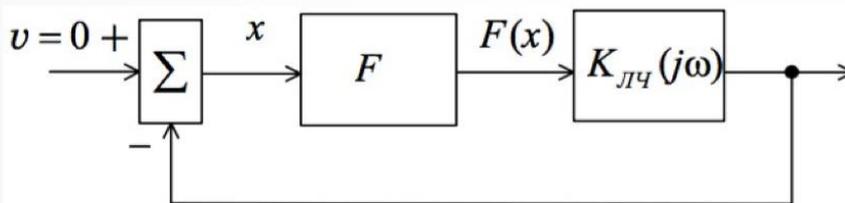
$$\dot{V}(x) = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \dot{V}(0) = 0$$

Отже система має стійкий стан

Підбір додатно визначених функцій не тривіальний

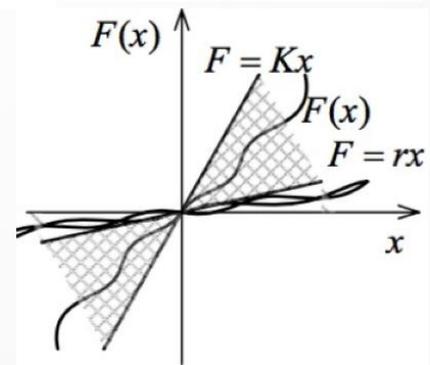
Аналіз стійкості нелінійних систем методом В.М.Попова



Реальна нелінійність

$$rx < F(x) < F = Kx$$

$$r < F(x)/x < K \quad F(0) = 0$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 72

Аналіз стійкості нелінійних систем методом В.М.Попова

Критерій Попова:

Для того, щоб вільний рух системи був абсолютно стійким при нелінійності, що знаходиться в секторі $[0, K]$ достатньо, щоб існувало таке дійсне число q , при якому для всіх $\omega > 0$ виконувалась нерівність:

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{K}$$

$$U(\omega) = \operatorname{Re}[K_{\text{ЛЧ}}(j\omega)] \quad V(\omega) = \operatorname{Im}[K_{\text{ЛЧ}}(j\omega)]$$

Аналіз стійкості нелінійних систем методом В.М.Попова

Розширена частотна характеристика

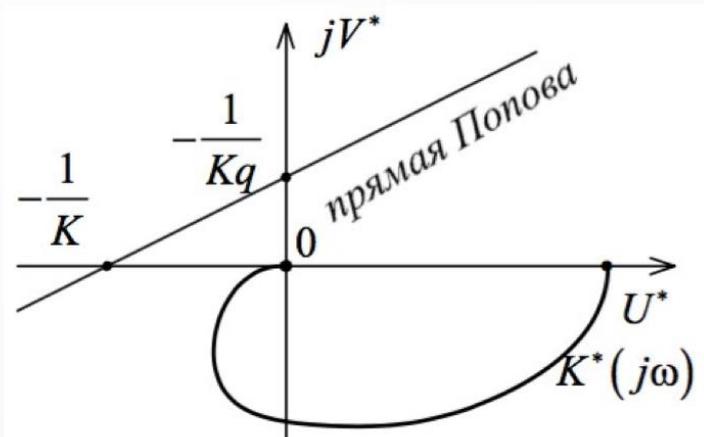
$$U^*(\omega) = U(\omega), \quad K^*(j\omega) = U(\omega) + jV^*(\omega)$$

$$V^*(\omega) = \omega V(\omega)$$

Умова $U^*(\omega) - qV^*(\omega) = -\frac{1}{K}$

$$U^* = 0, \quad V^* = \frac{1}{Kq}$$

$$V^* = 0, \quad U^* = -\frac{1}{K}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 73

Дякую за увагу

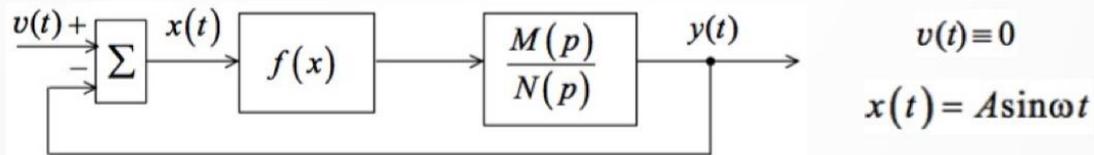
Метод гармонійної лінеаризації

Лекція №12

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 74

Визначення

Використовується для дослідження умов виникнення автоколивань та їх параметрів



Для розв'язання задачі проводиться лінеаризація у вигляді:

$$f(x) = K_H(A)x$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \text{ при } k = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin k\omega t d\omega t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos k\omega t d\omega t.$$

Припущення

- Лінійна частина системи є фільтром низьких частот
- Нелінійна характеристика є симетричною

$$f(x) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$$

$$f(x) = \frac{a_1}{A} A \sin \omega t + \frac{b_1}{A\omega} A\omega \cos \omega t$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

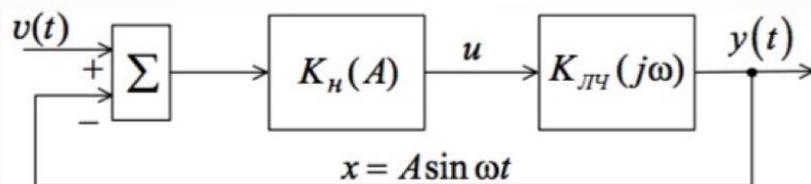


$$x = A \sin \omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t = px = j\omega x$$

$$f(x) = \left(\frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \right) x = (q(A) + jq'(A)) x = K_n(A)x$$

Представлення системи



Рівняння вільного руху системи: $N(p)y(t) + M(p)f(x) = 0$

Для неоднозначної характеристики НЕ:

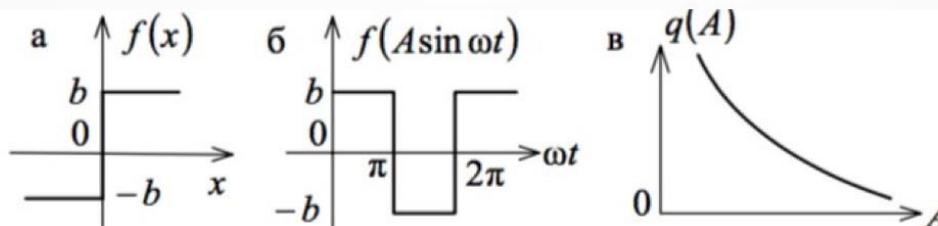
$$q'(A) = 0, \text{ а } q(A) = 4 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\bullet)$$

Для однозначної характеристики НЕ:

$$q(A) = 2 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (\bullet); \quad q'(A) = 2 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (\bullet)$$

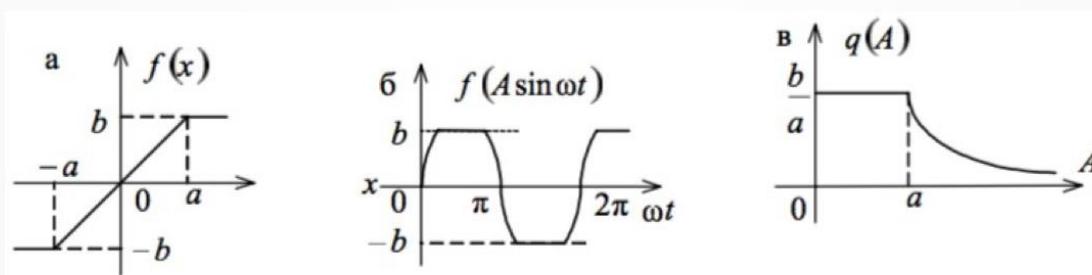
Лінеаризація НЕ ідеального реле

$$q'(A) = 0; \quad q(A) = 4 \cdot \frac{1}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \omega t \, d\omega t = \frac{4b}{\pi A} \left(-\cos \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4b}{\pi A}$$



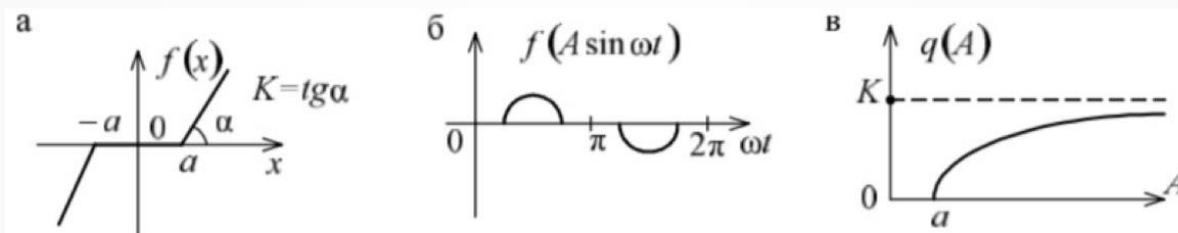
Лінеаризація НЕ насичення

$$q(A) = \frac{b}{a} - \frac{2b}{a\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$$



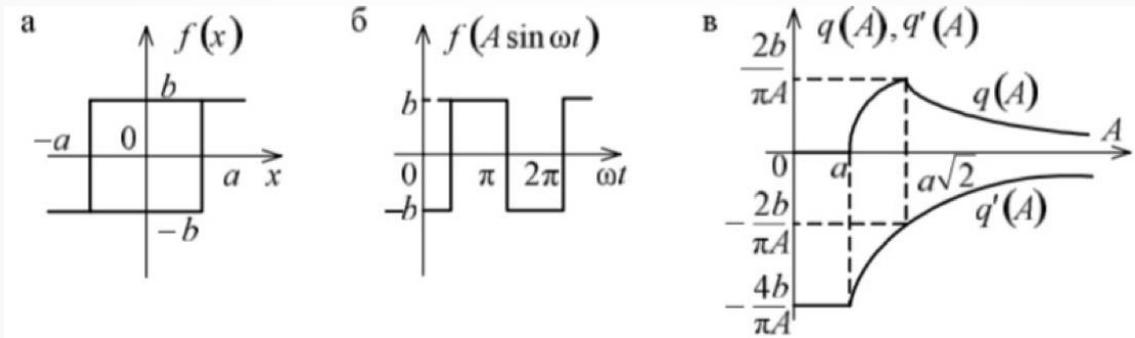
Лінеаризація НЕ мертвої зони

$$q(A) = K - \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) \quad A > a$$

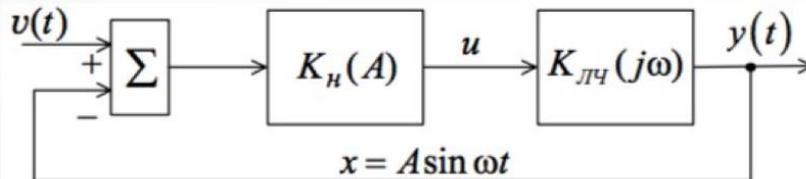


Лінеаризація НЕ петля гістерезису

$$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \quad q'(A) = -\frac{4ba}{\pi A^2}$$



Визначення амплітуди та частоти автоколивань аналітично



$$D(j\omega, A) = 1 + K_H(A)K_{ЛЧ}(j\omega) = 1 + \frac{K_H(A)M(j\omega)}{N(j\omega)} = 0$$

Умови наявності
коливань за
Найквістом

$$N(j\omega) + K_H(A)M(j\omega) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega, A)] = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega, A)] = 0 \end{cases}$$

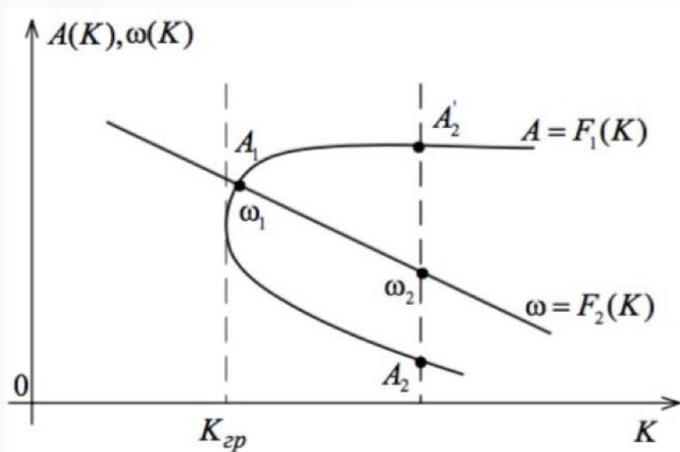
Дієвий для систем до 4
порядку та простих НЕ

Оцінка впливу внутрішніх параметрів

Π — коефіцієнт передачі чи тала часу

$$D(j\omega, A, \Pi) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega, A, \Pi)] = 0, \\ \operatorname{Im}[D(j\omega, A, \Pi)] = 0. \end{cases}$$



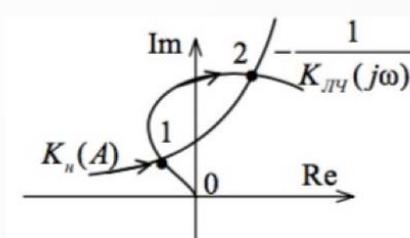
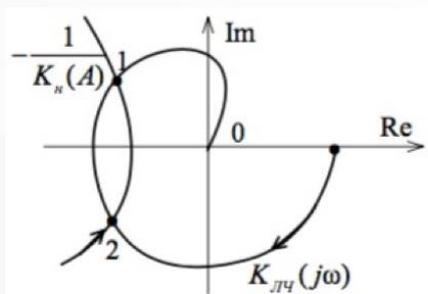
Одне з двох отриманих варіантів рішень є нестійким (фізично не виконуваним)

Визначення амплітуди та частоти автоколивань графоаналітично (метод Гольдфарба / Коченбургера)

$$1 + K_{ЛЧ}(j\omega)K_H(A) = 0$$

$$K_{ЛЧ}(j\omega) = -\frac{1}{K_H(A)}$$

$$K_H(A) = -\frac{1}{K_{ЛЧ}(j\omega)}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 79

Дякую за увагу

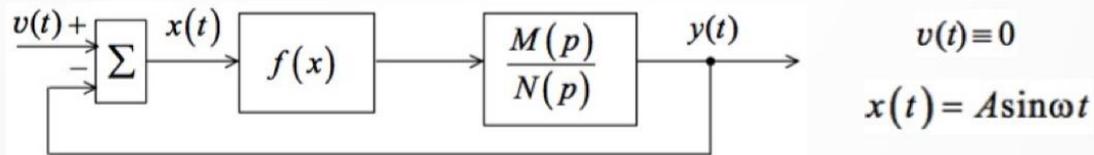
Метод гармонійної лінеаризації

Лекція №12

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 80

Визначення

Використовується для дослідження умов виникнення автоколивань та їх параметрів



Для розв'язання задачі проводиться лінеаризація у вигляді:

$$f(x) = K_H(A)x$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \text{ при } k = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin k\omega t d\omega t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos k\omega t d\omega t.$$

Припущення

- Лінійна частина системи є фільтром низьких частот
- Нелінійна характеристика є симетричною

$$f(x) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$$

$$f(x) = \frac{a_1}{A} A \sin \omega t + \frac{b_1}{A\omega} A\omega \cos \omega t$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

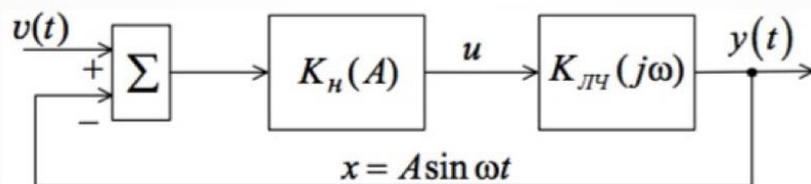


$$x = A \sin \omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t = px = j\omega x$$

$$f(x) = \left(\frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \right) x = (q(A) + jq'(A)) x = K_n(A)x$$

Представлення системи



Рівняння вільного руху системи: $N(p)y(t) + M(p)f(x) = 0$

Для неоднозначної характеристики НЕ:

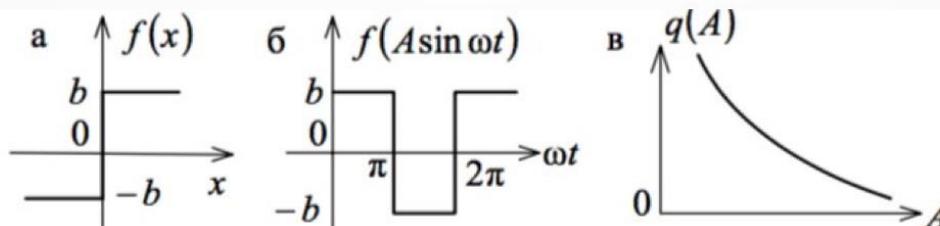
$$q'(A) = 0, \text{ а } q(A) = 4 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\bullet)$$

Для однозначної характеристики НЕ:

$$q(A) = 2 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (\bullet); \quad q'(A) = 2 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (\bullet)$$

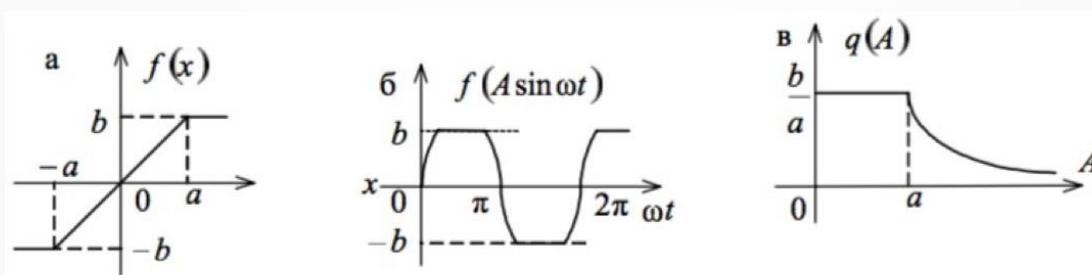
Лінеаризація НЕ ідеального реле

$$q'(A) = 0; \quad q(A) = 4 \cdot \frac{1}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \omega t \, d\omega t = \frac{4b}{\pi A} \left(-\cos \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4b}{\pi A}$$



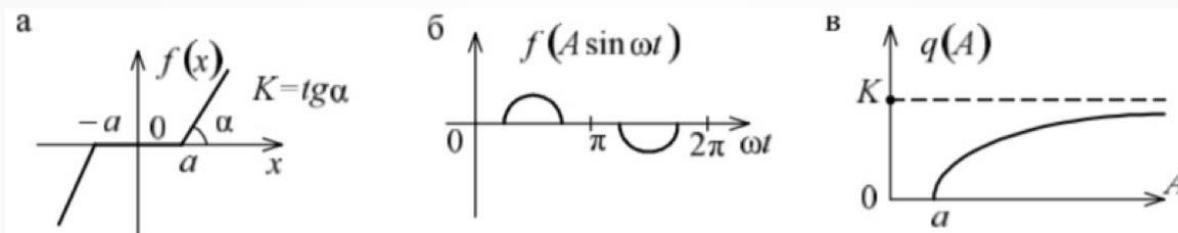
Лінеаризація НЕ насичення

$$q(A) = \frac{b}{a} - \frac{2b}{a\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$$



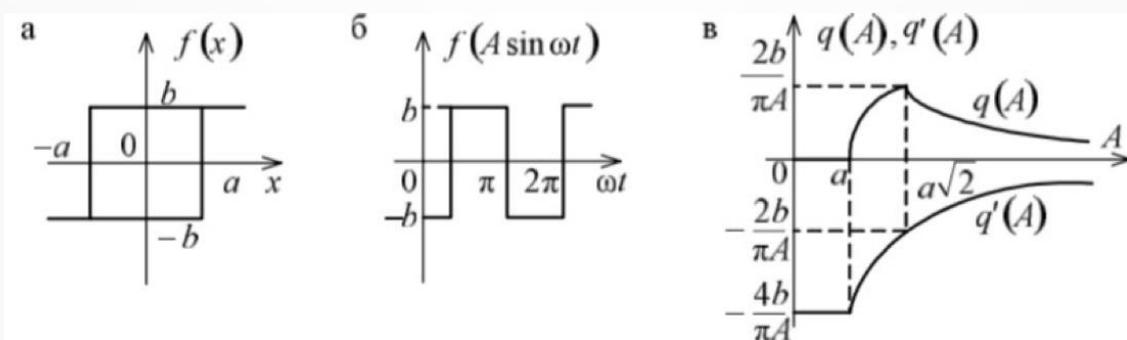
Лінеаризація НЕ мертвої зони

$$q(A) = K - \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) \quad A > a$$

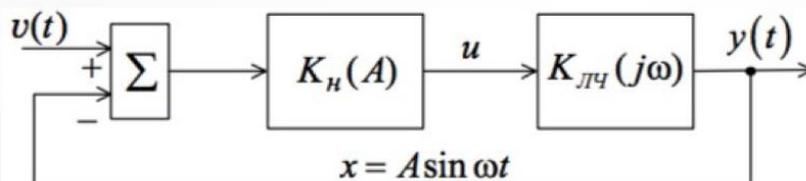


Лінеаризація НЕ петля гістерезису

$$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \quad q'(A) = -\frac{4ba}{\pi A^2}$$



Визначення амплітуди та частоти автоколивань аналітично



$$D(j\omega, A) = 1 + K_H(A)K_{ЛЧ}(j\omega) = 1 + \frac{K_H(A)M(j\omega)}{N(j\omega)} = 0$$

Умови наявності
коливань за
Найквістом

$$N(j\omega) + K_H(A)M(j\omega) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega, A)] = 0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega, A)] = 0 \end{cases}$$

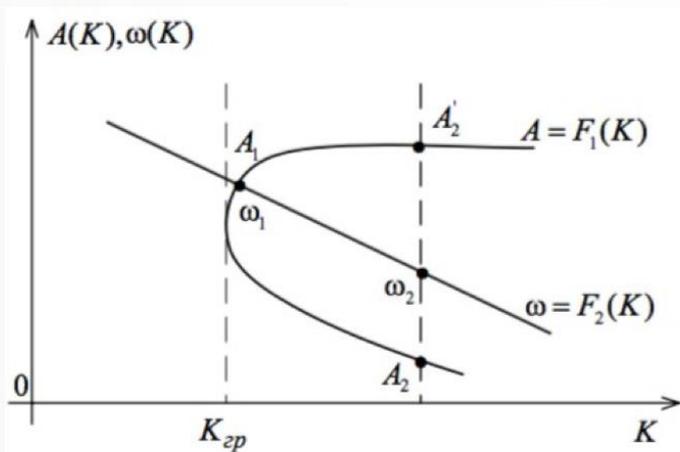
Дієвий для систем до 4
порядку та простих НЕ

Оцінка впливу внутрішніх параметрів

Π — коефіцієнт передачі чи тала часу

$$D(j\omega, A, \Pi) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega, A, \Pi)] = 0, \\ \operatorname{Im}[D(j\omega, A, \Pi)] = 0. \end{cases}$$



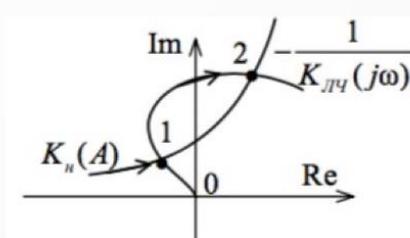
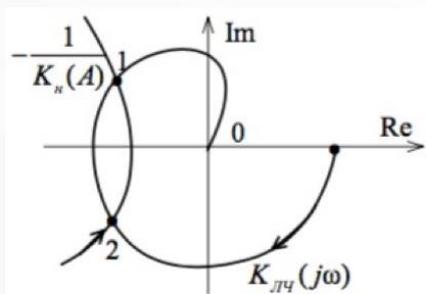
Одне з двох отриманих варіантів рішень є нестійким (фізично не виконуваним)

Визначення амплітуди та частоти автоколивань графоаналітично (метод Гольдфарба / Коченбургера)

$$1 + K_{ЛЧ}(j\omega)K_H(A) = 0$$

$$K_{ЛЧ}(j\omega) = -\frac{1}{K_H(A)}$$

$$K_H(A) = -\frac{1}{K_{ЛЧ}(j\omega)}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	<i>Випуск 1</i>	<i>Зміни 0</i>	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 90 / 85</i>

Дякую за увагу

Корекція нелінійних СИСТЕМ

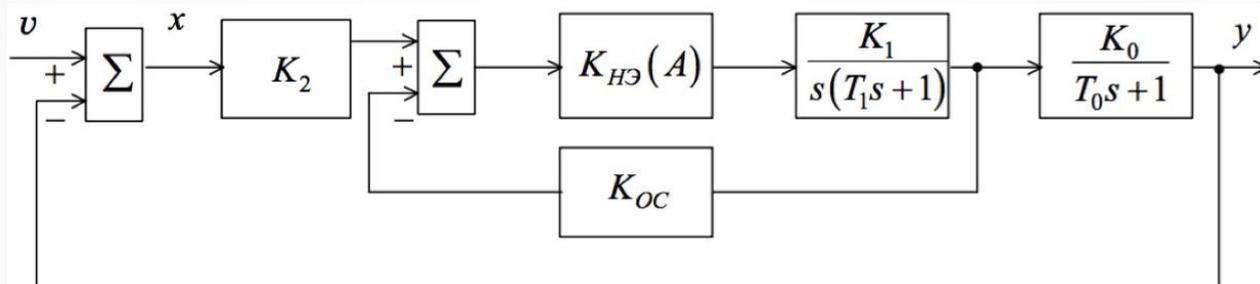
Лекція №14

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 86

Напрямки корекції

- Підвищення стійкості, точності та якості
- Подолання автоколивань
- Створення стійких коливань із сталою амплітудою та частотою

Корекція за зворотнім зв'язком



Характеристичне рівняння:

$$T_0 T_1 \lambda^3 + (T_0 + T_1) \lambda^2 + (1 + T_0 q(A) K_1 K_{OC}) \lambda + K_{H3}(A) K_1 (K_{OC} + K_2 K_0) = 0$$

За критерієм стійкості за Гурвіцем (2-й детермінант):

$$(T_0 + T_1)(1 + T_0 K_{H3}(A) K_1 K_{OC}) > T_0 T_1 K_{H3}(A) K_1 (K_{OC} + K_2 K_0)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск I	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 87

Корекція за зворотнім зв'язком

Умова наявності автоколивань

$$T_0 + T_1 > T_0^2 K_{НЭ}(A) K_1 \left[\frac{T_1}{T_0} K_2 K_0 - K_{OC} \right]$$

В системі автоколивання не можливі

$$K_{OC} = \frac{T_1}{T_0} K_2 K_0$$

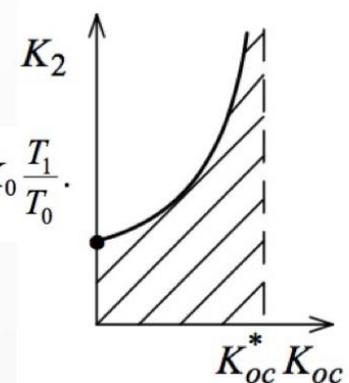
В системі будуть автоколивання

$$K_1 > \frac{T_1 + T_0}{T_0 K_{НЭ}(A) (T_1 K_2 K_0 - T_0 K_{OC})}$$

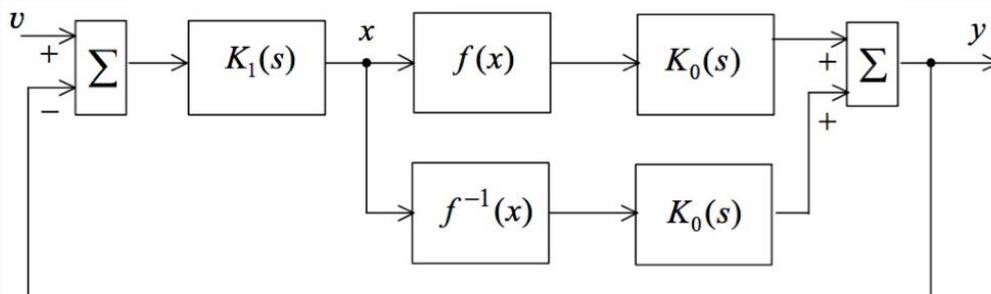
Корекція за зворотнім зв'язком

Для двопозиційного реле $K_{НЭ}(A)_{\max} = \frac{2I}{\pi A}$

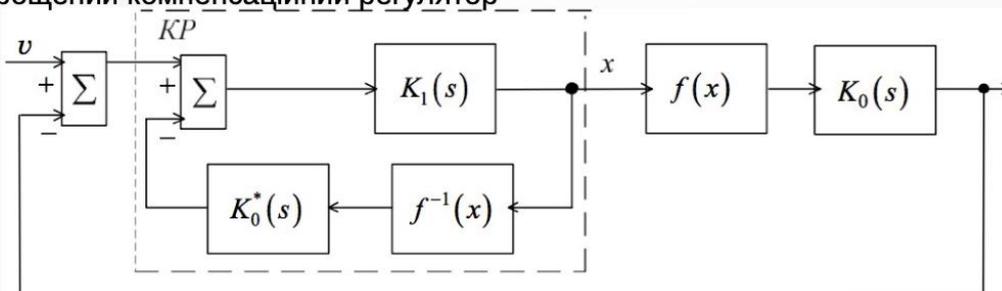
$$K_1 = \frac{\pi A (T_0 + T_1)}{2I T_0 (T_1 K_2 K_0 - T_0 K_{OC}^*)}, T_1 K_2 K_0 - T_0 K_{OC}^* = 0, K_{OC}^* = K_2 K_0 \frac{T_1}{T_0}$$



Компенсаційна модель подолання автоколивань



Спрощений компенсаційний регулятор



Вібраційна лінеаризація

Вхід нелінійного елемента (НЕ)

$$x(t) = x_0(t) + A \sin \omega t$$



Вихід НЕ за умови високої частоти та незмінності к-ту гармонійної передачі

$$\frac{U_m}{2\pi} [\pi + 2\varphi - (\pi - 2\varphi)] = \frac{2U_m}{\pi} \varphi$$

$$\varphi = \arcsin \frac{x_0}{A} \approx \frac{x_0}{A}, \quad \sin \frac{\pi}{2} \approx A, \quad \sin \varphi \approx x_0$$

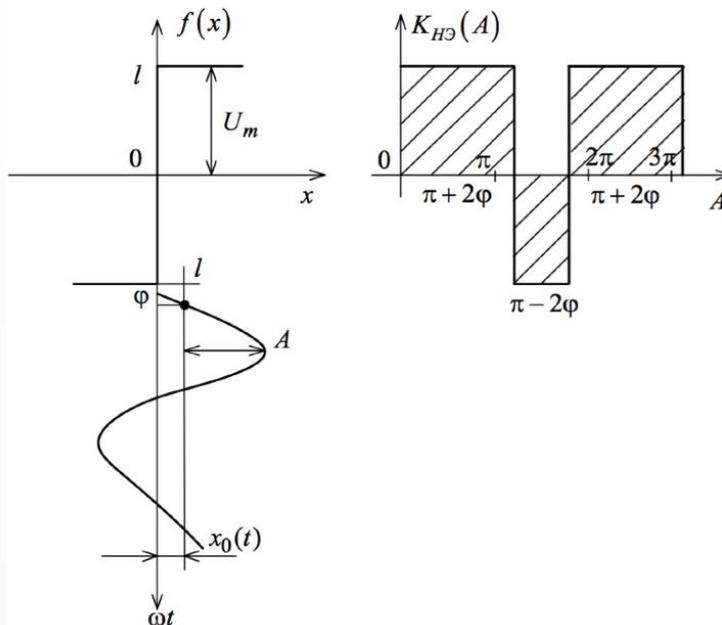


$$f(x_0) = \frac{2U_m}{\pi A} x_0$$

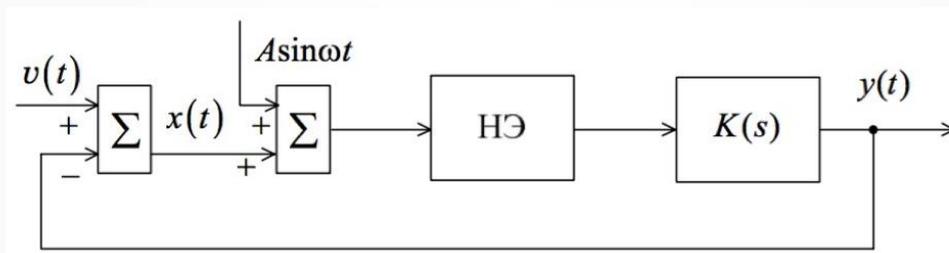
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 89

Формування сигналів та зв'язок з параметрами

При послідовному з'єднанні НЕ та лінійної системи автоколивання можна виключити



Перший метод корекції

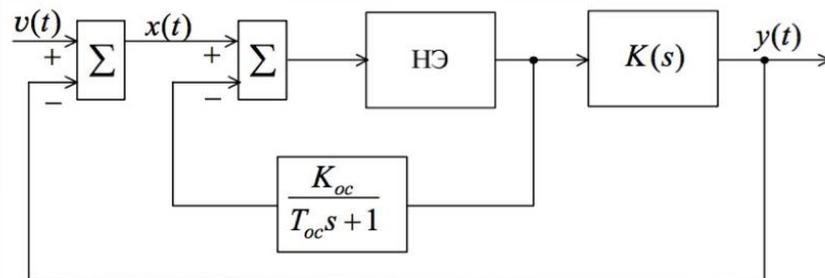


В систему вводиться генератор, що може бути налаштований на потрібні амплітуду і частоту

Недолік — потреба в активному генераторі

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019			Ф-20.10- 05.01/141.00.1/Б/ ОК22-2-2025
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 90 / 90

Другий метод корекції



Частота підбирається таким чином, щоб за один період коливаний помилка управління не змінилась а амплітуда вибирається так, щоб $\arcsin(x)$ приблизно дорівнював x

Недолік - сильно послаблюється сигнал похибки керування

Дякую за увагу