Лекція 7

Дослідження параметрів вільних коливань математичного маятника

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Мета лекції

Ознайомлення з фізичною моделлю математичного маятника та дослідження параметрів його вільних коливань:

- періоду
- частоти
- амплітуди
- фази
- залежності періоду від довжини та прискорення вільного падіння

Математичний маятник

Математичний маятник — матеріальна точка маси m, підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжини l, що здійснює коливання під дією сили тяжіння.

Припущення моделі:

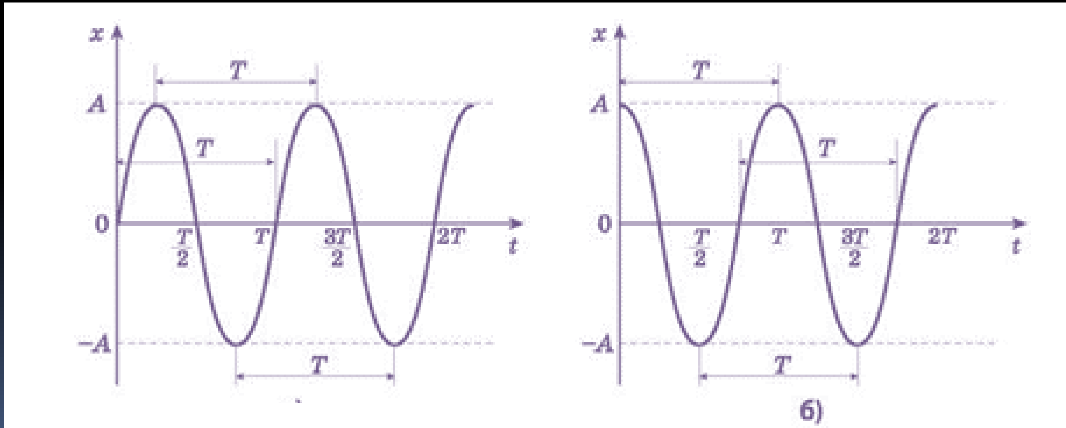
- нитка не має маси
- тертя та опір повітря відсутні
- коливання малі

Характеристики рівномірного руху по колу матеріальної точки

- Період і частота обертання
- Довжина і радіус траєкторії, кут повороту
- Кутова швидкість
- Доцентрове прискорення

Гармонічні коливання

Гармонічними коливаннями називаються періодичні коливання фізичної величини (або будь-якої іншої) залежно від часу, які відбуваються згідно із законами синуса або косинуса



$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Кінематичне рівняння гармонічних коливань

$$x(t) = A cos(\omega t + \phi_0)$$

x - зміщення від положення рівноваги

A - максимальне зміщення від положення рівноваги - амплітуда

ω - циклічна частота (кількість коливань за 2π секунди)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

φ - фаза коливань

φ_0 - початкова фаза коливань

Диференціальне рівняння величини, що здійснює гармонічні коливання

$$v = dx/dt = A(-sin(\omega t + \phi_0))\omega = -\omega A sin(\omega t + \phi_0)$$

$$a = dv/dt = -\omega A cos(\omega t + \phi_0)\omega = -\omega^2 x$$

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

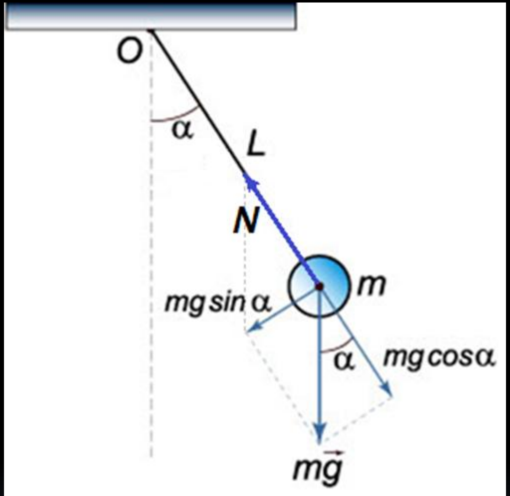
Математичний маятник

Коливна система – точкове тіло на нерозтяжній невагомій нитці.

Нехтуємо:

- масою нитки (значно менша маси тіла);
- розмірами тіла (значно менші розмірів нитки);
- розтягом нитки;
- тертям об повітря.

Сила, яка повертає тіло у положення рівноваги, ***mgsinα*** періодично змінюється як за величиною, так і за напрямом.
У положенні рівноваги вона рівна 0 (sin 0º =0), однак тіло продовжує рухатись за інерцією.



Математичний маятник

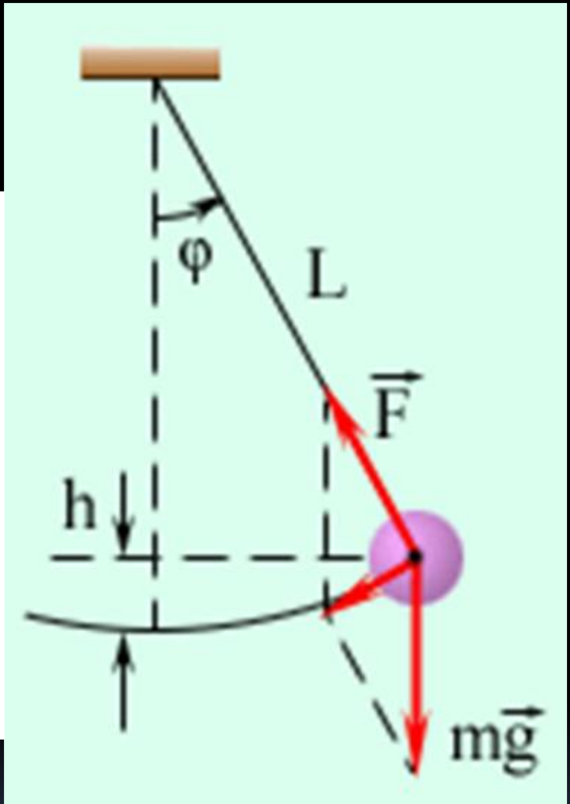
Вільні коливання математичного маятника при малих амплітудах є гармонічними.

$$F = mg \cdot sin\phi = mg \cdot \frac{x}{l}$$

$$a = -\frac{g}{l}x = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

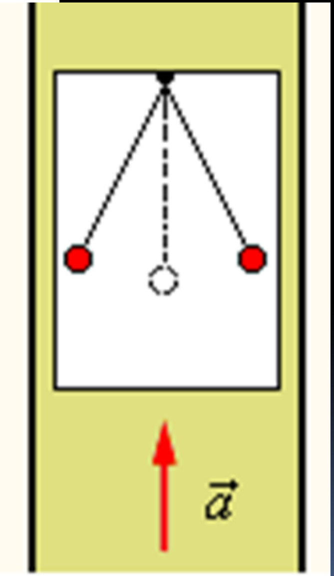
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$



Період коливань не залежить від маси тіла чи амплітуди коливань, а визначається лише довжиною підвісу та прискоренням вільного падіння у даному місці.

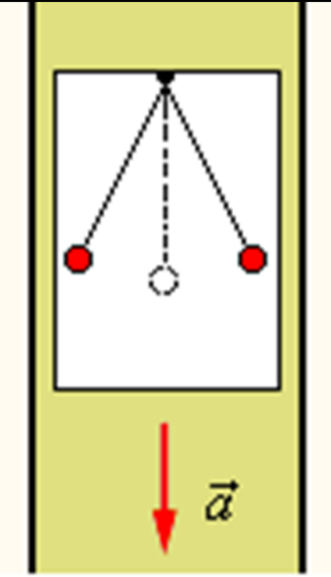
Математичний маятник

Якщо математичний маятник знаходиться в системі відліку, що рухається вертикально з прискоренням, то слід враховувати це прискорення:



Прискорення напрямлене ***вгору***: ліфт починає рух вгору, гальмує при русі вниз

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

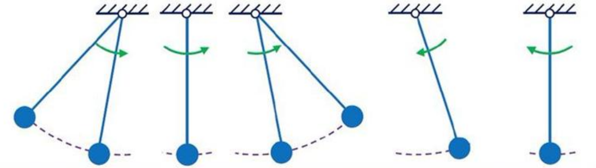


Прискорення напрямлене ***вниз***: ліфт починає рух вниз, гальмує при русі вгору

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

Під час незатухаючих коливань повна механічна енергія системи незмінна, однак потенціальна і кінетична енергії тіла періодично змінюються.

$$\boldsymbol{W = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_{max}{}^2}{2} = mgh_{max}}$$



	1	2	3	4	5	6	7
h	h_{max}	h_2	0	h_4	h_{max}	h_6	0
υ	0	υ_1	υ_{max}	υ_4	0	υ_6	υ_{max}
W_p	$W_{p\,max}$	W_{p2}	0	W_{p4}	$W_{p\,max}$	W_{p6}	0
W_k	0	W_{k2}	$W_{k\,max}$	W_{k4}	0	W_{k6}	$W_{k\,max}$
W	$W_{p\,max}$	$W_{p2} + W_{k2}$	$W_{k\,max}$	$W_{p4} + W_{k4}$	$W_{p\,max}$	$W_{p6} + W_{k6}$	$W_{k\,max}$