Лекція 5
Зіткнення двох куль
(продовження)

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Класифікація зіткнень

За енергією

- **Абсолютно пружне зіткнення**
  - зберігається імпульс;
  - зберігається кінетична енергія.
- **Абсолютно непружне зіткнення**
  - зберігається імпульс;
  - максимальна втрата кінетичної енергії;
  - тіла рухаються разом після удару.
- **Частково пружне зіткнення**
  - зберігається імпульс;
  - частина енергії втрачається (тепло, деформація, звук).

За напрямком

- **Лобове (центральне)** — швидкості спрямовані вздовж лінії центрів.
- **Косе** — швидкості мають складові, перпендикулярні до лінії удару.

Алгоритм моделювання зіткнення (узагальнений)

- Перевірка факту зіткнення:
$$|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \leq r_1 + r_2$$
- Обчислення нормалі зіткнення.
- Проєкція швидкостей на нормаль.
- Застосування закону збереження імпульсу.
- Врахування коефіцієнта відновлення.
- Корекція положень (щоб уникнути «залипання»).

Закон збереження імпульсу

Для двох куль:

$$\vec{p}_{\text{до}} = \vec{p}_{\text{після}}$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Цей закон виконується **завжди**, незалежно від типу зіткнення (у замкненій системі).

Закон збереження кінетичної енергії

Для двох куль:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Тільки для абсолютно пружного лобового зіткнення.

Геометрія зіткнення куль

Ключова ідея:

- взаємодія відбувається **вздовж нормалі зіткнення**.

Нормаль:

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}$$

Швидкість розкладається на:

- нормальну складову;
- дотичну складову (не змінюється при ідеальному зіткненні без тертя).

Швидкості куль при абсолютно пружному центральному зіткненні

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \dfrac{m_1{u_1}^2}{2} + \dfrac{m_2{u_2}^2}{2} = \dfrac{m_1{v_1}^2}{2} + \dfrac{m_2{v_2}^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ \dfrac{m_1({u_1}^2 - {v_1}^2)}{2} = \dfrac{m_2({v_2}^2 - {u_2}^2)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ \dfrac{m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1)}{2} = \dfrac{m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)}{2} \end{cases}$$

Швидкості куль при абсолютно пружному центральному зіткненні (продовження)

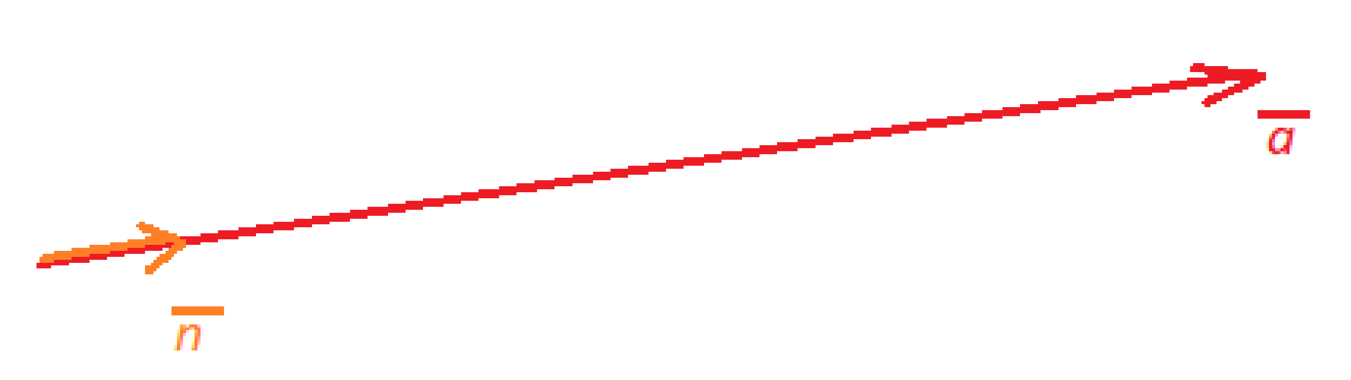
$$\begin{cases} m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ u_1 + v_1 = v_2 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = u_1 + v_1 - u_2 \\ m_1u_1 - m_1v_1 = m_2u_1 + m_2v_1 - 2m_2u_2 \end{cases}$$

$$m_1u_1 - m_2u_1 + 2m_2u_2 = m_2v_1 + m_1v_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \frac{u_1(m_1 - m_2) + 2m_2u_2}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{u_2(m_2 - m_1) + 2m_1u_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

Координати одиничного вектора в напрямку даного вектора

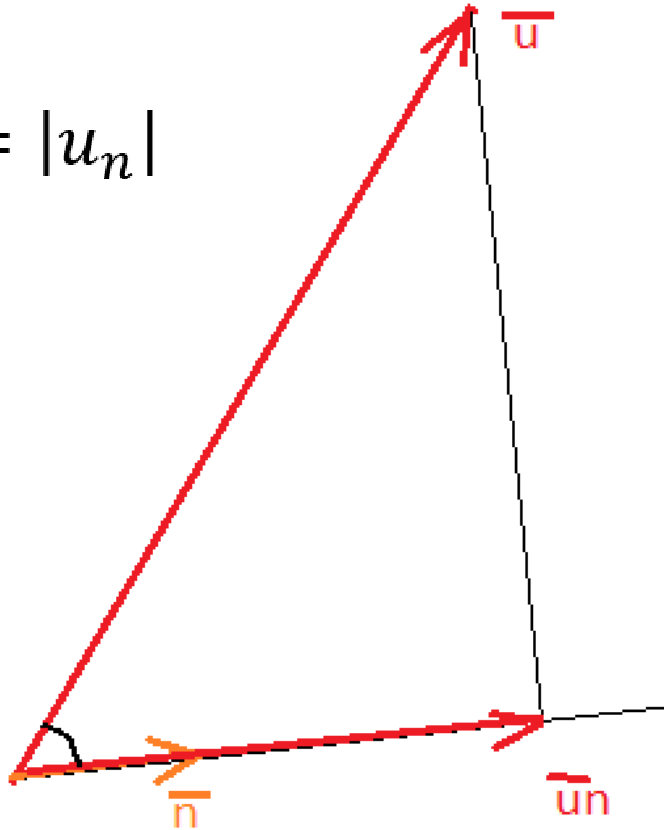


$$\bar{n} = (n_x, n_y) = \left(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|}\right)$$

Довжина проекції вектора на нормалізований вектор

$$(\bar{u}\bar{n}) = |u| \cdot |n| \cdot cos\varphi = |u|cos\varphi = |u_n|$$

$$\boxed{|u_n| = (\bar{u}\bar{n}) = u_x n_x + u_y n_y}$$



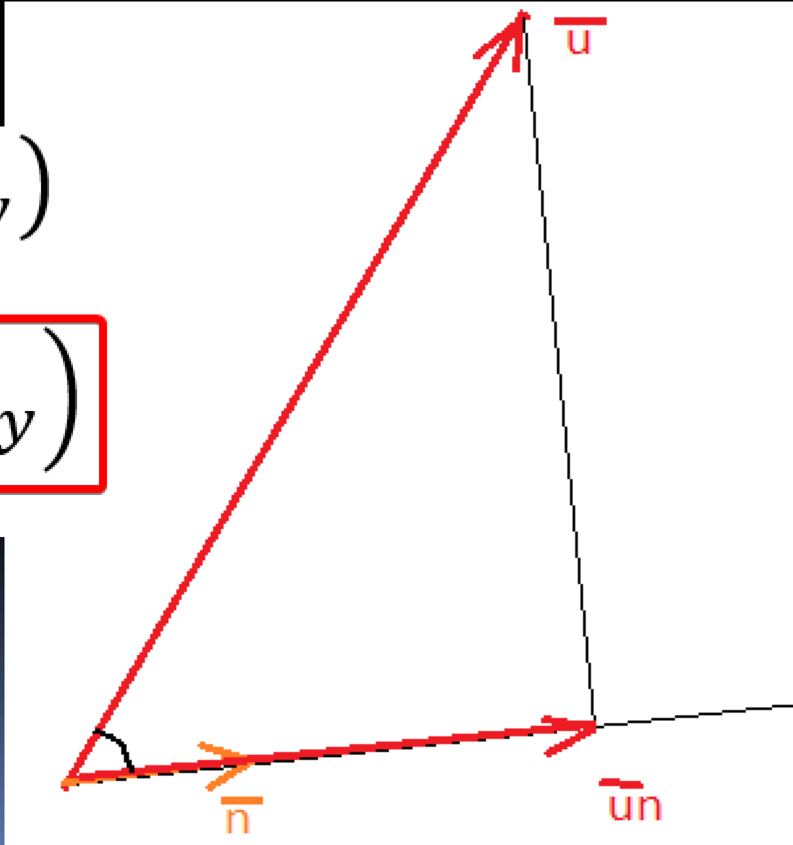
Скалярний добуток двох векторів

Координати проекції вектора на нормалізований вектор

$$\bar{u}_n = \left(|u_n| \cdot n_x, |u_n| \cdot n_y\right)$$

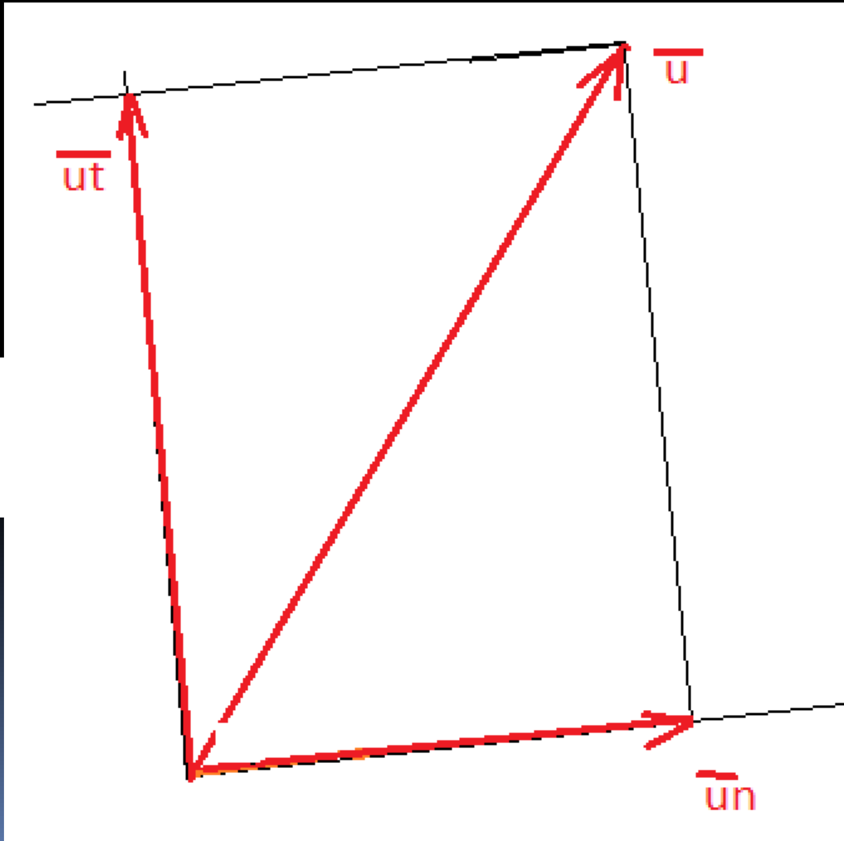
$$\boxed{\bar{u}_n = \left((\bar{u}\bar{n}) \cdot n_x, (\bar{u}\bar{n}) \cdot n_y\right)}$$

Вектор нормальної складової швидкості



Визначення координат вектора за його складовими:

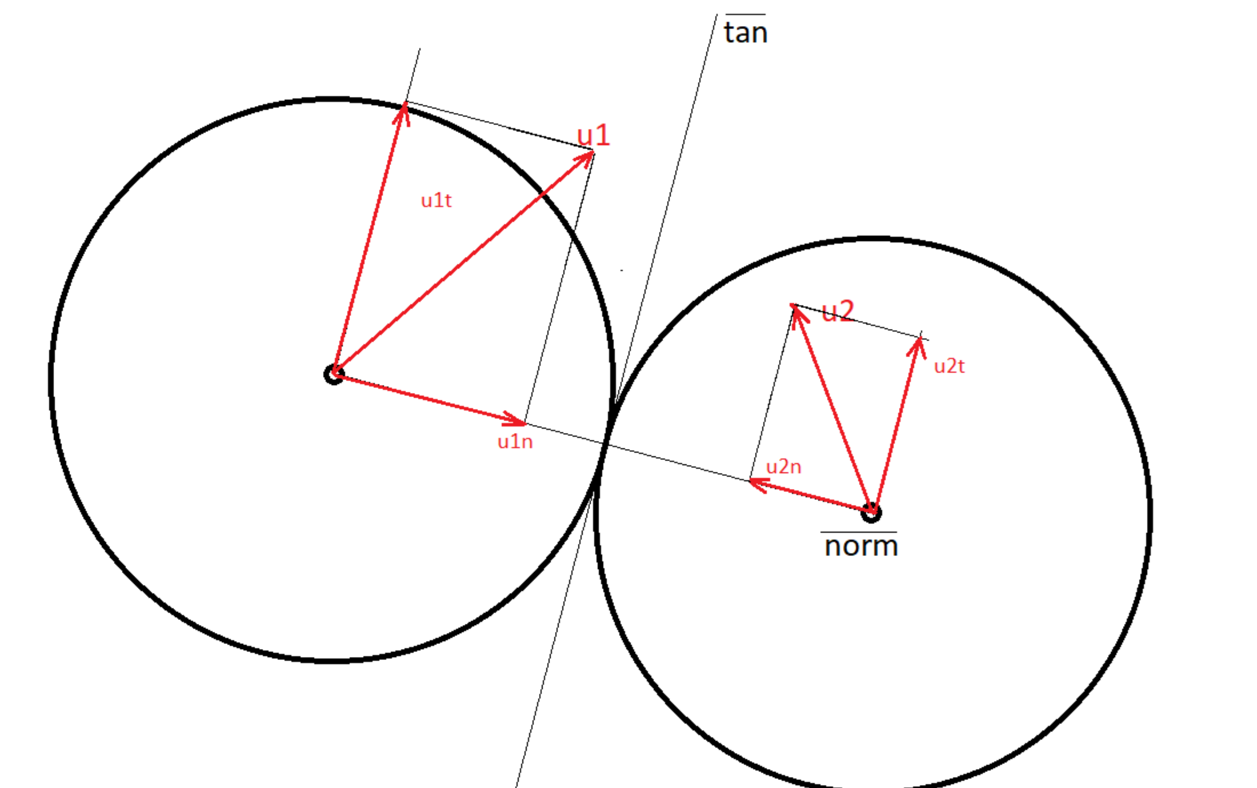
$$\bar{u} = (u_{tx} + u_{nx}, u_{ty} + u_{ny})$$



Рух куль розкладемо на нормальну і тангенсіальну складові

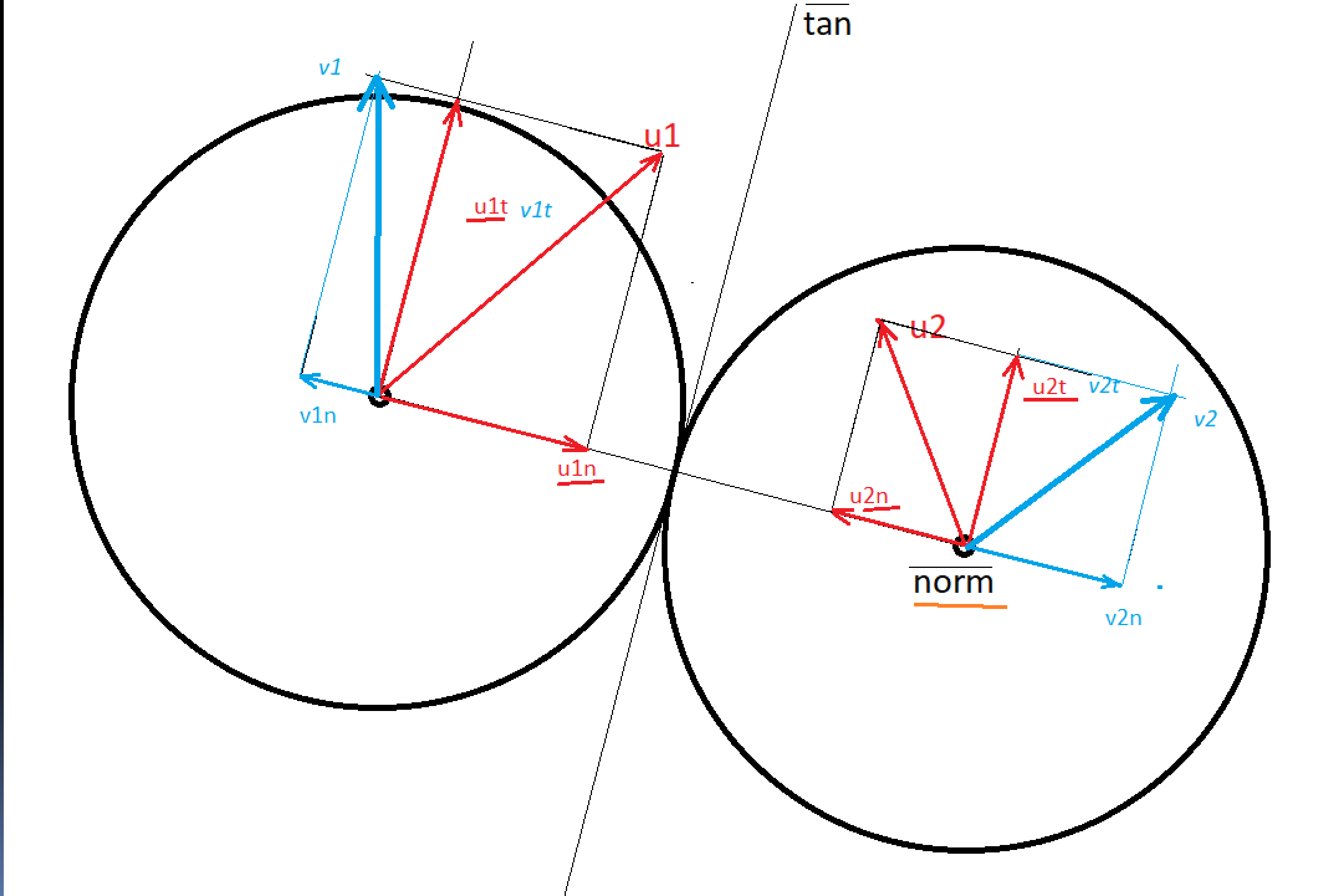
Нормаль (norm)
Лінія, що з'єднує центри куль у момент контакту.
Саме вздовж цієї осі передається імпульс.

Дотична (tan)
Перпендикулярна до нормалі.
У випадку відсутності тертя сила вздовж неї не діє.



Алгоритм моделі

- Визначаємо нормальний і тангенціальний одиничні вектори
- Знаходимо проекції векторів швидкостей до взаємодії на тангенціальну вісь (площину удару)
- Знаходимо проекції векторів швидкостей до взаємодії на нормальну вісь (вісь удару)
- Визначаємо нормальні складові швидкостей після взаємодії (тангенціальні складові залишаються ті ж самі)
- Визначаємо координати векторів швидкостей після взаємодії як суму координат відповідних складових



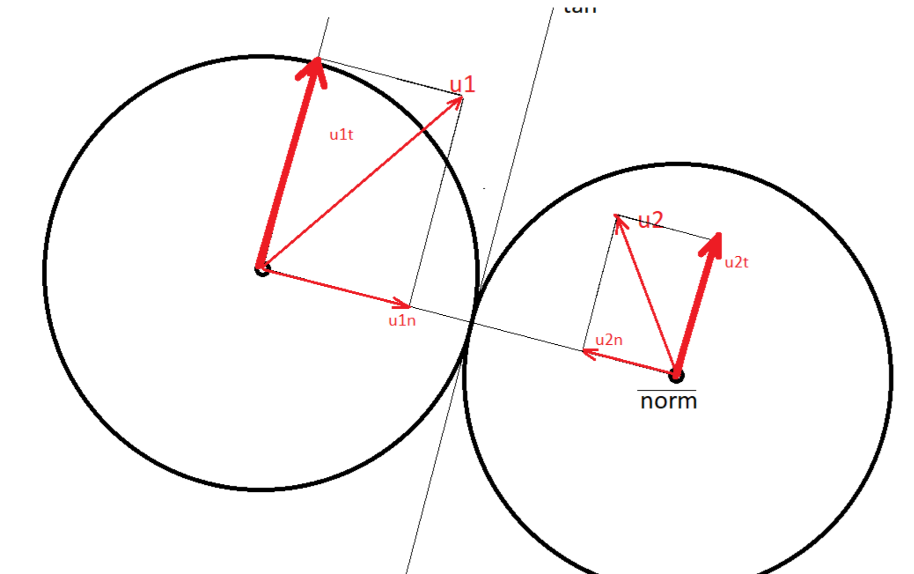
tan
v1
u1
u1t
v1t
v1n
u1n
u2
u2t
v2t
v2
u2n
norm
v2n

Знаходимо проекції векторів швидкостей на тангенціальну вісь (площину удару)

$$|u_n| = (\bar{u}\bar{n}) = u_x n_x + u_y n_y$$

```
var dotProductTangent1 = ball1.velocity.x * tangent.x + ball1.velocity.y * tangent.y;
var dotProductTangent2 = ball2.velocity.x * tangent.x + ball2.velocity.y * tangent.y;
```

Таким чином, ми визначили довжини складових u1t, u2t

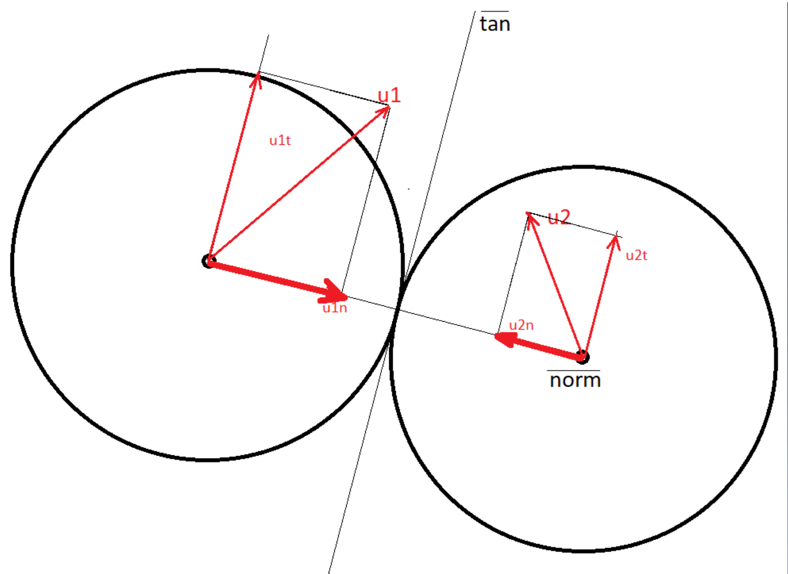


Знаходимо проекції векторів швидкостей на нормальну вісь (вісь удару)

$$|u_n| = (\bar{u}\bar{n}) = u_x n_x + u_y n_y$$

```
var dotProductNormal1 = ball1.velocity.x * normal.x + ball1.velocity.y * normal.y;
var dotProductNormal2 = ball2.velocity.x * normal.x + ball2.velocity.y * normal.y;
```

Таким чином, визначили довжини u1n, u2n



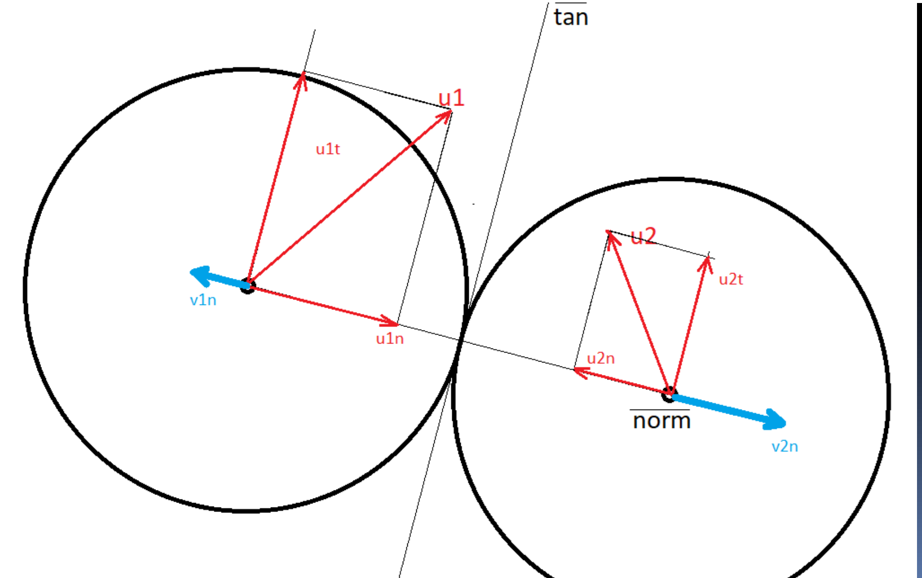
Визначаємо нормальні складові швидкостей після взаємодії

$$v_1 = \frac{u_1(m_1 - m_2) + 2m_2u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{u_2(m_2 - m_1) + 2m_1u_1}{m_1 + m_2}$$

```
var momentum1 = (dotProductNormal1 * (ball1.mass - ball2.mass) + 2 * ball2.mass * dotProductNormal2) / (ball1.mass + ball2.mass);
var momentum2 = (dotProductNormal2 * (ball2.mass - ball1.mass) + 2 * ball1.mass * dotProductNormal1) / (ball1.mass + ball2.mass);
```

Таким чином, визначили v1n, v2n (нормальні складові швидкостей після взаємодії)



Визначаємо координати векторів швидкостей після взаємодії як суму координат відповідних складових

$$\bar{v} = \left(v_{tx} + v_{nx}, v_{ty} + v_{ny}\right)$$

```
ball1.velocity.x = tangent.x * dotProductTangent1 + normal.x * momentum1;
ball1.velocity.y = tangent.y * dotProductTangent1 + normal.y * momentum1;
ball2.velocity.x = tangent.x * dotProductTangent2 + normal.x * momentum2;
ball2.velocity.y = tangent.y * dotProductTangent2 + normal.y * momentum2;
```

Абсолютно непружне зіткнення

Після зіткнення обидві кулі рухаються з однаковою швидкістю v:

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

Кінетична енергія **не зберігається**, але імпульс — так.

Коефіцієнт відновлення (restitution)

Для реалістичних моделей вводять коефіцієнт:

$$e = \frac{\text{відносна швидкість після удару}}{\text{відносна швидкість до удару}}$$

- $e = 1$ — абсолютно пружне зіткнення
- $e = 0$ — абсолютно непружне
- $0 < e < 1$— частково пружне

У симуляціях цей коефіцієнт задається як параметр матеріалу.

Наближені моделі в ігрових рушіях

У реальних симуляціях часто:

- ігнорують обертання;
- вважають кулі матеріальними точками;
- використовують спрощені імпульсні моделі;
- працюють з дискретним часом (Fixed Time Step).

Це компроміс між **фізичною точністю** та **обчислювальною ефективністю**.