ЗАТВЕРДЖЕНО
науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 4 вересня 2025 р.
№ 5

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для проведення лабораторних занять з навчальної дисципліни

«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»

Частина 1

«Лінійні неперервні системи автоматичного керування»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
освітня програма «Комп’ютеризоване управління енергетичними системами»
факультет комп’ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки
кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна

Рекомендовано на засіданні
кафедри робототехніки,
електроенергетики та
автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна
25 серпня 2025 р., протокол № 7

Розробники:
к.т.н., доцент кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна ТКАЧУК Андрій,
старший викладач кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації
ім. проф. Б.Б. Самотокіна БОГДАНОВСЬКИЙ Мартін

Житомир

2025

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна “Теорія автоматичного керування” – складова частина загальноінженерної підготовки спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» та 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Методичні рекомендації слугують для закріплення теоретичного матеріалу на практиці здобувачами освіти для комплексного формування компетенцій в межах спеціальності.

Тематика лабораторних робіт підібрана таким чином, що дозволяє здобувачам освіти закріпити знання з основних розділів дисципліни та одержати практичні навички досліджень різноманітних систем автоматичного керування.

Лабораторні роботи виконуються фронтально-поточним методом відповідно до індивідуальних варіантів.

Звіти про виконання лабораторних робіт повинні бути оформлені у відповідності з вимогами до конструкторської документації. У звіті вказується мета, наводиться програма експериментальних досліджень, результати вимірювань та обчислень та наводяться висновки про досягнення поставленої мети.

Лабораторна робота №1

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК САК

Мета роботи: *Дослідити перехідні характеристики елементарних ланок систем автоматичного керування при надходженні на вхід ланки одиничного ступінчатого сигналу.*

Теоретичні відомості

Реальні системи при теоретичних дослідженнях подають у вигляді моделей, які мають деякий формальний опис, найчастіше математичний.

Математична модель системи – це опис процесів, що проходять в системі. Математичний опис може бути аналітичним (за допомогою рівнянь), графічним (за допомогою графіків, структурних схем та графів) і табличним (за допомогою таблиць).

Найбільш поширеним описом систем, є опис за допомогою нелінійних диференційних рівнянь, наприклад другого порядку:

$$F\left(y, \dot{y}, \ddot{y};\ g, \dot{g};\ f,\ \dot{f}\right) = 0\ , \tag{1.1}$$

де y – вихідна координата; g та f – керуюча та збурююча дії; $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dot{g}$, $\dot{f}$ – похідні за часом від відповідних змінних.

Рівняння (1.1), що описує процеси, які протікають у системі, при довільних вхідних діях та початкових умовах, називають рівнянням динаміки. При постійних вхідних діях $g = g_0 = const$, $f = f_0 = const$ процес в системі з плином часу встановиться і вихідна координата набуде деякого постійного значення $y = y_0 = const$. В цьому режимі рівняння (1.1) буде мати вигляд:

$$F\left(y_0, 0, 0;\ g_0, 0;\ f_0, 0\right) = 0\,. \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) описує статичний або усталений режим, і його називають рівнянням статики.

В багатьох випадках нелінійні диференціальні рівняння можна лінеаризувати, тобто при деяких припущеннях замінити початкові нелінійні рівняння виду (1.1) лінійними рівняннями, які наближено описують процеси в системі. Перетворення нелінійних рівнянь в лінійні називається лінеаризацією.

Лінеаризація нелінійного диференціального рівняння базується на припущенні про достатню малість відхилень всіх змінних (фізичних величин) ланки від їх усталених значень.

Припущення про достатню малість відхилень змінних звичайно виконується, оскільки замкнута САК прагне зменшити будь-які відхилення змінних від потрібних значень.

Після проведення лінеаризації рівняння (1.1) набуває вигляду [1]:

$$T_2^2\frac{d^2y}{dt^2}+T_1\frac{dy}{dt}+y=k_1g+ \\ +k_2\frac{dg}{dt}+k_3f+k_4\frac{df}{dt}. \qquad (1.3)$$

Вираз (1.3) носить назву <u>лінійного диференційного рівняння ланки у відхиленнях</u>. Це рівняння є наближеним. Воно описує динамічний процес, який протікає у системі, не у всій області зміни змінних, а лише в малому околі усталеного статичного стану і є лінійним лише відносно відхилень змінних.

Якщо ввести символ диференціювання

$$p=\frac{d}{dt},$$

то рівняння (1.3) зводиться до стандартної форми:

$$\left(T_2^2p^2+T_1p+1\right)y=k_1(1+\tau_1p)g+k_3(1+\tau_2p)f\ , \qquad (1.4)$$

де $\tau_1=\frac{k_2}{k_1}$, $\tau_1=\frac{k_4}{k_3}$.

Коефіцієнти T_1, T_2 називаються сталими часу системи (мають розмірність секунд), k_1, k_2 – коефіцієнтами передачі системи. Коефіцієнти τ_1, τ_2 також мають розмірність секунд і характеризують стóпінь дії на ланку швидкостей зміни вхідної величини $g(t)$ та збурення $f(t)$.

Системи, які описуються лінійними диференційними рівняннями, називаються лінійними системами.

Для зручності дослідження систем вводять поняття передаточної функції.

<u>Передаточною функцією</u> системи називають відношення зображення за Лапласом вихідної змінної до зображення за Лапласом вхідної змінної їðè нульових початкових умовàõ. Якщо ланка (система) має декілька входів, то при визначенні передаточної функції відносно будь-якої однієї вхідної дії решта вхідних дій вважаються рівними нулю.

Для наведеного прикладу (1.4) будемо мати дві передаточні функції – по вхідній дії, та по збуренню:

$$W_g(p)=\frac{k_1(1+\tau_1p)}{T_2^2p^2+T_1p+1}, \\ W_f(p)=\frac{k_3(1+\tau_2p)}{T_2^2p^2+T_1p+1} \qquad (1.5)$$

За допомогою передаточних функцій отримуємо просту форму запису диференціального рівняння:

$$y(t) = W_g(p)g(t) + W_f(p)f(t). \qquad (1.6)$$

Передаточні функції характеризують властивості передачі сигналу системою з входу на вихід в динамічному режимі ($p \neq 0$).

В загальному випадку передаточна функція САК може бути подана у вигляді відношення двох поліномів:

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_n}, \qquad (1.7)$$

причому умовою фізичної реалізації системи є $m \le n$.

Поліном довільного порядку можна розкласти на прості множники, тому передаточну функцію (1.7) можна представити у вигляді добутку простих множників виду

$$kp,\ (d_1 p + d_2),\ (d_1 p^2 + d_2 p + d_3) \qquad (1.8)$$

та простих дробів виду

$$\frac{k}{p},\ \frac{k}{d_1 p + d_2},\ \frac{k}{d_1 p^2 + d_2 p + d_3}. \qquad (1.9)$$

Ланки, передаточні функції яких мають вигляд простих множників (1.8) або простих дробів (1.9), називають типовими або елементарними ланками.

Рівняння (1.6) можна представити у вигляді структурної схеми (рис. 1), де g – керуюча дія; f – збурення; y – керована координата; $x = g - y$ – похибка. Для керованості вихідної координати $y(t)$ у систему вводять зворотній зв'язок.

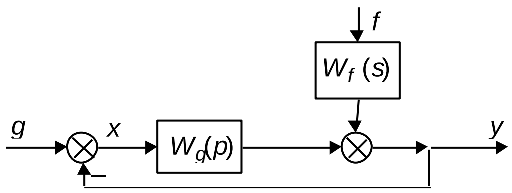


Рис. 1. Структурна схема системи

Якщо припустити, що $f(t) = 0$, то за нульових початкових умов знаходимо

$$W_g(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}. \qquad (1.10)$$

$W_g(p)$ – передаточна функція розімкнутої системи, яка характеризує динамічні властивості передачі сигналу з основного входу на вихід системи при розірваному зворотному зв'язку.

Якщо припустити, що $g(t)=0$, та розірвати ланцюг зворотного зв'язку, то

$$W_f(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}. \tag{1.11}$$

$W_f(p)$ – передаточна функція розімкнутої системи за збуренням, яка характеризує динамічні властивості передачі збурення на вихід системи при розірваному зворотному зв'язку.

Основною передаточною функцією САК або передаточною функцією замкнутої системи, або головним оператором $\Phi(p)$ називається відношення зображень за Лапласом керованої координати до керівної дії за нульових початкових умов і при збуренні $f(t)=0$:

$$\Phi(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}=\frac{W_g(p)}{1+W_g(p)}. \tag{1.12}$$

Передаточна функція $\Phi(p)$ визначає динамічні властивості САК при проходженні основного керуючого сигналу $g(t)$.

Передаточною функцією системи за збуренням $\Phi_f(p)$ називається відношення зображень за Лапласом керованої координати до збурення за нульових початкових умов та при керуючій дії $g(t)=0$:

$$\Phi_f(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_f(p)}{1+W_g(p)}. \tag{1.13}$$

Передаточна функція $\Phi_f(p)$ характеризує вплив збурень на керовану координату в статичному та динамічному режимах роботи САК.

Передаточною функцією системи за похибкою $\Phi_x(p)$ називається відношення зображень за Лапласом похибки до керуючої дії за нульових початкових умов та при збуренні $f(t)=0$:

$$\Phi_x(p)=\frac{X(p)}{G(p)}=\frac{1}{1+W_g(p)}. \tag{1.14}$$

Зв'язок між передаточною функцією системи за похибкою та головним оператором можна встановити із виразу (1.12) за допомогою підстановки $Y(p)=G(p)-X(p)$, в результаті якої одержимо:

$$\Phi_x(p) = 1 - \Phi(p). \qquad (1.15)$$

Передаточна функція $\Phi_x(p)$ характеризує похибку САК при обробці керуючого сигналу в статичному та динамічному режимах.

Порядок виконання роботи

1. За заданим викладачем варіантом завдання виписати параметри елементарних ланок, що досліджуються.
2. Визначити передатні функції елементарних ланок САК (розімкнених САК) а також передатні функції замкнених САК, отриманих шляхом охоплення одиничним зворотним зв’язком елементарних ланок САК за керуючим сигналом та за сигналом похибки $\Phi_g(p)$,$\Phi_x(p)$ за формулами (1.12, 1.14) для:
   - інерційної ланки першого порядку;
   - інерційної ланки другого порядку;
   - консервативної ланки.

   Отримані передатні функції та етапи розрахунку навести у звіті.
3. Визначити теоретичні перехідні характеристики елементарних ланок САК за заданими диференційними рівняннями цих ланок згідно з отриманим варіантом завдання, для елементарних ланок, зазначених в пункті 1,
   шляхом застосування табличного методу зворотного перетворення Лапласа. У звіті навести аналітичні вирази передатних функцій та перехідних характеристик.
4. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab1.mcd**.
5. Згідно з отриманим варіантом провести моделювання вищеозначених ланок двома способами:
   - з використанням чисельного методу вирішення диференційного рівняння (функція ***odesolve***);
   - з використанням чисельного методу зворотного перетворення Лапласа (функція ***invlaplace***).

   Навести фрагменти програмного коду вирішення означених задач та графіки перехідних процесів, що при цьому отримуються.
6. Отримані в п. 4 результати порівняти з розрахунковими та зробити висновки про збіжність результатів.

Контрольні запитання

1. Що таке “математична модель системи автоматичного керування”?

2. Що таке “передатна функція ланки”? Приведіть вирази для знаходження передатних функцій розімкненої системи, замкненої системи за керуючим сигналом, замкненої системи за похибкою.
3. Які типові динамічні ланки ви знаєте? Приведіть їх диференційні рівняння та передатні функції.

Лабораторна робота №2

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САК ЗА АЛГЕБРАЇЧНИМИ КРИТЕРІЯМИ

Мета роботи: *Дослідити стійкість систем автоматичного керування за алгебраїчними критеріями та визначити критичний коефіцієнт підсилення замкнутої САК.*

Теоретичні відомості

Визначення стійкості. У найпростішому випадку поняття стійкості системи пов'язане з її здатністю повертатися (з певною точністю) в стан рівноваги після зникнення зовнішніх сил, які вивели її з цього стану. Якщо система нестійка, то вона не повертається у стан рівноваги, з якого її вивели, або віддаляється від нього, чи робить навколо нього недопустимо великі коливання.

Нехай САК описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$D(p)y(t) = B(p)g(t) + N(p)f(t) \qquad (2.1)$$

де $g(t)$ та $f(t)$ – зовнішні дії, що викликають відхилення керованої координати $y(t)$ від її усталеного значення.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.1) є сумою загального розв'язку $y_{заг}(t)$ відповідного однорідного рівняння та часткового розв'язку $y^*(t)$ цього рівняння при заданих вхідних діях:

$$y(t) = y_{заг}(t) + y^*(t)$$

В теорії автоматичного керування загальний розв'язок називають перехідною складовою, а частковий розв'язок – вимушеною складовою, тобто

$$y(t) = y_{пер}(t) + y_{вим}(t). \qquad (2.2)$$

Для стійкості лінійної САК необхідно і достатньо, щоб перехідна складова $y_{пер}(t)$ з плином часу прагнула до нуля:

$$\lim_{t\to\infty} y_{пер}(t) = 0. \qquad (2.3)$$

Для визначення перехідної складової розв'яжемо диференційне рівняння (2.1) без правої частини

$$D(p)y(t) = \left(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n\right)y(t) = 0\,. \qquad (2.4)$$

Розв'язок цього рівняння може бути записаний у вигляді

$$y_{\text{пер}}(t) = C_1e^{p_1t} + C_2e^{p_2t} + \ldots + C_ne^{p_nt}\,, \qquad (2.5)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами і виглядом лівої та правої частин рівняння (2.1), $p_1, p_2, ..., p_n$ – корені алгебраїчного рівняння

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,. \qquad (2.6)$$

Вираз (2.6) називають характеристичним рівнянням.

Сталі інтегрування $C_1, C_2, ..., C_n$, числові значення яких залежать від структури САК, від виду та інтенсивності вхідних дій $g(t)$ і $f(t)$ та від початкових умов, характеризують лише кількісну сторону перехідного процесу і не впливають на стійкість системи.

Тому стійкість лінійної системи залежить лише від виду коренів характеристичного рівняння системи. Для того, щоб лінійна система була стійка **необхідно і достатньо, щоб дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння були від'ємними**.

Згідно з (1.7) в загальному випадку передаточна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{c_0p^n + c_1p^{n-1} + \ldots + c_n}\,,$$

тоді передаточна функція замкненої системи за керуючим сигналом буде:

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{C(p) + B(p)} = \frac{B(p)}{D(p)}\,, \qquad (2.7)$$

де

$$D(p) = C(p) + B(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n\,.$$

Багаточлен $D(p)$ називається характеристичним поліномом, а рівняння $D(p) = 0$ або $1 + W(p) = 0$ – характеристичним рівнянням замкнутої системи. Поліноми $C(p)$ та $D(p)$ мають однаковий степінь.

Крім того, що лінійна система може бути стійкою або не стійкою, вона може також знаходитись на межі стійкості. Розрізняють три типи межі стійкості:

- Система знаходиться на <u>аперіодичній межі стійкості</u>, якщо в характеристичному рівнянні (2.6) є один нульовий корінь. Нульовий корінь з'являється в (2.6) при рівності нулю вільного члена ($a_n = 0$). В цьому випадку система є стійкою не відносно керованої координати $y(t)$, а відносно швидкості її зміни.
- Система знаходиться на <u>коливальній межі стійкості</u>, якщо в характеристичному рівнянні (2.6) є одна пара чисто уявних спряжених коренів, а усі інші корені мають від'ємні дійсні частини. В системі у цьому випадку встановлюються незатухаючі гармонічні коливання.
- Межі стійкості третього типу відповідає наявність в характеристичному рівнянні (2.6) нескінченного кореня. Умовою знаходження системи на межі стійкості такого типу є перетворення в нуль коефіцієнта при старшій похідній характеристичного рівняння (2.6), тобто $a_0 = 0$.

САК, що знаходяться на межі стійкості, непрацездатні, оскільки найменші зміни параметрів системи можуть призвести або до стійкості, або до нестійкості цієї системи.

Алгебраїчні критерії стійкості. Алгебраїчні критерії стійкості дозволяють судити про стійкість системи за коефіцієнтами характеристичного рівняння:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (2.8)$$

<u>Необхідною умовою стійкості</u> системи будь-якого порядку є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння (2.8). Це означає, що якщо всі коефіцієнти додатні, то система може бути як стійкою, так і нестійкою. Якщо ж хоча б один коефіцієнт характеристичного рівняння (2.8) від'ємний або дорівнює нулю, то система заздалегідь нестійка або знаходиться на межі стійкості (тобто непрацездатна).

Для систем першого та другого порядків необхідна умова стійкості є і достатньою умовою стійкості, оскільки в цьому випадку при додатних коефіцієнтах характеристичного рівняння всі його корені є від'ємними. Для систем третього та вищих порядків додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння є необхідною умовою, але не достатньою. В цьому випадку всі дійсні корені характеристичного рівняння (якщо вони є) від'ємні, а комплексні корені можуть бути як від'ємними, так і додатними.

Критерії стійкості Рауса та Гурвіца дозволяють за коефіцієнтами характеристичного рівняння (2.8) без обчислення його коренів зробити висновок про стійкість системи.

Критерій стійкості Рауса

Цей критерій стійкості був запропонований в 1877 році англійським математиком Е.Раусом у вигляді деякого правила (алгоритму), яке зводиться до матриці вигляду:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \end{bmatrix}. \qquad (2.9)$$

В першому рядку знизу цієї матриці записуються коефіцієнти характеристичного рівняння (2.8), що мають парні індекси ($a_0, a_2, \dots$); в другому рядку знизу – коефіцієнти (2.8) з непарними індексами ($a_1, a_3, \dots$). Елементи наступних рядків отримують в результаті обчислення визначників, складених з елементів двох рядків, розташованих нижче (2.10). Після того, як матриця заповнена, критерій стійкості Рауса формулюється наступним чином: для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно і достатньо, щоб елементи першого стовпця матриці (2.9) мали один і той же знак, тобто при $a_0 > 0$ були додатними:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ b_0 > 0,\ b_1 > 0,\ c_0 > 0,\ c_1 > 0, \dots .$$

$$\begin{aligned}
&b_0 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \quad b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{bmatrix}; \quad b_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ a_0 & a_6 \end{bmatrix}; \\
&b_1 = \begin{bmatrix} b_0 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}; \quad b_3 = \begin{bmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}; \quad b_5 = \begin{bmatrix} b_0 & b_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}; \\
&c_0 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{bmatrix}; \quad c_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_5 \\ b_0 & b_4 \end{bmatrix}; \quad c_4 = \begin{bmatrix} b_1 & b_7 \\ b_0 & b_6 \end{bmatrix}; \\
&c_1 = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}; \quad c_3 = \begin{bmatrix} c_0 & c_4 \\ b_1 & b_5 \end{bmatrix}; \quad c_5 = \begin{bmatrix} c_0 & c_6 \\ b_1 & b_7 \end{bmatrix} \dots
\end{aligned} \qquad (2.10)$$

Використовуючи критерій Рауса, отримаємо умови стійкості для систем першого, другого, третього порядків:

$n = 1$,

$$a_0 p + a_1 = 0;$$

умови стійкості для системи першого порядку будуть:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0$$

$n = 2$,

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 \,,$$

умови стійкості для системи другого порядку будуть:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0$$
$$b_0 = a_1 a_2 > 0;$$

$n = 3$,

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 \,,$$

умови стійкості для системи третього порядку будуть:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ b_0 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$
$$b_1 = a_3 b_0 > 0 \,.$$

Таким чином, необхідною та достатньою умовàìè стійкост³ для систем першого та другого порядків є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння. Для рівнянь третього та більш високих порядків, крім додатності коефіцієнтів, необхідною умовою є дотримання додаткових співвідношень між коефіцієнтами характеристичного рівняння системи.

Критерій стійкості Гурвіца

В 1895 році професором математики А. Гурвіцем був розроблений алгебраїчний критерій стійкості у формі визначників, що складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Із коефіцієнтів характеристичного рівняння (2.8) складається головний визначник Гурвіца (2.11) за наступним правилом: по головній діагоналі визначника зліва направо виписуються всі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n в порядку зростання індексів. Стовпці вверх від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами характеристичного рівняння з послідовно зростаючими індексами, а стовпці вниз – коефіцієнтами з послідовно спадаючими індексами. На місце коефіцієнтів з індексами більшими за n (n – порядок характеристичного рівняння) та меншими нулї проставляють нулі.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

Відкреслюючи в головному визначникові Гурвіца, як показано пунктиром, діагональні мінори â (2.11), одержимо визначники Гурвіца нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_1;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix};$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \qquad (2.12)$$
$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}.$$

Для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб при $a_0 > 0$ всі визначники Гурвіца були додатними.

Розкриваючи визначники Гурвіца (2.12), отримаємо умови стійкості для систем першого, другого та третього порядків:

$n = 1$,

$$a_0 p + a_1 = 0,$$

ómови стійкості для системи першого порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$

$n = 2$,

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0,$$

ómови стійкості для системи другого порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 > 0,$$

$n = 3$,

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0;$$

ómови стійкості для системи третього порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$
$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \; \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0, \qquad (2.13)$$

Якщо всі визначники Гурвіца нижчого порядку додатні, то система знаходиться на межі стійкості, коли головний визначник дорівнює нулю:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0 .$$

Остання рівність можлива у двох випадках:

- $a_n = 0$ – система знаходиться на межі аперіодичної стійкості (один із коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю);
- $\Delta_{n-1} = 0$ – система знаходиться на межі коливальної стійкості (два комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння знаходяться на уявній осі).

  Таким чином, умовою знаходження системи на межі коливальної стійкості є перетворення в нуль $(n-1)$-го визначника Гурвіца при додатності всіх визначників Гурвіца нижчого порядку.

Побудова областей стійкості в площині параметрів системи. D-розбиття. При проектуванні САК часто необхідно дослідити вплив її різноманітних параметрів на стійкість. Для розâ'язку цієї задачі використовують метод побудови областей стійкості, тобто визначення таких областей значень параметрів, при яких система виявляється стійкою. Рівняння меж областей стійкості можна знаходити, використовуючи, наприклад, алгебраїчний критерій Гурвіца.

В більшості випадків необхідно знайти критичний коефіцієнт підсилення системи $k_{кр}$, при якому лінійна система буде стійкою. Для систем третього порядку цей коефіцієнт знаходиться з умови (2.13), де він може входити до складу a_2 та a_3. Умова для знаходження $k_{кр}$, згідно з (2.13) має вигляд:

$$a_1 a_2 > a_0 a_3 , \qquad (2.14)$$

звідси $k_{кр}$ повинно буди меншим за деяке число.

Цей метод дозволяє знаходити $k_{кр}$ тільки для систем третього порядку.

Більш загальний метод побудови областей стійкості був запропонований Ю.М. Неймарком та названий ним методом *D*-розбиття. Цей метод дозволяє виділити у просторі коефіцієнтів характеристичного рівняння a_i або у просторі параметрів системи (коефіцієнтів передачі, сталих часу тощо), від яких залежать коефіцієнти характеристичного рівняння, області $D(m), m = 1,2...$, що відповідають правим кореням характеристичного рівняння, при цьому область $D(0)$ буде областю стійкості.

Розглянемо *D*-розбиття за одним параметром. Припустимо, що потрібно з'ясувати вплив на стійкість системи деякого параметра ν, що лінійно входить до характеристичного рівняння (2.8). Зведемо характеристичне рівняння (2.8) до вигляду:

$$D(p) = M(p) + \nu N(p) = 0,$$

де $M(p)$ – поліном, що не залежить від ν; $N(p)$ – поліном, що містить параметр ν множником.
Зробимо заміну виду: $p = j\omega$, тоді межа *D*-розбиття визначається рівнянням

$$D(j\omega) = M(j\omega) + \nu N(j\omega) = 0,$$

звідси

$$\bar{\nu} = -\frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega). \qquad (2.15)$$

Оскільки параметр ν в лінійних системах є дійсним числом (коефіцієнт передачі, стала часу), то (2.15) слід було б доповнити умовою $Y(\omega) = 0$. Однак при початковій побудові цього обмеження не роблять, тобто вважають $\bar{\nu}$ комплексною величиною, відмічаючи це рискою зверху, щоб відрізнити її від дійсного значення ν.

Змінюючи ω від $-\infty$ до ∞, обчислюють $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ і будують на комплексній площині $\bar{\nu}$ межу *D*-розбиття. Межу *D*-розбиття звичайно будують для додатних значень ω, а потім доповнюють дзеркальним відображенням побудованої ділянки відносно дійсної осі. Область, яку оточує межа *D*-розбиття і є областю значень параметра, що досліджується, при якому лінійна система буде стійка. Оскільки параметр $\bar{\nu}$, що досліджується, є дійсним числом, то з одержаної області стійкості виділяють лише <u>відрізок стійкості</u>, тобто відрізок дійсної осі, що лежить в області стійкості. Так як параметри, що досліджуються, в більшості випадків є додатними, то на відрізку стійкості обирають лише додатні значення цього параметру.

Порядок виконання роботи

1. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab2.mcd**.
2. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію замкненої системи з одиничним від’ємним зворотним зв’язком, а також її характеристичний поліном для системи з передатною функцією розімкнутої системи виду: $W1(s) := \dfrac{K1}{(T1\cdot s + 1)\cdot\left(T2\cdot s^2 + T3\cdot s + 1\right)}$.
3. Використовуючи функцію ***coeffs*** по відношенню до характеристичного поліному замкненої системи, виділити його коефіцієнти.

4. Використовуючи отримані коефіцієнти дослідити стійкість замкненої системи за критерієм Рауса.
5. Використовуючи отримані коефіцієнти дослідити стійкість замкненої системи за критерієм Гурвіца.
6. За даними пп. 3 знайти критичний коефіцієнт підсилення системи $k_{кр}$.
7. Використовуючи метод *D*-розбиття побудувати межу *D*-розбиття, обрав за параметр, що досліджується, коефіцієнт підсилення системи. У звіті навести аналітичні вирази для визначення функції, що залежить від досліджуваного параметру, її дійсну і уявну частини у частотній формі, та відповідний графік межі стійкості.
8. Порівняти результати, отримані при виконанні пп. 6 та 7.
9. Побудувати перехідну характеристику заданої системи.
10. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію замкненої системи, а також її характеристичний поліном для системи з передатною функцією розімкнутої системи виду:

$$W2(s) := \frac{K1}{\left(T \cdot s^2 + 1\right) \cdot s} .$$

11. Повторити пункти 3-9 для заданої передатної функції.
12. Зробити висновки про вплив виду системи на її стійкість та якість.

Контрольні запитання

1. Визначте поняття стійкості лінійних систем автоматичного керування.
2. Що є необхідною і достатньою умовою стійкості лінійних САК?
3. Назвіть основні типи меж стійкості лінійних САК та приведіть умови знаходження системи на кожній з цих меж.
4. Які вимоги пред’являються до коефіцієнтів характеристичного рівняння системи, виходячи з необхідної умови стійкості системи?
5. Що таке “характеристичне рівняння системи” і як його отримати?
6. Які алгебраїчні критерії стійкості ви знаєте? Дайте цим критеріям коротку характеристику.
7. Виходячи з алгебраїчних критеріїв стійкості, що є необхідною і достатньою умовою стійкості для систем 1-го та 2-го порядків?
8. Сформулюйте критерій стійкості Рауса.
9. Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца.
10. Що таке метод “*D*-розбиття”?
11. Розкрийте сутність методу *D*-розбиття за одним параметром, який лінійно входить в характеристичне рівняння системи.

Лабораторна робота №3
ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ САК ЗА ЧАСТОТНИМИ КРИТЕРІЯМИ

Мета роботи: *Дослідити стійкість систем автоматичного керування за частотними критеріями та визначити запаси стійкості.*

Теоретичні відомості

Частотні критерії стійкості дозволяють судити про стійкість САК за виглядом частотних характеристик. Ці критерії є графоаналітичними. Вони одержали широке роçповсюдження, оскільки дозволяють порівняно легко досліджувати стійкість систем високих порядків, мають просту геометричну інтерпретацію та наочність. Крім того, за частотними характеристиками системи часто вдається судити не тільки про стійкість, але й про якість перехідного процесу в ній.

Критерій стійкості Михайлова

Цей критерій був сформульований О.В. Михайловим у 1938 році.

Візьмемо характеристичний поліном замкнутої системи:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n \qquad (3.1)$$

Підставимо в (3.1) чисто уявне значення $p = j\omega$. Одержимо частотний характеристичний поліном, у якому виділимо дійсну та уявну частини:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

де

$$\begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots, \\ Y(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Якщо всі коефіцієнти характеристичного полінома $a_0 \ldots a_n$ відомі і задане певне значення частоти ω, то комплекс $D(j\omega)$ буде зображений на комплексній площині $X(\omega)$, $jY(\omega)$ у вигляді вектора, проекції якого на дійсну та уявну осі відповідно дорівнюють $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ (рис. 2).

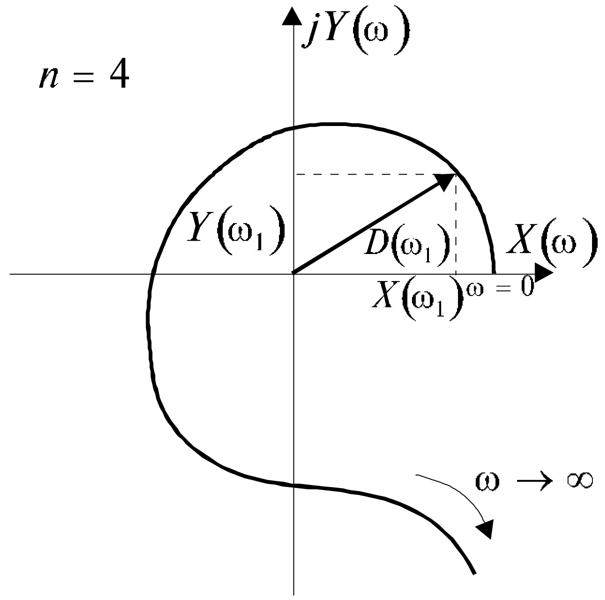


Рис.3.1. Крива Михайлова

Якщо значення частоти ω змінювати неперервно від нуля до нескінченності, то проекції $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ будуть змінюватися, і вектор $D(j\omega)$ своїм кінцем опише деяку криву (годограф), яка називається кривою Михайлова (рис. 3.1).

Практично крива Михайлова будується по точках: задаються різними значеннями частоти ω, за формулами (3.2) обчислюють $X(\omega)$ та $Y(\omega)$, результати обчислень зводять у таблицю, за даними якої і будується крива.

Критерій Михайлова формулюється так: для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб крива (годограф) Михайлова при зміні частоти ω від 0 до ∞, беручи початок при $\omega = 0$ на дійсній додатній півосі, обходила тільки проти годинникової стрілки послідовно n квадрантів координатної площини, де n – порядок характеристичного рівняння.

Побудувати криву Михайлова можливо також, використовуючи програмний пакет MATHCAD. Розглянемо вирішення цієї задачі на прикладі. Послідовність виконання задачі наступна (синтаксис програмного пакету MATHCAD збережений):

1. За заданою передаточною функцією

$$W(p) = \frac{10(0.1p+1)}{(p+1)^2(0.05p+1)}$$

знаходимо характеристичний поліном:

$$D(p) := (p+1)^2(0.05p+1) + 10(0.1p+1) \text{ expand}, p \to$$
$$\to 5. \cdot 10^{-2} p^3 + 1.10p^2 + 3.05p + 11 .$$

2. Зробивши заміну виду $p = i\omega$, знаходимо дійсну та уявну частини характеристичного поліному:

$$X(\omega) := \mathrm{Re}(D(1i \cdot \omega)); \; Y(\omega) := \mathrm{Im}(D(1i \cdot \omega)).$$

Для нашого прикладу отримуємо наступні вирази

$$X(\omega) \text{ float}, 3 \rightarrow -1.10 \cdot \omega^2 + 11;$$

$$\frac{Y(\omega)}{i} \text{ float}, 3 \rightarrow -\left(5.00 \cdot 10^{-2}\right) \cdot \omega^3 + 3.05 \cdot \omega .$$

3. Змінюючи частоту від 0 до нескінченності, в нашому випадку

$$\omega := 0, 0.1..100$$

будуємо годограф Михайлова (рис. 3.2).

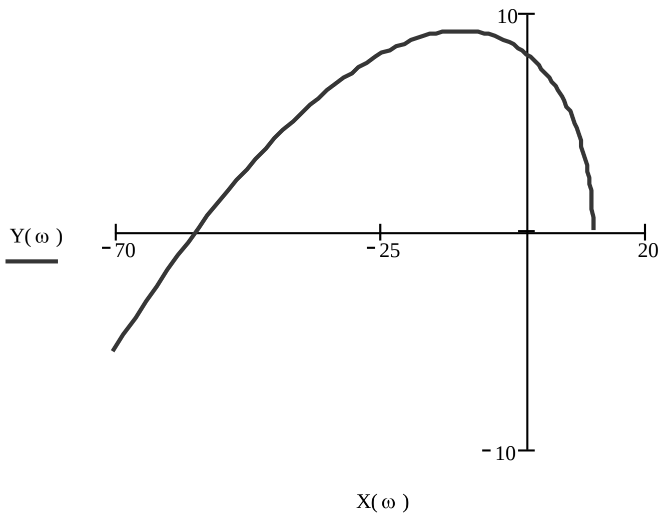


Рис. 3.2. До побудови кривої Михайлова при використанні програмного пакету MATHCAD

За критерієм Михайлова задана система є стійкою.

Критерій стійкості Найквіста

Цей частотний критерій стійкості, розроблений у 1932 році американським вченим Г. Найквістом, дозволяє судити про стійкість замкнутої системи за виглядом амплітудно-фазової характеристики розімкнутої системи.

Візьмемо передаточну функцію розімкнутої системи

$$W(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{c_0p^n+c_1p^{n-1}+\ldots+c_n},\ m\le n. \qquad (3.3)$$

Підставляючи в (3.3) $p=j\omega$, одержуємо частотну передаточну функцію розімкнутої системи:

$$W(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_m}{c_0(j\omega)^n+c_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+c_n}=$$
$$=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \qquad (3.4)$$

де $U(\omega)$ та $V(\omega)$ – дійсна та уявна частини частотної передаточної функції відповідно; $A(\omega)$ – модуль частотної передаточної функції, причому

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)};$$

$\psi(\omega)$ – фаза частотної передаточної функції, причому

$$\psi(\omega)=arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Якщо змінювати частоту ω від 0 до ∞, то у вектора $W(j\omega)$ буде змінюватися величина та фаза. Криву, що описується кінцем цього вектора на комплексній площині, називають <u>амплітудно-фазовою характеристикою розімкнутої системи</u> (рис. 3.3а).

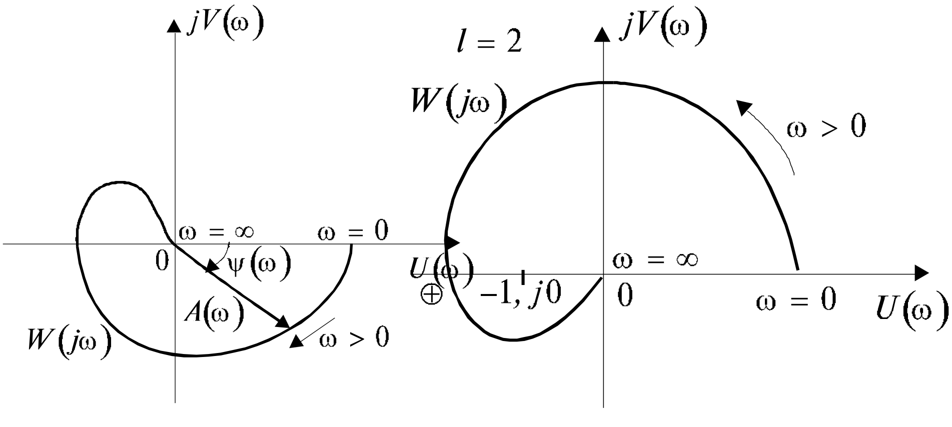


Рис. 3.3. Амплітудно-фазові характеристики розімкнутих статичних систем: а– для визначення АФХ; б– АФХ системи нестійкої в розімкнутому та стійкої в замкненому станах

Критерій Найквіста формулюється так: якщо розімкнута система автоматичного керування нестійка, то для того, щоб замкнута система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи $W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞, охоплювала точку (-1, j0) в додатному напрямку (проти годинникової стрілки) $l/2$ разів, де l – число правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи (рис. 3.3,б).

Якщо характеристичне рівняння розімкнутої системи автоматичного керування не має правих коренів, то замкнута система буде стійкою, коли амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи $W(j\omega)$ не охоплює точку (-1, j0).

Після того, як побудована АФХ та з'ясовано, що система стійка, по віддаленню характеристики $W(j\omega)$ від точки (-1, j0) можна визначити запас стійкості, що характеризується двома величинами: запасом стійкості по фазі та запасом стійкості по амплітуді.

<u>Запас стійкості по амплітуді</u> визначають як величину відрізка осі абсцис h, що знаходиться між критичною точкою (-1, j0) та точкою перетину АФХ з цією віссю:

$$h = 1 - \left|W\left(j\omega_\pi\right)\right|, \qquad (3.5)$$

де ω_π – частота, при якій

$$ArgW\left(j\omega_\pi\right) = -\pi .$$

З виразу (3.5) знайдемо так звану частоту зрізу $\omega_з$, при якій виконується умова

$$\left|W\left(j\omega_з\right)\right| = 1. \qquad (3.6)$$

Тоді запас стійкості по фазі визначається за виразом:

$$\varphi = \pi - \psi(\omega_з).$$

На рис. 5 показано методику визначення запасу стійкості по фазі φ та амплітуді h по АФХ системи.

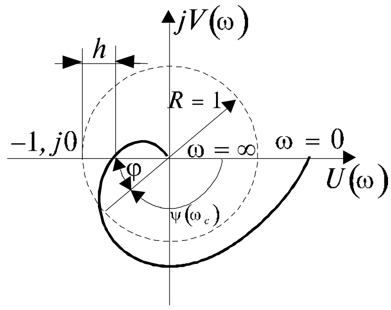


Рис. 3.4. Визначення запасів стійкості системи по фазі та по амплітуді

Перевагою критерію Найквіста в порівнянні з іншими критеріями (наприклад, з критерієм Гурвіца або критерієм Михайлова) є те, що для побудови АФХ використовується така функція, яка визначається як лівою, так і правою частинàіѐ вихідного диференціального рівняння. Це дозволяє легко розвивати цей критерій для визначення не тільки стійкості, а й якісних показників процесу керування.

Іншою перевагою критерію Найквіста є також можливість використання його для визначення стійкості експериментально знятих частотних характеристик системи. Це буває особливо цінним у випадках, коли за будь-якими причинами важко одержати математичну модель всієї системи або окремих її блоків.

Побудувати амплітудно-фазову характеристику за критерієм Найквіста можливо також, використовуючи програмний пакет MATHCAD. Розглянемо вирішення цієї задачі на прикладі. Послідовність виконання задачі наступна (синтаксис програмного пакету MATHCAD збережений):

1. Задаємо передаточну функцію розімкненої системи

$$W(p) := \frac{10(0.01p+1)}{(p+1)^2(0.05p+1)}.$$

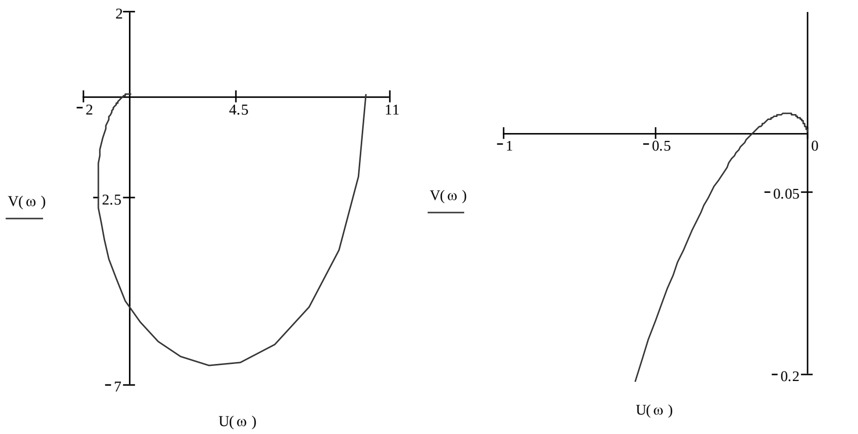
2. Зробивши заміну виду $p = i\omega$, знаходимо дійсну та уявну частини частотної передаточної функції відповідно:

$$U(\omega) := \mathrm{Re}(W(1i\cdot\omega));\ V(\omega) := \mathrm{Im}(W(1i\cdot\omega)). \qquad (3.7)$$

3. Змінюючи частоту від 0 до нескінченності, в нашому випадку

$$\omega := 0, 0.1 .. 1000.$$

будуємо криву Найквіста (рис. 6), за якою знаходимо запаси стійкості по фазі та амплітуді.



а *б*

Рис. 3.5. До побудови кривої Найквіста при використанні програмного пакету MATHCAD: а – повний годограф, б – годограф у точці перетину з віссю $U(\omega)$

4. Для знаходження запасів стійкості по фазі та амплітуді, знайдемо модуль частотної передаточної функції $A(\omega)$ та фазу частотної передаточної функції $\psi(\omega)$:

$$A(\omega) := |W(1i \cdot \omega)|; \; \psi(\omega) := \mathrm{atan}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \qquad (3.8)$$

5. Знайдемо, при яких частотах уявна частина частотної передаточної функції $V(\omega)$ буде обертатися у нуль, та частоту зрізу $\omega_з$:

$$V(\omega)\ \mathrm{solve}, \omega \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 7.23240576795789794 \end{bmatrix}.$$

6. Знайдемо частоту зрізу $\omega_з$ при якій буде виконуватись умова (3.6):

$$A(\omega) - 1\ \mathrm{solve}, \omega \rightarrow [2.982453807709282518].$$

7. Знайдемо запаси стійкості системи по амплітуді та фазі, використовуючи наступні вирази:

$$h := 1 - A(7.23240576795789794) \rightarrow .82312925;$$

$$\varphi := (\pi - \psi(2.982453807709282518)) \cdot \frac{180}{\pi} \rightarrow 30.299.$$

За критерієм Найквіста задана система є стійкою.

Дослідження стійкості за логарифмічними частотними характеристиками системи

В інженерній практиці широке розповсюдження одержав різновид критерію Найквіста, заснований на використанні логарифмічних частотних характеристик розімкнутої системи. Це зумовлено тим, що логарифмічні частотні характеристики, особливо асимптотичні, будуються практично без попереднього обчислення. В цьому випадку замість амплітудно-фазової характеристики розімкнутої системи будуються логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАХ) та логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФХ) розімкнутої системи, за взаємним розташуванням яких і судять про стійкість системи.

Побудова ЛАХ проводиться за виразом:

$$L(\omega) = 20 lg\, A(\omega) = 20 lg |W(j\omega)|, \qquad (3.9)$$

а ЛФХ будується за виразом:

$$\varphi(\omega) = Arg W(j\omega) = -r\frac{\pi}{2} + arctg\frac{\mathrm{Im}(W(j\omega))}{\mathrm{Re}(W(j\omega))}. \qquad (3.10)$$

де r – порядок астатизму системи. Під знаком $arctg$ знаходиться статична частина частотної передаточної функції.

Графіки $L(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ будуються в залежності від логарифму частоти ($lg\,\omega$). По осі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі, але на відмітці, яка відповідає значенню $lg\,\omega$, пишуть значення самої частоти ω.

<u>Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою</u> називається графік залежності $L(\omega)$ від логарифму частоти $lg\,\omega$.

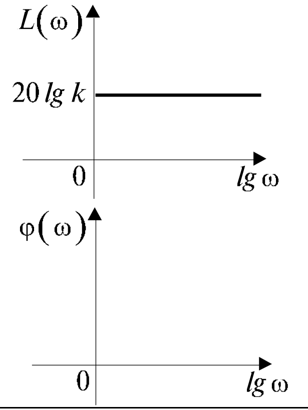
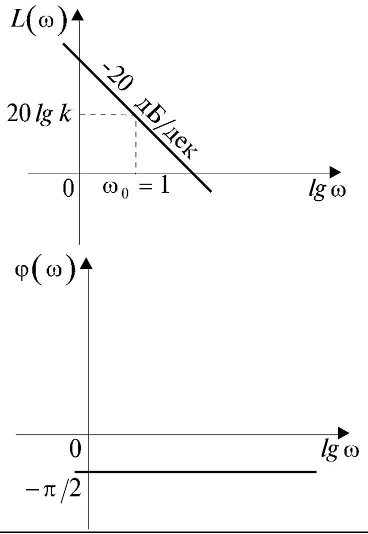
<u>Логарифмічною фазовою частотною характеристикою</u> називається графік залежності $\varphi(\omega)$ від логарифму частоти $lg\,\omega$.

Одиницею виміру є децибел, а одиницею виміру $lg\,\omega$ – декада. Декадою називається інтервал, на якому частота змінюється у 10 разів. При зміні частоти у 10 разів кажуть, що вона змінилася на одну декаду.

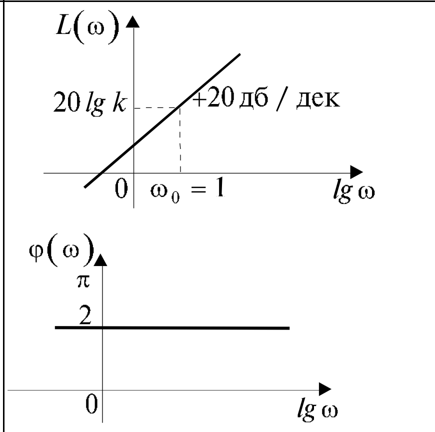
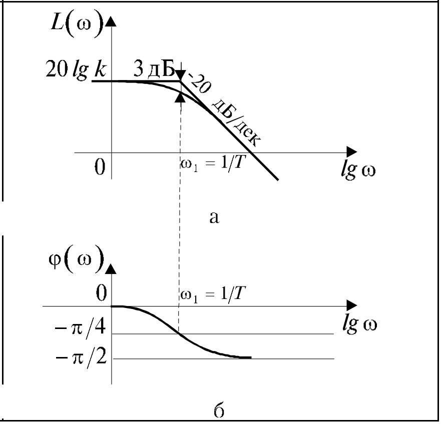
Вісь ординат при побудові логарифмічних частотних характеристик проводять через довільну точку, оскільки частоті $\omega = 0$ відповідає нескінченно віддалена точка (при □ $\omega \to 0$ $lg\,\omega \to \infty$).

В табл. 1 наведені ЛАХ і ЛФХ типових динамічних ланок, та формули для їх побудови.

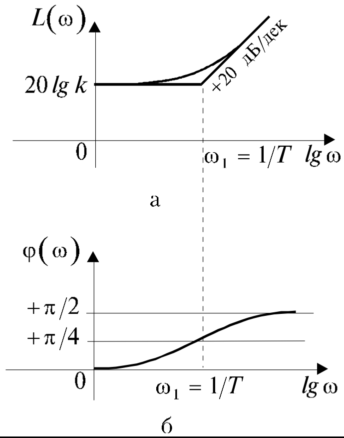
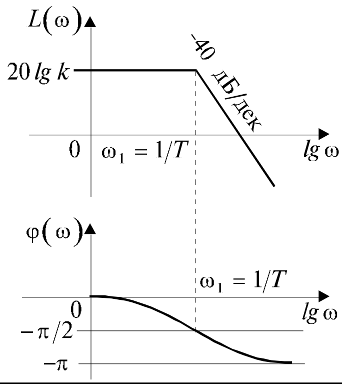
Таблиця 1 Логарифмічні характеристики

Тип ланки	Формули для побудови	ЛАХ, ЛФХ
Пропор-ційна (підсилю-вальна)	$W(p) = k$ $L(\omega) = 20 lg k$ $\varphi(\omega) = 0$	
Інтегруюча	$W(p) = \frac{k}{p}$ $L(\omega) = 20 lg k - 20 lg\, \omega$ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$	

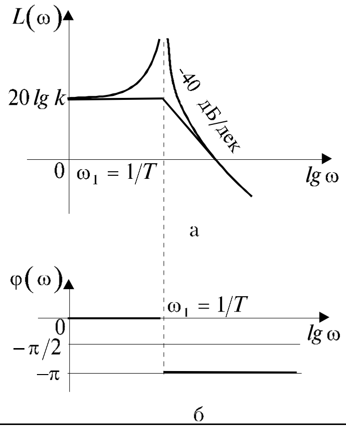
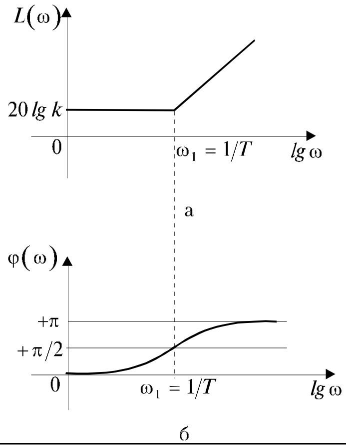
Продовження табл. 1. Логарифмічні характеристики

Тип ланки	Формули для побудови	ЛАХ, ЛФХ
Диферен-ціююча	$W(p) = kp$ $L(\omega) = 20lg\,k + 20lg\,\omega$ $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$	
Аперіодич-на (інерційна)	$W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ $L(\omega) = 20lg\,k -$ $- 20lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$ $\varphi(\omega) = -arctg(\omega T)$	

Продовження табл. 1. Логарифмічні характеристики

Тип ланки	Формули для побудови	ЛАХ, ЛФХ
Форсуюча	$W(p) = k(Tp+1)$ $L(\omega) = 20lg\,k + {}$ $+ 20lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$ $\varphi(\omega) = arctg(\omega T)$	
Коливальна	$W(p) = \dfrac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$, $0 < \xi < 1$ $L(\omega) = 20lg\,k - 20\times$ $\times lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$ $\varphi(\omega) = -arctg\dfrac{2\xi T}{1-\omega^2T^2}$	

Продовження табл. 1. Логарифмічні характеристики

Тип ланки	Формули для побудови	ЛАХ, ЛФХ
Консервативна	$W(p)=\dfrac{k}{T^2p^2+1}$ $L(\omega)=20lg\,k-$ $-20lg\left(1-\omega^2T^2\right)$ $\varphi(\omega)=\begin{cases}0 \quad \text{при } \omega<\dfrac{1}{T}\\ -\pi \ \text{ при } \omega>\dfrac{1}{T}\end{cases}$	
Форсуюча другого порядку	$W(p)=k\left(T^2p^2+2\xi Tp+1\right)$, $0<\xi<1$ $L(\omega)=20lg\,k+20\times$ $\times lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\xi T\omega\right)^2}$ $\varphi(\omega)=arctg\dfrac{2\xi T}{1-\omega^2T^2}$	

Побудова ЛАХ та ЛФХ системи докладно розглядається в [1]. Приклад побудови ЛФЧХ приведений на рис. 3.6. для передаточної функції виду:

$$W(p)=\frac{k\left(T_2p+1\right)}{s\left(T_1p+1\right)\left(T_3p+1\right)^2}\ .$$

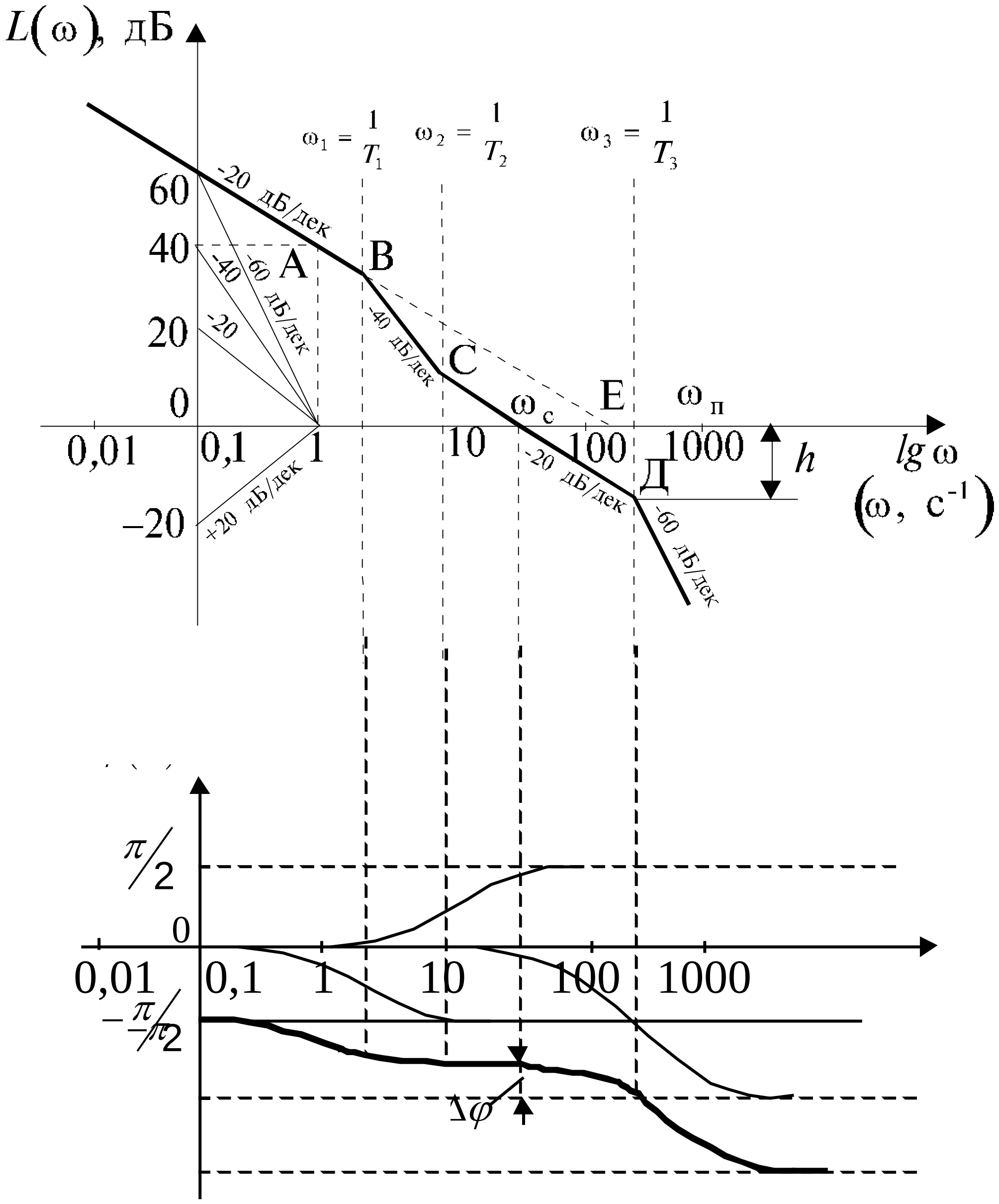


Рис 3.6. Логарифмічні характеристики

Для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб логарифмічна фазова характеристика при $L(\omega)>0$ не перетинала лінію $\varphi(\omega)=-\pi$ або перетинала б її парне число разів.

Коливальній межі стійкості відповідає випадок, коли при частоті зрізу $\omega_з$ ($L(\omega_з)=0$) фазовий зсув $\varphi(\omega_з)=-\pi$.

Запас стійкості системи по фазі $\Delta\varphi$ визначається по ЛФХ при частоті зрізу $\omega_з$:

$$\Delta\varphi=\pi-|\varphi(\omega_з)|. \qquad (3.10)$$

Запас стійкості системи по амплітуді ΔL визначається по ЛАХ при частоті ω_π, при якій фазова характеристика перетинає лінію $-\pi$, тобто коли $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$:

$$\Delta L = -L(\omega_\pi). \qquad (3.11)$$

Для мінімально-фазових систем існує однозначний зв'язок між ЛАХ та ЛФХ, тому деякі судження про стійкість таких систем можна зробити за виглядом ЛАХ в області середніх частот, не будуючи ЛФХ:

1) якщо при частоті зрізу, тобто при $L(\omega_з) = 0$, ЛАХ має нахил –20 дБ/дек, то система стійка. Тому при синтезі систем методом логарифмічних частотних характеристик у так званої "бажаної" ЛАХ при частоті зрізу нахил завжди –20 дБ/дек;
2) якщо при частоті зрізу ЛАХ має нахил –60 дБ/дек і більше, то система нестійка;
3) якщо при частоті зрізу ЛАХ має нахил –40 дБ/дек, то судити про стійкість системи тільки по ЛАХ не можна, оскільки така система може бути як стійкою, так і нестійкою. Однак навіть коли система стійка, вона, як правило, має малий запас стійкості по фазі.

Перехід ЛФХ лінії $-\pi$ при $L(\omega) > 0$ знизу вверх вважається додатним, а зверху вниз – від'ємним.

Побудувати ЛАХ та ЛФХ можливо також, використовуючи програмний пакет MATHCAD. Розглянемо вирішення цієї задачі на прикладі. Послідовність виконання задачі наступна (синтаксис програмного пакету MATHCAD збережений):

1. Задаємо передаточну функцією розімкненої системи

$$W(p) := \frac{10(0.01p+1)}{(p+1)^2(0.05p+1)}.$$

2. Зробивши заміну виду $p = i\omega$, знаходимо функції для ЛАХ та ЛФХ:

$$L(\omega) := 20 \cdot \log|W(1i \cdot \omega)|;$$
$$\phi(\omega) := \operatorname{atan}\frac{\operatorname{Im}(W(1i \cdot \omega))}{\operatorname{Re}(W(1i \cdot \omega))}. \qquad (3.12)$$

3. Змінюючи частоту від 0 до нескінченності, в нашому випадку

$$\omega := 0, 0.1..1000$$

будуємо ЛАХ (рис. 8,а).

Завдяки деяким особливостям програмного пакету MATHCAD за формулою (3.12) можливо знаходити лише аналітичний вираз ЛФХ. Для побудови графіка задану передаточну функцію необхідно представити у вигляді набору елементарних ланок:

$$W1(p) := \frac{(0.01p+1)}{(p+1)};$$

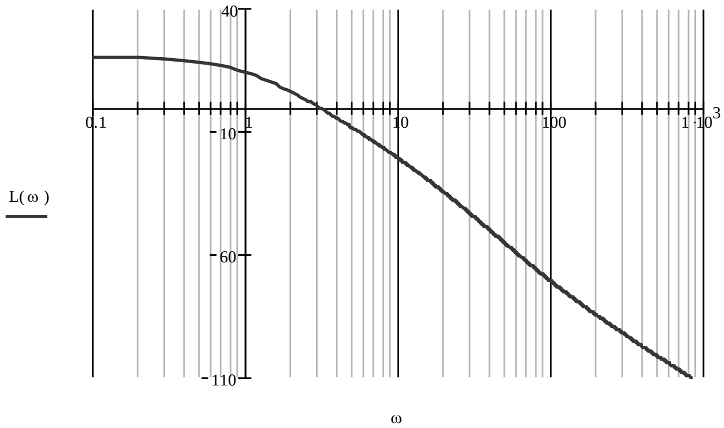
$$W2(p) := \frac{10}{(p+1)};$$

$$W3(p) := \frac{1}{(0.05p+1)},$$

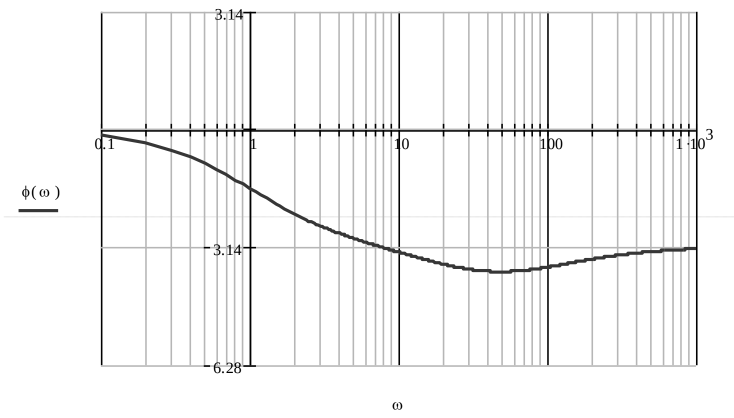
тоді вираз для ЛФХ можна представити у вигляді

$$\phi(\omega) := \operatorname{atan}\frac{\operatorname{Im}(W1(1i\cdot\omega))}{\operatorname{Re}(W1(1i\cdot\omega))} + \operatorname{atan}\frac{\operatorname{Im}(W2(1i\cdot\omega))}{\operatorname{Re}(W2(1i\cdot\omega))} + \operatorname{atan}\frac{\operatorname{Im}(W3(1i\cdot\omega))}{\operatorname{Re}(W3(1i\cdot\omega))}. \quad (3.13)$$

За виразом (3.13) будуємо ЛФХ (рис. 3.7,б)



а



б

Рис. 3.7. До побудови ЛАХ та ЛФХ при використанні програмного пакету MATHCAD: а – ЛАХ, б – ЛФХ

4. Для знаходження запасів стійкості по фазі та амплітуді, знайдемо частоту зрізу $\omega_з$, при якій $L(\omega)=0$, та частоту , ω_π, при якій $\varphi(\omega)=-\pi$:

$$L(\omega)\ \mathrm{solve}, \omega \to 2.982453807709282518\ ;$$

$$\varphi(\omega)-\pi\ \mathrm{solve}, \omega \to 7.232405706795789794\ .$$

5. Знайдемо запаси стійкості системи по амплітуді ΔL та фазі $\Delta\varphi$, використовуючи наступні вирази:

$$\Delta L := -L(7.232405706795789794) \to 15.047$$

$$\Delta\varphi := (|\varphi(4472119072800873583)|)\cdot\frac{180}{\pi} \to 30.299$$

Тобто задана система є стійкою і має запас стійкості по амплітуді $\Delta L \approx 15 дБ$ та запас стійкості по фазі $\Delta\varphi \approx 30^\circ$.

Порядок виконання роботи

1. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab3.mcd**.
2. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію замкненої системи, а також її характеристичний поліном для системи з передатною функцією розімкнутої системи виду: $W1(s) := \frac{K1}{(T1\cdot s+1)\cdot(T2\cdot s^2+T3\cdot s+1)}$.
3. Знайти дійсну та уявну частини характеристичного поліному замкненої системи у частотній формі, та визначити стійкість САК за критерієм Михайлова.
4. Використовуючи функцію ***coeffs*** з отриманого характеристичного поліному виділити коефіцієнти характеристичного поліному та визначити стійкість САК за критерієм Гурвіца для отримання уяви о стійкості замкненої САК.
5. Знайти дійсну та уявну частини передатної функції розімкнутої системи у частотній формі, та визначити амплітудно-частотну та фазо-частотну функції системи.
6. Визначити частоту, при якій годограф перетинає дійсну піввісь комплексної площини, та визначити запас стійкості замкненої системи за амплітудою.
7. Визначити частоту зрізу та запас стійкості замкненої системи за фазою.
8. Зробити висновок о стійкості замкненої системи за критерієм Найквіста.
9. Побудувати ЛАХ та ЛФХ розімкнутої системи та знайти запаси стійкості.
10. Для підтвердження стійкості замкненої САК визначити вагову функцію системи та побудувати вагову характеристику.

11. Порівняти результати, отримані при виконанні пп. 3, 8, 9 та зробити висновки.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте критерій стійкості Михайлова.
2. Приведіть приклади кривих Михайлова для стійкої та нестійкої систем, а також систем, що знаходяться на коливальній межі стійкості.
3. Сформулюйте критерій стійкості Найквіста.
4. Що таке “амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи”?
5. Що називається запасом стійкості системи за фазою та амплітудою, і як ці величини можуть бути визначені за амплітудно-фазовою характеристикою розімкнутої системи?
6. Визначте поняття логарифмічної амплітудної частотної характеристики (ЛАХ) та логарифмічної фазової частотної характеристики (ЛФХ) розімкнутої системи.
7. Побудуйте ЛАХ та ЛФХ типових динамічних ланок.
8. Розкрийте методику побудови ЛАХ та ЛФХ за заданою передатною функцією розімкнутої системи.
9. Як досліджується стійкість системи за її ЛАХ та ЛФХ?
10. Як знайти запас стійкості системи за фазою та амплітудою за її ЛАХ та ЛФХ.

Лабораторна робота №4

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ САК

Мета роботи: *Визначити перехідні характеристики для заданих систем та дослідити точність цих систем в усталеному режимі.*

Теоретичні відомості

При проектуванні систем автоматичного керування, крім забезпечення стійкості, доводиться вирішувати проблеми забезпечення потрібних показників якості перехідного процесу (швидкодії, коливальності, перерегулювання, плавності тощо) та точності в усталеному стані.

При зміні вхідної дії $g(t)$ системи вихідну координату $y(t)$ можна записати у вигляді:

$$y(t) = y_{\text{пер}}(t) + y_{\text{вим}}(t), \qquad (4.1)$$

де $y(t)$ – розв'язок диференційного рівняння, що описує систему; $y_{\text{пер}}(t)$ – вільна складова перехідного процесу, що відповідає загальному розв'язку однорідного диференційного рівняння; $y_{\text{вим}}(t)$ – вимушена складова, що відповідає частковому розв'язкові диференційного рівняння при заданому вигляді правої частини (вигляді вхідної дії $g(t)$).

З (4.1) видно, що якість перехідного процесу можна оцінити за його складовими $y_{\text{пер}}(t)$ та $y_{\text{вим}}(t)$.

Розрізняють дві групи показників якості: перша група – показники якості перехідного процесу $y_{\text{пер}}(t)$; друга – показники, що характеризують вимушену (усталену) складову $y_{\text{вим}}(t)$, за якою визначають точність системи.

Показники якості, що визначаються безпосередньо за кривою перехідного процесу, називають прямими оцінками якості. Крива перехідного процесу може бути одержана теоретично або експериментально. У тих випадках, коли побудувати криву перехідного процесу дуже складно, використовують непрямі оцінки якості. До непрямих показників якості можна віднести запаси стійкості системи за фазою та амплітудою.

Оцінку якості перехідного процесу в системі можна провести за кривою перехідного процесу при типовому вхідному сигналу, який є одиничною ступінчатою функцією $1(t)$.

Аналітично одиничний ступінчатий сигнал можна описати наступною функцією:

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Перехідною функцією системи (ланки) називають функцію $h(t)$, що описує зміну вихідної координати системи (ланки), коли на її вхід при нульових початкових умовах подається одиничний ступінчатий сигнал.

Графік перехідної функції $h(t)$ від часу t називають перехідною або розгінною характеристикою.

До прямих оцінок якості належать:

1. Перерегулювання σ, % – відносне максимальне відхилення перехідної характеристики від усталеного значення вихідної координати, виражене у відсотках:

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\% ,$$

де $h_{\max 1}$ – значення першого максимуму; $h_{уст}$ – усталене значення вихідної координати (рис. 9).

Допустиме значення перерегулювання в кожному конкретному випадку визначається умовами експлуатації системи. В більшості випадків це значення знаходиться в межах $\sigma = 10 - 30\%$.

2. Час регулювання (час перехідного процесу) t_p – мінімальний час, після сплину якого регульована координата $y(t)$ буде залишатися близькою до усталеного значення із заданою точністю:

$$\left| h(t) - h_{уст} \right| \le \Delta$$

де Δ – задана постійна величина (звичайно задається у відсотках від усталеного значення вихідної координати $h_{уст}$, рис. 9).

3. Число коливань n, яке має перехідна характеристика $h(t)$ за час регулювання t_p. Найчастіше допускається $n = 1 - 2$, іноді $n = 3 - 4$, але в деяких випадках коливання у системі недопустимі (рис. 4.1).

4. Час досягнення першого максимуму $t_{\max}$ (рис. 4.1).

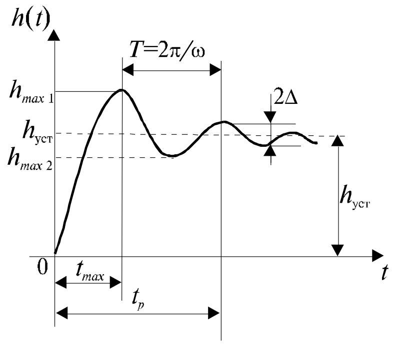


Рис. 4.1. Перехідний процес в системі при одиничній ступінчастій вхідній дії

Розглянемо побудову перехідної характеристики з використанням перетворення Лапласа. Вихідна координата в зображенні за Лапласом визначається виразом

$$Y(p) = \Phi(p)G(p),$$

де $\Phi(p)$ – передаточна функція замкнутої системи; $G(p)$ – зображення за Лапласом вхідного сигналу. Перехідна характеристика за означенням знаходиться при $G(p) = \frac{1}{p}$ та нульових початкових умовах.

Вважаючи, що передаточна функція $\Phi(p)$ відображає відношення двох поліномів $\Phi(p) = \frac{B(p)}{D(p)}$, отримуємо:

$$Y(p) = \frac{B(p)}{pD(p)}.$$

Якщо рівняння $D(p) = 0$ не має нульових та кратних коренів, то у відповідності до теореми розкладу перехідна характеристика, що відповідає цьому зображенню, визначається залежністю:

$$h(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^{r} \frac{B(p_k)}{p_k D'(p_k)} e^{p_k t} + \\ + \sum_{i=1}^{l} 2A_i e^{-\alpha_i t} \cos(\beta_i t + \varphi_i), \qquad (4.2)$$

де p_k – корені рівняння, r – число дійсних коренів, l – число пар комплексно-спряжених коренів вигляду $p_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$, $A_i = \left|\frac{B(p_i)}{p_i D'(p_i)}\right|$, $\varphi_i = Arg\,\frac{B(p_i)}{p_i D'(p_i)}$.

Точність роботи системи в усталених режимах оцінюється за величиною устàленої похибки $x_{уст} = \lim_{t\to\infty} x(t)$ при типових вхідних керуючих та збурюючих діях.

Якщо на систему діють керуюча дія $g(t)$ та збурення $f(t)$, то зображення за Лапласом похибки визначається виразом:

$$X(p) = \Phi_x(p)G(p) + \Phi_f(p)F(p), \qquad (4.3)$$

де

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \; –$$

передаточна функція замкнутої системи за похибкою;

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1+W(p)} \; -$$

передаточна функція замкнутої системи за збуренням.

Оригінал похибки можна знаходити різноманітними методами, але на практиці найчастіше застосовується метод, у якому спочатку знаходяться коефіцієнти помилки, а потім записується безпосередньо вираз для помилки, до складу якого входять знайдені коефіцієнти. Цей метод справедливий як при вхідній дії у вигляді одиничної ступінчатої дії або лінійно зростаючої функції, так і для вхідних дій, що повільно змінюються.

До вхідних дій $g(t)$ або $f(t)$, що повільно змінюються, відносяться такі процеси, які віддалік від початкової точки мають кінцеве число m похідних, наприклад, для $g(t)$:

$$\frac{dg}{dt}, \frac{d^2 g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^m g}{dt^m}.$$

Згідно з (4.3) знайдемо усталену помилку від вхідної керуючої дії $g(t)$:

$$X(p) = \Phi_x(p) G(p) = \frac{G(p)}{1+W(p)}.$$

У цьому виразі розкладемо передаточну функцію замкнутої системи за похибкою $\Phi_x(p)$ у ряд Маклорена за степенями, які зростають, в околі точки $p=0$, що відповідає більшим значенням часу ($t \to \infty$):

$$X(p) = \left[c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \ldots\right] G(p). \qquad (4.4)$$

У виразі (4.4) величини $c_0, c_1, c_2 \ldots$ називаються <u>коефіцієнтами похибок</u> і можуть бути обчислені згідно із загальними правилами розкладу функції $\Phi_x(p)$ в ряд Тейлора:

$$c_0 = \left[\Phi_x(p)\right]_{p=0}; \; c_1 = \left[\frac{d\Phi_x(p)}{dp}\right]_{p=0};$$
$$c_2 = \left[\frac{d^2\Phi_x(p)}{dp^2}\right]_{p=0}; \ldots; c_m = \left[\frac{d^m\Phi_x(p)}{dp^m}\right]_{s=0}, \qquad (4.5)$$

де c_0 – коефіцієнт статичної (позиційної) похибки, c_1 – коефіцієнт швидкісної похибки, c_2 – коефіцієнт похибки від прискорення.

Використання (4.5) доцільно при дослідженні систем першого–третього порядків, так як у цьому випадку проведення диференціювання виразу для $\Phi_x(p)$ є досить легкою задачею. Для систем вищих порядків коефіцієнти похибок доцільно обчислюються не за формулами (4.5), а шляхом поділу полінома чисельника передаточної функції $\Phi_x(p)$ на поліном знаменника цієї ж функції.

Нехай

$$\Phi_x(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}=\frac{B_m(p)}{A_n(p)}.$$

Поліноми $B_m(p)$ та $A_n(p)$ записуються в порядку зростання степеня параметра p. В результаті ділення отримаємо нескінченний ряд $C(p)$, який буде мати наступний вигляд:

$$C(p)=c'_0+c'_1\,p+c'_2\,p^2+\ldots.$$

Порівнюючи цей ряд з виразом в квадратних дужках (4.4), знаходимо, що

$$c_0=c'_0\,,\ c_1=c'_1\,,\ \frac{c_2}{2}=c'_2\,,\ \ldots\ .$$

Переходячи у виразі (4.4) до оригіналу, отримуємо формулу для обчислення усталеної похибки:

$$x_{\text{уст}}(t)=c_0g(t)+c_1\frac{dg(t)}{dt}+\frac{c_2}{2!}\frac{d^2g(t)}{dt^2}+\ldots \qquad (4.6)$$

Порядок виконання роботи

1. Запустити програму Mathcad та відкрити файл **Tau_lab4.mcd**.
2. Задати параметри двох вхідних сигналів – одиничного ступінчатого та лінійно зростаючого.
3. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію розімкнутої системи виду:

$$W1(s):=\frac{K1}{(T1\cdot s+1)\cdot\left(T2\cdot s^2+T3\cdot s+1\right)}.$$

4. Отримати зображення за Лапласом заданих вхідних сигналів.
5. Для обох варіантів вхідного сигналу визначити зображення за Лапласом сигналів похибок замкненої САК.
6. Згідно з п. 3 знайти передатну функцію замкненої САК за похибкою.

7. Шляхом розкладання отриманої у п. 6 передатної функції у ряд Тейлора, визначити коефіцієнти похибок замкненої САК.
8. Побудувати графіки динамічної та статичної похибок системи для обох варіантів вхідного сигналу.
9. Оцінити якість системи п. 3 за перехідною характеристикою.
10. Згідно з варіантом завдання, визначити передатну функцію розімкнутої системи виду:

$$W2(s) := \frac{K1}{\left(T\cdot s^2 + 1\right)\cdot s}.$$

11. Повторити пункти 4-9 для заданої передатної функції.
12. Зробити висновки о впливі виду системи на якість її роботи з точки зору динамічної та статичної похибки.

Контрольні запитання

1. Визначте поняття “перехідна функція системи”.
2. Які показники якості перехідного процесу в системі можуть бути визначені за перехідною функцією і яким чином?
3. Як визначити перехідну функцію системи, якщо її математична модель задана у вигляді передаточної функції?
4. Як визначається усталені похибки системи при: постійних, лінійних та повільно змінюваних вхідних діях?
5. Що таке “коефіцієнти похибок” і як вони визначаються?

ЛІТЕРАТУРА

1. Самотокін Б.Б. Курс лекцій з теорії автоматичного керування: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. –Житомир: ЖІТІ, 2001. – 501 с.
2. Шаруда, В.Г. Методи аналізу і синтезу систем автоматичного керування: навч. посіб. / В.Г. Шаруда, В.В. Ткачов, М.П. Фількін – Д, Нац. гірнич. ун-т, 2008. – 543 с.
3. Шаруда, В.Г. Практикум з теорії автоматичного управління: навч. посіб. /В.Г. Шаруда – Д., Нац. гірнич. ун-т, 2002. – 414 с.