

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

ТЕМА 1

КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ТА ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Вступ

Фізика – це наука про найбільш загальні властивості і форми руху матерії.

Матерія – це все, що нас оточує, існує незалежно від нашої свідомості і діє на наші відчуття.

Відомі два види матерії: речовина і поле. До першого відносять, наприклад, атоми, молекули і всі побудовані з них тіла. До другого – електромагнітні, гравітаційні та інші поля. Під рухом матерії розуміють будь-яку її зміну.

Фізичні закони – сконденсовані підсумки всіх знань про рух матерії. Під час вивчення навколишнього світу дослідники користуються такими методами фізики: розмірковуванням, спостереженням, дослідом. Все накопичене знання за допомогою спостереження вчені пояснюють за допомогою наукових гіпотез.

Гіпотеза – це наукове припущення, яке висувають для пояснення деякого явища. Вона потребує перевірки й доведення, щоб стати науковою теорією або законом.

Основним методом у фізиці є дослід, тобто спостереження досліджуваного явища в точно контрольованих умовах, які дозволяють слідкувати за перебігом явища й відтворити його кожного разу при повторенні цих умов.

Фізична теорія являє собою систему основних ідей, які узагальнюють дослідні данні та відбивають основні закономірності перебігу природних явищ.

Фізику підрозділяють на так звану класичну фізику й квантову. Класичною називається та фізика, створення якої було завершено на початку ХХ століття. Класична фізика базується на законах Ньютона й стала настільки плідною, що у фізиків склалося враження, що будь-яке явище можна пояснити за допомогою ньютонівських законів. Але ті ж самі вчені-фізики вказували на слабкі місця у класичній фізиці: невдалі спроби створення теорії випромінювання абсолютно чорного

тіла, й дивна поведінка ефіру – гіпотетичного середовища, в якому мали розповсюджуватися електромагнітні хвилі. Аналіз цих труднощів призвів до принципово нових уявлень про випромінювання: випромінювання електромагнітних хвиль окремими порціями – квантами, що надало поштовх до створення нової (квантової) фізики. А через протиріччя дослідних фактів щодо ефіру довелося переглянути загальноприйняті уявлення про простір та час. Це привело до виникнення теорії відносності.

Механіка, заснована на законах Ньютона, строго говорячи, невірна. Але для деякого кола явищ ця механіка цілком задовільна. Таким чином, розвиток науки, не перекреслив ньютонівську механіку, а тільки встановив межі, у яких вона справедлива. Ньютонівська механіка ввійшла як складова частина в загальну будову фізичної науки.

Зародження квантової механіки проходило так. Спочатку була створена Нільсом Бором у 1913 р. теорії атома, яка поряд із підпорядкуванням руху електрона в атомі законам класичної механіки наклала на цей рух спеціальні квантові обмеження. Потім Луї де Бройль висунув у 1924 р. сміливу гіпотезу про те, що частинки речовини повинні виявляти за певних умов хвильові властивості. Гіпотеза де Бройля незабаром одержала блискуче експериментальне підтвердження – було доведено, що із частинками речовини пов'язаний якийсь хвильовий процес, що повинен бути врахований при розгляді механіки атома. Результатом цього відкриття було створення Ервіном Шредінгером і Вернером Гейзенбергом нової фізичної теорії – хвильової або квантової механіки. Квантова механіка досягла разючих успіхів у поясненні атомних процесів і будови речовини. В тих випадках, коли вдалося перебороти математичні труднощі, були отримані результати, що чудово узгоджуються з дослідом. Наступні десятиліття ознаменувалися чудовими досягненнями в області вивчення атомного ядра. Вчені й інженери в такій мірі опанували ядерними процесами, що стало можливим практичне використання ядерної енергії.

Фізика – найбільш фундаментальна з усіх наук, найбільш всеосяжна; величезним був її вплив на весь розвиток науки. Усі природничі науки відчують на собі вплив фізики. Так, наприклад, хімія виявила багато дивних зв'язків між різними елементами, які, по кінцевому рахунку, були пояснені квантовою механікою. Отже, насправді, теоретична хімія – це фізика. Якщо взяти біологію, то побачимо, що ця наука вивчає безліч фізичних явищ: циркуляцію крові, тиск,

прходження електричних імпульсів по нервовим клітинам і т. д. Ось чому фізику вимушені вивчати студенти майже всіх спеціальностей.

1.2. Основні поняття

Механіка набула значного розвитку через те, що у повсякденному житті постійно спостерігаємо механічний рух.

Механіка вивчає механічний рух.

Механічний рух – зміна положення одних тіл відносно інших.

Механічною системою називають сукупність тіл, які виділені для спостереження.

Система відліку – це сукупність нерухомих одних відносно інших тіл, по відношенню до яких розглядають рух, і годинник (секундомір) для виміру часу.

З системою відліку пов'язують систему координат (наприклад, декартову).

Поступальний рух – це рух, при якому пряма, пов'язана з тілом не змінює своєї орієнтації відносно зовнішніх тіл (див. рис. 1.1). Інакше рух називається **обертальним**.

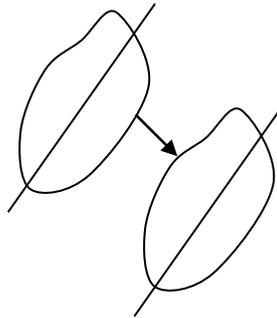


Рис. 1.1

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати у даній задачі. Матеріальна точка здійснює лише поступальний рух, або покоїться.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстані між будь-якими двома точками якого постійні. Іншими словами, розміри і форма абсолютно твердого тіла не змінюються при його русі. Часто абсолютно тверде тіло розглядають як систему матеріальних точок, які жорстко зв'язані між собою.

Приклад поступального і обертального руху.

Розглянемо маятник: на підвішеній до скелі нитці коливається сферична посудина з водою всередині (див. рис. 1.2). Вода з посудини не може витікати.

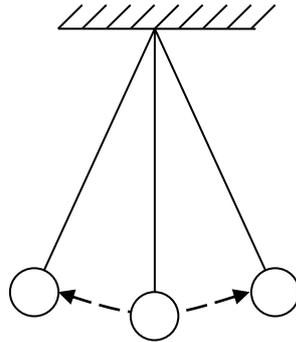


Рис. 1.2

Якщо температура ззовні досить висока – у середині кулі знаходиться вода, то кулю вважаємо матеріальною точкою. Дійсно, враховуючи слабку в'язкість води, ми відмічаємо, що вся маса води під час руху маятника не обертається (будь-яка пряма, пов'язана із водою залишається паралельною сама собі). А якщо вода внаслідок зниження температури перетвориться на лід, то рух посудини з льодом – обертальний рух твердого тіла.

Траєкторія – це лінія, вздовж якої рухається тіло. На рис. 1.3 показано приклад траєкторії тіла ACB .

Шлях – довжина траєкторії (довжина кривої ACB).

Переміщення – вектор, який з'єднує початок і кінець траєкторії (на рис. 1.3 – \overline{AB}).

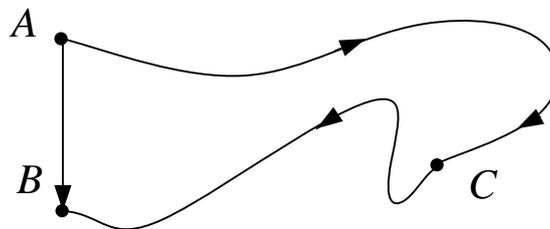


Рис. 1.3

Механіка поділяється на три розділи (див. рис. 1.4):



Рис. 1.4

Кінематика займається описом руху тіл, не аналізуючи причини руху (сили). **Статика** вивчає умови рівноваги тіл. **Динаміка** вивчає сили.

1.3. Радіус-вектор

Рух будь-якого тіла вивчають за допомогою системи відліку, яка складається з тіла відліку, системи координат і годинника. На рис 1.5 показано декартову систему координат x, y, z . Положення матеріальної точки у просторі задають за допомогою радіус-вектора – вектора, який проведено до точки з початку координат (на рис 1.5 – \vec{r}).

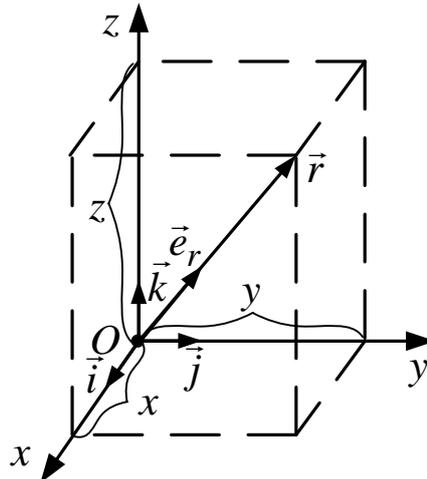


Рис. 1.5

Радіус-вектор \vec{r} спроекуємо на координатні осі. Довжини проєкцій на рис. 1.5 позначені фігурними дужками і дорівнюють x, y, z . Вздовж координатних осей з початку системи координат розпочинаються вектори одиничної довжини $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей. \vec{r} можна представити через орти та його проєкції так:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (1.1)$$

Модуль радіус-вектора – абсолютна величина

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Радіус-вектор \vec{r} можна представити у вигляді добутку його модуля на орт \vec{e}_r , який задає напрямок радіус-вектора (див. рис. 1.5):

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r.$$

Рух матеріальної точки повністю заданий, якщо вказано однозначний закон зміни із часом її просторових координат

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Ці рівняння еквівалентні одному векторному рівнянню:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

1.4. Швидкість матеріальної точки

Вектором миттєвої швидкості \vec{v} називається перша похідна від радіус-вектора за часом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

У шкільному курсі “Вступ до математичного аналізу” вивчалось диференціювання звичайної скалярної функції $f(t)$, для якої похідну $f'(t)$

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

знаходять за певними правилами. Наприклад, для функцій $\ln x$ та Cx^n похідними є $1/x$ та $C \cdot n \cdot x^{n-1}$ відповідно. Похідну за часом ще позначають крапкою над символом:

$$f'(t) = \dot{f}(t).$$

Операція диференціювання у формулі (1.2) складніша за диференціювання скалярної функції у тому розумінні, що потрібно диференціювати три скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z},$$

(тут вираз (1.1) підставили у (1.2)). Проекції вектора швидкості на координатні осі являють собою похідні за часом від відповідних компонент радіус-вектора.

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

Модуль швидкості

$$v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Середньою шляховою швидкістю називають відношення пройденого тілом шляху s до часу t , за який тіло пройшло цей шлях:

$$v_{сер.шл} = \frac{s}{t}.$$

Середня шляхова швидкість – скалярна величина.

Середньою швидкістю називається відношення вектора переміщення $\Delta \vec{r}$, яке здійснила матеріальна точка за час Δt , до величини часу Δt :

$$\vec{v}_{сер} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

На рис. 1.6 показано фрагмент AB траєкторії матеріальної точки. Довжина криволінійної дуги AB дорівнює s . У момент часу, коли тіло

знаходиться у т. A , вектор миттєвої швидкості – \vec{v} . Вектор середньої швидкості $\vec{v}_{сер}$ направлений уздовж вектора переміщення $\Delta\vec{r}$.

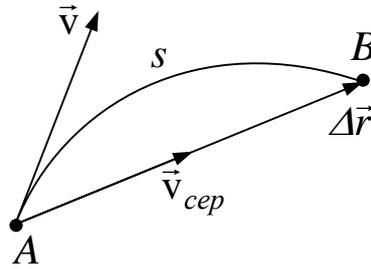


Рис. 1.6

Одиницею вимірювання швидкості у системі СІ є метр, поділений на секунду – м/с.

Фізичний зміст швидкості. Швидкість – це фізична величина, яка вказує, як з часом змінюється положення (координата) тіла.

Приклад обчислення швидкості

Координати матеріальної точки, яка рухається у площині $xу$, визначаються формулами: $x = At^4 + Bt^2$, $y = Ct^3 - t$, де $A=0,25 \text{ м/с}^4$; $B=0,5 \text{ м/с}^2$; $C=1/3 \text{ м/с}^3$; $D=1 \text{ м/с}$. Знайти вектор швидкості, модуль вектора швидкості у момент часу 1 с .

Розв'язок.

Продиференціюємо вирази для координат за часом і отримаємо проекції швидкості (координати вектора швидкості) на осі системи

$$\text{координат: } v_x = \frac{d}{dt}(0,25 \cdot t^4 + 0,5 \cdot t^2) = 0,25 \cdot 4 \cdot t^3 + 0,5 \cdot 2 \cdot t = t^3 + t;$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} \cdot t^3 - t\right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot t^2 + 1 = t^2 + 1.$$

Підставимо значення часу $t=1 \text{ с}$.

$$v_x = 1^3 + 1 = 2 \text{ м/с}; \quad v_y = 1^2 + 1 = 2 \text{ м/с}.$$

Через орти координатних осей запишемо вираз для вектора швидкості: $\vec{v} = 2 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ м/с}$.

$$\text{Модуль вектора швидкості } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2,8 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $\vec{v} = 2 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ м/с}$, $v \approx 2,8 \text{ м/с}$.

1.5. Прискорення. Класифікація поступальних рухів

Прискорення для швидкості є тим же самим, що швидкість для радіус-вектора: похідною за часом.

Миттєвим прискоренням називається перша похідна за часом від миттєвої швидкості:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Середнім прискоренням називається відношення вектора зміни швидкості $\Delta\vec{v}$ матеріальної точки, яка відбулася за час Δt , до величини часу Δt :

$$\vec{a}_{\text{сер}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Одиницею вимірювання прискорення у системі СІ є метр, поділений на секунду в квадраті – $\text{м}/\text{с}^2$.

Фізичний зміст прискорення. Прискорення – це фізична величина, яка вказує, як з часом змінюється швидкість тіла.

Поступальні рухи можна класифікувати по двом критеріям:

- а) прямолінійний, непрямолінійний;
- б) рівномірний, рівноприскорений, нерівномірний.

Рівномірним прямолінійним називається рух матеріальної точки вздовж прямої, якщо за рівні проміжки часу тіло проходить однакові шляхи. Тобто це рух з постійною швидкістю.

Рівноприскорений прямолінійний – рух вздовж прямої, при якому матеріальна точка за рівні проміжки часу змінює свою швидкість на одну й ту ж величину. Тобто це рух з постійним прискоренням.

Приклад обчислення прискорення

Зайти вектор прискорення та його модуль у прикладі з пункту 1.4.

Розв'язок.

Продиференціюємо вирази для проекцій швидкості за часом і отримаємо проекції координати вектора прискорення у потрібний момент часу:

$$a_x = \frac{d}{dt}(t^3 + t) = 3 \cdot t^2 + 1 = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4 \text{ м}/\text{с}^2;$$

$$a_y = \frac{d}{dt}(t^2 + 1) = 2 \cdot t = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Вектор швидкості: $\vec{a} = 2 \cdot (2 \cdot \vec{i} + \vec{j}) \text{ м}/\text{с}^2$.

Його модуль: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,5 \text{ м}/\text{с}$.

1.6. Обчислення шляху, якщо відома швидкість

Щоб визначити пройдений матеріальною точкою шлях при нерівномірному русі роблять наступне.

1) Розбивають траєкторію на N ділянок (частин) (див. рис. 1.7), кожна з яких має довжину Δs_i . Якщо N – досить велике, то можна вважати кожен таку частину траєкторії відрізком прямої. Припускають, що швидкість v_i матеріальної точки в межах однієї ділянки незмінна й дорівнює, наприклад, швидкості на початку ділянки.

2) Обчислюють довжину кожної ділянки Δs_i за формулою для шляху при рівномірному русі:

$$\Delta s_i = v_i \Delta t_i,$$

де Δt_i – час, за який матеріальна точка проходить ділянку Δs_i .

3) Підсумовують по усім ділянкам і отримують весь шлях

$$s \approx \sum_i \Delta s_i = \sum_i v_i \Delta t_i.$$

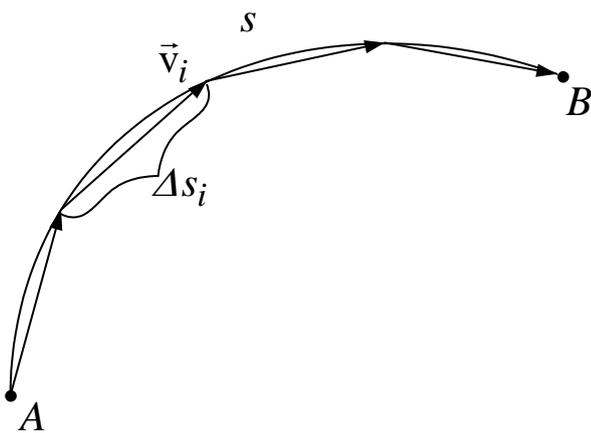


Рис. 1.7

Щоб збільшити точність розрахунку, виконують ці всі дії при більшому N . У граничному випадку, коли $N \rightarrow \infty$, сума переходить у інтеграл:

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

Межі інтегрування – початковий t_1 та кінцевий t_2 моменти часу.

Приклад обчислення шляху.

Швидкість точки, яка рухається вздовж прямої задана рівнянням $v = At^3 + Bt^2 + Ct + D$, де $A=4 \text{ м/с}^4$; $B=3 \text{ м/с}^3$; $C=2 \text{ м/с}^2$; $D=1 \text{ м/с}$.

Знайти шлях, який проходить точка від моменту часу $t_1=0 \text{ с}$ до $t_2=2 \text{ с}$.

Розв'язок. Шлях знайдемо інтегруванням:

$$s = \int_0^2 (4 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 1) dt = \left(4 \cdot \frac{t^4}{4} + 3 \cdot \frac{t^3}{3} + 2 \cdot \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^2 =$$

$$= 16 + 8 + 4 + 2 = 30 \text{ м.}$$

1.7. Нормальне та тангенціальне прискорення

Розглядаючи рух матеріальної точки по криволінійній траєкторії, зручно вектор повного прискорення \vec{a} розкласти на два взаємно перпендикулярних компоненти: \vec{a}_τ – тангенціальне і \vec{a}_n – нормальне прискорення (див. рис. 1.8).

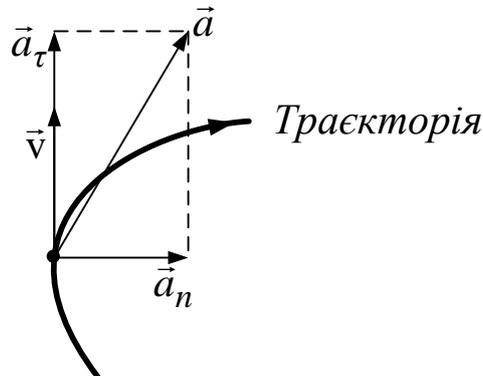


Рис. 1.8

Вектор тангенціального прискорення має напрямок вздовж дотичної, а нормальне прискорення – вдовж нормалі до траєкторії. Модуль тангенціального прискорення є першою похідною за часом від модуля швидкості:

$$|\vec{a}_\tau| = a_\tau = \dot{v}.$$

Модуль нормального прискорення залежить від радіусу кривизни траєкторії у даній точці траєкторії та модуля швидкості:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Вектор повного прискорення є векторною сумою тангенціального й нормального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Модуль повного прискорення знаходять за теоремою Піфагора:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

Рух точки називається прискореним, якщо чисельне значення її швидкості збільшується з часом, тобто $a_\tau > 0$. Рух точки називається сповільненим, якщо чисельне значення її швидкості зменшується з часом, тобто $a_\tau < 0$. Якщо $a_\tau = 0$, то матеріальна точка здійснює рівномірний рух, а якщо $a_n = 0$ – рух по прямій (прямолінійний рух). Величини a_τ і a_n характеризують швидкість зміни відповідно чисельного значення та напрямку швидкості матеріальної точки, що рухається.

ПРИКЛАДИ

1. Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R=13$ м. Шлях змінюється за законом $s = At + Bt^2 + Ct^3$, де $A=1$ м/с, $B=0,5$ м/с², $C=1/3$ м/с³. Знайти для моменту часу $t=3$ с 1) нормальне, 2) тангенціальне, 3) повне прискорення.

Розв'язок.

1) Знайдемо залежність швидкості від часу диференціюванням:

$$v = \frac{d}{dt} s = A + 2Bt + 3Ct^2 = 1 + t + t^2, \text{ для моменту часу } t=3 \text{ с швидкість}$$

$$v(3) = 1 + 3 + 3^2 = 13 \text{ м/с.}$$

Нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{13^2}{13} = 13 \text{ м/с}^2$$

2) Знайдемо залежність тангенціального прискорення від часу диференціювання виразу для швидкості: $a_\tau = \frac{d}{dt} v = 2B + 6Ct = 1 + 2t$, для моменту часу $t=3$ с $a_\tau(3) = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \text{ м/с}^2$.

3) За теоремою Піфагора визначимо повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{13^2 + 7^2} \approx 14,8 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a_n = 13 \text{ м/с}^2$, $a_\tau = 7 \text{ м/с}^2$, $a \approx 14,8 \text{ м/с}^2$.

2. Тіло кинули під кутом α до горизонту. Для моменту часу, коли вектор швидкості складатиме кут $\varphi=30^\circ$ з горизонтальною лінією, Знайти: 1) нормальне, 2) тангенціальне, 3) повне прискорення.

Розв'язок.

Повне прискорення – це прискорення вільного падіння $\vec{a} = \vec{g}$. З рис. 1.9 одержимо

$$a_n = g \cos \varphi = 9,8 \cos 30^\circ \approx 8,49 \text{ м/с}^2,$$

$$a_\tau = g \sin \varphi = 9,8 \sin 30^\circ \approx 4,90 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{8,49^2 + 4,90^2} \approx 9,8 \text{ м/с}^2.$$

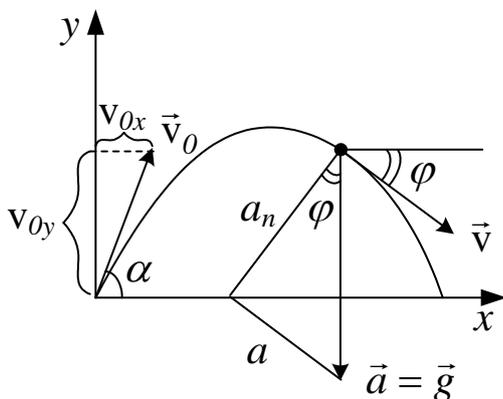


Рис. 1.9

Відповідь: $a_n \approx 8,49 \text{ м/с}^2$, $a_\tau \approx 4,90 \text{ м/с}^2$, $a \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.

1.8. Кутові швидкість та прискорення

Обертальний рух – це рух, при якому усі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій – осі обертання. Вісь обертання може проходити через тіло. Тоді точки, які лежать на осі обертання не здійснюють рухів по колу.

Розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. В ролі координати тіла при такому обертанні виступає кут, який показує, наскільки повернулося тіло від початкового положення.

Такий обертальний рух описує вектор повороту $\vec{\varphi}$ – це векторна величина, модуль якої чисельно рівний куту в радіанній мірі, а напрямок – паралельний осі обертання і визначається правилом правого гвинта. Лише для поворотів на незкінченно малі кути можна вводити поняття вектора повороту.

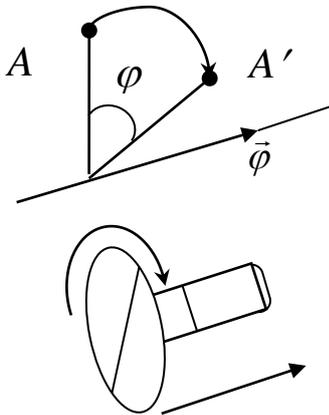


Рис. 1.10

На рис. 1.10 показана точка A , що належить твердому тілу. Після обертання тіла на кут φ ця точка перейде у положення A' . Вектор повороту $\vec{\varphi}$ лежить на осі обертання.

Правило правого гвинта. Розташуємо поряд із тілом, що обертається, праворізьбовий гвинт, як показано на рис. 1.10. Вісь гвинта паралельна осі обертання тіла. Якщо ми дивимося на гвинт з боку його шляпки, то обертання шляпки гвинта

за годинниковою стрілкою викличе потупальний рух гвинта “від нас”. За таким правилом обирають один напрямок вектора $\vec{\varphi}$ з двох можливих взовж осі обертання.

Кутова швидкість – це перша похідна за часом від кута повороту:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Одиницею вимірювання кутової швидкості у системі СІ є радіан, поділений на секунду – рад/с .

Фізичний зміст кутової швидкості. Кутова швидкість – це фізична величина, яка вказує, як з часом змінюється положення (орієнтація у просторі) тіла. Кутова швидкість характеризує не тільки зміну у часі кута, на який повернеться тіло, а й зміну положення у просторі осі обертання тіла.

Кутове прискорення – перша похідна за часом від кутової швидкості (або друга похідна від вектора повороту):

$$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Одиницею вимірювання кутового прискорення у системі СІ є радіан, поділений на секунду в квадраті – $рад/с^2$.

Фізичний зміст прискорення. Кутове прискорення – це фізична величина, яка вказує, як з часом змінюється кутова швидкість тіла.

Якщо кутова швидкість стала величиною ($\omega = const$), то обертальний рух називається рівномірним. Кутова швидкість у цьому випадку

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

де φ – кут, на який повернулося тіло за час t .

Якщо $\vec{\beta} = const$ – рух рівноприскорений обертальний.

Період обертання T – це час, за який тіло здійснює один повний оберт. **Частота обертання** – це кількість обертів за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Кутова швидкість пов'язана із частотою обертання такою формулою:

$$\omega = 2 \pi \nu.$$

Одиниця вимірювання частоти – $с^{-1}$.

Приклад. Колесо, обертаючись рівноприскорено, досягло кутової швидкості через N оборотів після початку руху $20 рад/с$. Знайти кутове прискорення колеса.

Розв'язок. Рівноприскорений обертальний рух описується формулами

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta t^2}{2}, \quad \omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t.$$

Один оберт ($N=1$) відповідає куту повороту $\varphi=2\pi$, а N обертів – $\varphi=2\pi N$. Оскільки обертання колеса починається зі стану спокою, то $\omega_0 = 0 рад/с$ і замість (2.1) з (2.2) запишемо систему алгебраїчних рівнянь двох змінних t і β і вирішимо її:

$$\begin{cases} \varphi = 2\pi N = \frac{\beta t^2}{2}, \\ \omega = \beta \cdot t; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\pi N = \frac{\beta}{2} \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^2, \\ t = \frac{\omega}{\beta}; \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{\omega^2}{4\pi N} = \\ &= \frac{20^2}{4\pi \cdot 10} = 3,18 рад/с^2. \end{aligned}$$

1.9. Скалярний та векторний добуток векторів

Скалярний та векторний добуток векторів дуже важливі у фізиці. Багато фізичних величин є скалярними чи векторними добутками від інших величин. Якщо два вектора перемножимо скалярно, то отримаємо число (скалярну величину), а якщо перемножимо векторно – вектор.

1.9.1. Скалярний добуток векторів

Нехай є два вектори \vec{r} і $\vec{\omega}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$
$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z.$$

Скалярний добуток цих векторів позначається $\vec{\omega} \cdot \vec{r}$ або $(\vec{\omega}, \vec{r})$ і дорівнює сумі добутків відповідних компонент двох векторів:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z.$$

Скалярний добуток векторів \vec{r} і $\vec{\omega}$ дорівнює добутку модулів двох векторів r і ω на косінус кута між векторами α :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega r \cos \alpha.$$

Властивості скалярного добутку:

- 1) множники можна переставляти місцями $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{\omega}$;
- 2) можна розкривати дужки $\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \vec{\omega} \cdot \vec{r}_1 + \vec{\omega} \cdot \vec{r}_2$;
- 3) якщо вектори ненульової довжини ($\omega \neq 0$ та $R \neq 0$) та їхній скалярний добуток $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$, то ці вектори взаємно перпендикулярні $\vec{\omega} \perp \vec{r}$.

1.9.2. Векторний добуток векторів

Розглянемо знову введені раніше вектори \vec{r} і $\vec{\omega}$. Векторним добутком цих векторів є такий вектор \vec{v} (див. рис. 1.11), який задовольняє таким умовам:

- 1) модуль вектора \vec{v} дорівнює добутку модулів векторів \vec{r} і $\vec{\omega}$ на синус кута між ними $|\vec{v}| = \omega r \sin \alpha$;
- 2) $\vec{v} \perp \vec{r}$ і $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, тобто вектор \vec{v} перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори \vec{r} і $\vec{\omega}$;
- 3) трійка векторів \vec{v} , \vec{r} і $\vec{\omega}$ – права у правій системі координат.

Трійкою векторів будемо називати задані у певній послідовності три некомпланарні (які не лежать в одній площині) вектори.

Трійка векторів \vec{v} , \vec{r} і $\vec{\omega}$ називається правою, якщо дивимося із кінця вектора \vec{v} і бачимо найкорочше обертання від \vec{r} до $\vec{\omega}$, що відбувається проти годинникової стрілки. Декартова система

координат називається правою, якщо складена з ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ системи координат трійка векторів є правою.

Векторний добуток позначається квадратними дужками або знаком “ \times ”:

$$\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}] = \vec{r} \times \vec{\omega}.$$

Властивості векторного добутку:

1) важливим є порядок множників $\vec{\omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$ (тобто вектори, що визначаються векторними добутками $\vec{\omega} \times \vec{r}$ і $\vec{r} \times \vec{\omega}$ мають протилежний напрямок);

2) модуль векторного добутку векторів \vec{r} і $\vec{\omega}$ чисельно рівний площі паралелограма, утвореного цими векторами (див. рис. 1.11):

$$|\vec{r} \times \vec{\omega}| = S = rH = r \omega \sin \alpha;$$

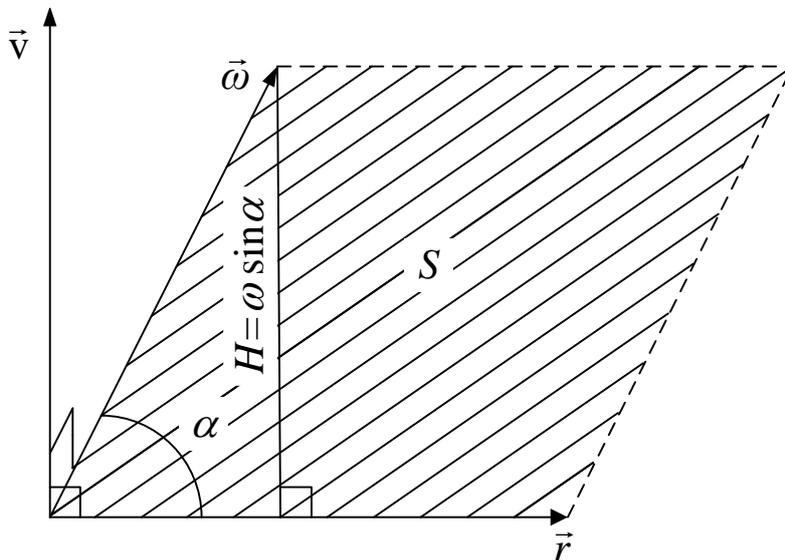


Рис. 1.11

3) векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю $\vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{0}$, якщо вектори паралельні. Символ $\vec{0}$ позначає нульовий вектор (усі три проекції вектора на координатні осі дорівнюють нулю).

Інколи векторний добуток \vec{v} двох векторів \vec{r} і $\vec{\omega}$ представляють у вигляді визначника, верхній рядок якого складається з ортів координатних осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; другий і третій рядки – з проекцій на координатні осі векторів \vec{r} і $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = \vec{i}(y\omega_z - z\omega_y) - \vec{j}(x\omega_z - z\omega_x) + \vec{k}(x\omega_y - y\omega_x).$$

1.10. Зв'язок лінійних кінематичних величин із кутовими

Розглянемо точку A , яка належить тілу, що обертається (див. рис. 1.12). Лінійна швидкість точки є векторним добутком векторів кутової швидкості $\vec{\omega}$ і радіус-вектора \vec{r} точки A :

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Якщо провести перпендикулярний до осі обертання вектор \vec{R} в дану точку тіла, то, оскільки вектор швидкості \vec{v} перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори \vec{R} і \vec{r} , можна записати

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

Модуль лінійної швидкості дорівнює

$$v = \omega R.$$

Тангенціальне й нормальне прискорення виражаються через кутові величини таким чином:

$$\vec{a}_\tau = \beta \cdot R \cdot \vec{\tau},$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}.$$

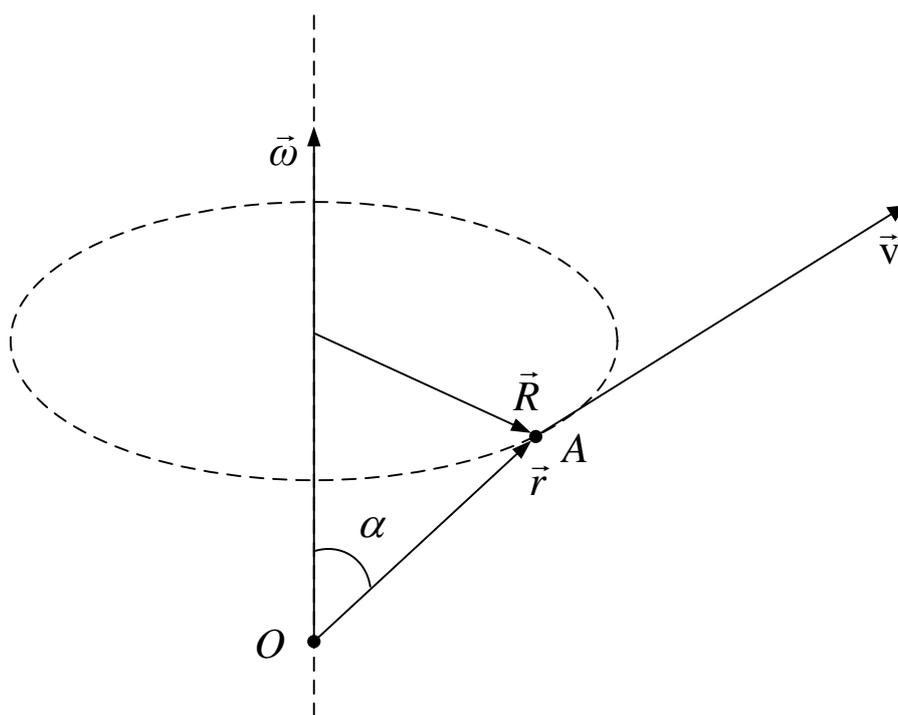


Рис.1.12

1.11. Аналогія між кінематичними формулами обертального і поступального руху

Зручно записати кінематичні формули у таку таблицю (див. табл. 1.1). Фізичні величини із індексом 0 відповідають моменту часу $t=0$ с.

Таблиця 1.1. Кінематичними формулами обертального і поступального рухів.

Вид руху	Назва величини	Рух	
		Поступальний	Обертальний
Назви фізичних величин	Координата	просторова x	кутова φ
	Шлях	s	φ
	Швидкість	лінійна v	кутова ω
	Прискорення	лінійне a	кутове β
Рівномірний рух	Координата	$x = x_0 + v t$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
	Шлях	$s = x - x_0 = v t$	$\varphi = \omega t$
	Швидкість	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
	Прискорення	$a = 0$	$\beta = 0$
Рівноприскорений рух	Координата	$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$
	Шлях	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$
	Швидкість	$v = v_0 + a t$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
	Прискорення	$a = \text{const}$	$\beta = \text{const}$
Нерівномірний рух	Координата	$x = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	Шлях	$s = \int_0^t v(t) dt$	$\varphi = \int_0^t \omega(t) dt$
	Швидкість	$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
	Прискорення	$a = \frac{dv}{dt} \neq \text{const}$	$\beta = \frac{d\omega}{dt} \neq \text{const}$

ТЕМА 2

ДИНАМІКА

2.1. Границі застосування класичної механіки

Класична механіка базується на законах Ньютона і є частковим випадком сучасної фізики. Місце класичної механіки серед розділів сучасної фізики показано у табл. 2.1. Визначальними параметрами є $c=10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі, та M_a – маса тома ($M_a \approx 10^{-27}$ кг). Якщо маса досліджуваного тіла значно перевищує масу атома ($m \gg M_a$), а швидкість тіла значно менша за швидкість світла у вакуумі ($v \ll c$), то явище можна вивчати у межах класичної механіки. Якщо швидкість тіла порівнянна із параметром c , то маємо справу із релятивістською механікою (теорією відносності). Квантова механіка вивчає мікросвіт із об'єктами малих розмірів та мас ($m \sim M_a$).

Таблиця 2.1. Місце класичної фізики серед сучасних фізичних теорій

Умова	$v \ll c$	$v \sim c$
$m \gg M_a$	Класична механіка	Релятивістська механіка
$m \sim M_a$	Квантова механіка	Квантова електродинаміка

І, нарешті, сучасна наука, яка квантові принципи розповсюджує на електромагнітну теорію називається квантовою електродинамікою. Цю фундаментальну теорію взаємодії електричного поля та зарядів слід вважати найвизначним досягненням фізики. У ній одній містяться головні правила всіх звичайних явищ, крім тяжіння. Наприклад, із квантової електродинаміки виводяться всі відомі електричні, механічні та хімічні закони; вона првістила існування, крім електрона, іншої частинки з тією ж масою, але протилежним зарядом, – так званий позитрон. До теперішнього часу поки що не знайдено ні одного виключення із законів квантової електродинаміки.

2.2. Закони ньютонна

2.2.1. Перший закон Ньютона: тіло знаходиться у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір (або якщо), поки на нього не діють інші тіла.

Два стани тіла (спокою та рівномірного прямолінійного руху) характеризуються тим, що прискорення дорівнює нулю. Перший закон Ньютона виконується лише у інерціальних системах відліку.

Дві системи відліку називаються **інерціальними**, якщо вони рухаються одна відносно одної рівномірно (з постійною швидкістю).

Прикладом інерціальної системи відліку може слугувати геліоцентрична система – система, яка має в якості тіла відліку Сонце. Відомо, що Сонце рухається із постійною швидкістю навколо центра нашої галактики по колу, радіус якого приблизно дорівнює $3 \cdot 10^4$ світлових років. У земних масштабах цей рух можна вважати прямолінійним.

2.2.2. Маса, імпульс, закон збереження імпульсу

Маса – міра інертності тіла при поступальному русі. У системі СІ маса вимірюється у кілограмах (кг).

Замкненою системою тіл називається сукупність тіл, на які не іють зовнішні тіла (тобто такі, які не належать даній системі).

Розглянемо замкнену систему з двох тіл, які взаємодіють між собою (наприклад, зіштовхуються). В результаті взаємодії тіла набувають зміни швидкості $\Delta \vec{v}_1$ і $\Delta \vec{v}_2$. З досліду випливає, що ці два вектори завжди мають протилежні напрямки, а відношення їхніх модулів не залежить від виду та інтенсивності взаємодії, яке приймають рівним до оберненого відношення мас тіл:

$$\frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Врахувавши протилежний напрямок векторів $\Delta \vec{v}_1$ і $\Delta \vec{v}_2$ можемо записати

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2.$$

Маса тіл не змінюється, тому знак дельта винести за дужки і останню рівність можна переписати у вигляді $\Delta(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0$, або, якщо позначити $\vec{p} = m \vec{v}$:

$$\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0. \quad (2.1)$$

Фізична величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість $\vec{p} = m \vec{v}$ називається **імпульсом тіла**. Векторна сума

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ являє собою загальний (повний) імпульс системи двох тіл. У системі СІ одиниця вимірювання імпульсу не має назви, вона дорівнює $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$. Формула (2.1) є математичним записом **закону збереження імпульсу** замкненої системи, яка складається з двох тіл. Цей закон можна узагальнити й на систему, що складається з багатьох тіл: *повний імпульс замкненої системи N тіл, які взаємодіють між собою, залишається постійним:*

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k = \text{const}.$$

2.2.3. Другий закон Ньютона. Добуток маси тіла на його прискорення дорівнює силі, яка діє на тіло:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

2.2.4. Третій закон Ньютона. Сили, з якими діють одне на одне взаємодіючі тіла, рівні за величиною та протилежні за напрямками:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Тут позначено: \vec{F}_{12} – сила, з якою діє тіло 2 на тіло 1, \vec{F}_{21} – сила, з якою діє тіло 1 на тіло 2. Ці сили не компенсують одна одну тому що вони прикладені до різних тіл.

2.2.5. Основний закон динаміки поступального руху. Похідна за часом від імпульсу \vec{p} матеріальної точки дорівнює вектору \vec{F} усіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну точку:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{або} \quad m\vec{a} = \vec{F}, \quad (2.2)$$

де \vec{a} – прискорення матеріальної точки, m – її маса. Тобто, другий закон Ньютона є основним законом динаміки. Цей закон можна записати у проекціях на координатні осі:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z, \quad (2.3)$$

де F_x, F_y, F_z – проекції вектора сили \vec{F} , p_x, p_y, p_z – проекції вектора імпульсу \vec{p} на координатні осі. Проекції вектора \vec{F} можуть залежати як від координат матеріальної точки, так і від часу. Тому рівняння $m\vec{a} = \vec{F}$ визначає зв'язок між прискоренням точки та її координатою, отже є диференціальним рівнянням другого порядку. Розв'язавши це рівняння, можна отримати формулу (**закон руху**), яка визначає, як від часу залежать координати матеріальної точки. **Основна задача механіки** саме й полягає в одержанні закону руху.

2.3. Принцип відносності Галілея

Розглянемо дві системи відліку K і K' (див. рис. 2.1). Система K' рухається відносно системи K з постійною швидкістю \vec{v}_0 . Осі x і x' збігаються, а осі y і y' та z і z' паралельні між собою.

Зв'язок між координатами x, y, z деякої точки P і координатами x', y', z' тієї ж точки в системі K' такий:

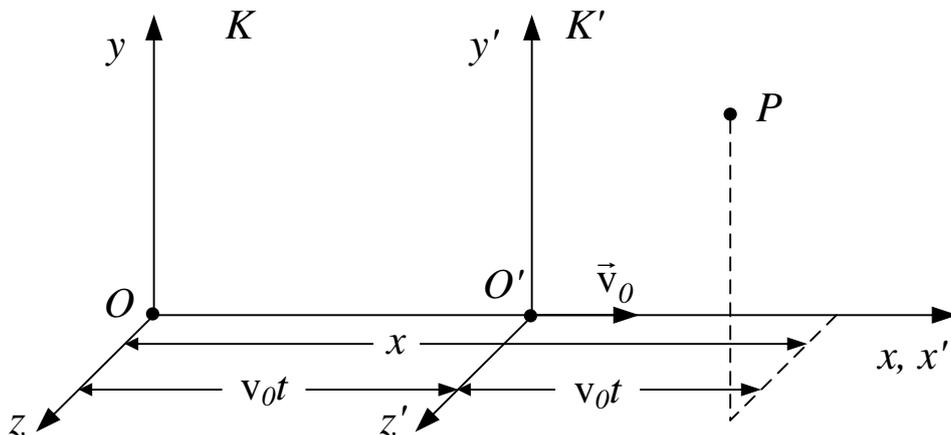


Рис.2.1

$$x = x' + v_0 t, \quad y = y', \quad z = z'.$$

Продиференціювавши ці рівняння за часом, отримаємо зв'язок між швидкостями точки P у двох системах відліку:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v_0, \\ v_y = v'_y, \\ v_z = v'_z. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ці три скалярні формули дають одну векторну:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (2.5)$$

Формули (2.4) і (2.5) дають правило додавання швидкостей у класичній механіці. На відміну від системи (2.4) формула (2.5) справедлива для довільної орієнтації систем координат K і K' .

Якщо ми продиференціюємо (2.5) за часом ще раз, то отримаємо висновок, що прискорення будь-якого тіла в усіх інерціальних системах відліку залишається одним і тим же: $\vec{a} = \vec{a}'$.

Таким чином, рівняння динаміки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Твердження про те, що усі механічні явища в різних інерціальних системах відліку протікають однаковим чином, називається принципом відносності Галілея.

2.4. Сили

У фізиці розрізняють чотири фундаментальні взаємодії:

- 1) гравітаційна (обумовлена всесвітнім тяжінням);
- 2) електромагнітна (здійснюється за допомогою електромагнітного поля),
- 3) сильна (забезпечує зв'язок частин у атомному ядрі),
- 4) слабкі (відповідальне за процеси розпаду елементарних частинок).

Гравітаційні та електромагнітні сили є фундаментальними, оскільки їх не можна звести до інших, більш простих сил. Пружні сили та сили тертя не є фундаментальними. Закони фундаментальних сил дуже прості.

2.4.1. Гравітаційна сила. Закон всесвітнього тяжіння визначає силу F взаємного притягання між точковими масами m_1 і m_2 , які знаходяться на відстані r :

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Гравітаційна стала $G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$. Направлена сила вздовж прямої, яка з'єднує точкові тіла m_1 і m_2 .

2.4.2. Сила важкості

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

– це сила, з якою Земля притягає до себе будь-яке тіло маси m . Усі тіла (які мають більш обтічну форму, щоб повітря діяло на тіло з найменшою силою тертя) біля поверхні Землі падають з однаковим прискоренням $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискоренням вільного падіння.

Сила, з якою тіло діє на опору чи підвіс, називається **вагою тіла**. Отже фізичні величини вага й маса тіла – зовсім різні величини й мають різні одиниці вимірювання: ньютон (для ваги), кілограм (для маси).

Сила, з якою діє опора чи підвіс на тіло, називається **силою реакції опори** й позначаються \vec{N} . Сила реакції опори завжди направлена по нормалі до поверхні, на якій знаходиться тіло.

2.4.3. Сили тертя виникають при переміщенні тіл (або їхніх частин), які дотикаються одне до одного.

Існує два види тертя: зовнішнє і внутрішнє. Зовнішнє тертя виникає між різними тілами, а внутрішнє – між частинами одного і того

ж суцільного тіла (наприклад, рідини або газу), які дотикаються одне до одного і зміщуються одне відносно одного.

Тертя між поверхнями двох твердих тіл за відсутності будь-якого прошарку між ними (наприклад, мастила між ними) називається сухим. Вирізняють сухе тертя ковзання та кочення.

Модуль сили сухого тертя ковзання, яка діє на тіло, що знаходиться на плоскій гладкій поверхні, прямо пропорційний до величини сили реакції опори:

$$F_{тер} = kN.$$

Коефіцієнт пропорційності k називається коефіцієнтом тертя, який приймає значення $0 < k < 1$.

Сила тертя виникає не лише при ковзанні тіл одних відносно інших, а й при намаганні викликати таке ковзання. У останньому випадку сила тертя називається силою тертя спокою.

За малих швидкостях сила в'язкого тертя прямо пропорційна швидкості тіла, яке рухається через в'язке середовище:

$$F_{тер} = k_1 v.$$

За великих швидкостях – пропорційна квадрату швидкості:

$$F_{тер} = k_2 v^2.$$

Величина коефіцієнтів залежить від форми та розмірів тіла.

2.4.4. Сила пружності. Під дією прикладених до тіла сил реальне тіло деформується, тобто змінює свою форму й об'єм. Якщо після припинення дії сили тіло приймає попередні розміри, деформація називається пружною. Пружні деформації спостерігаються у тому випадку, якщо обумовлююча деформація сила не перебільшує деякої, визначеної для кожного тіла межі (межі пружності).

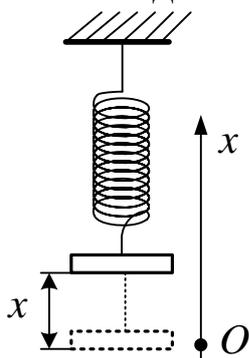


Рис. 2.2

Розглянемо пружину, верхній кінець якої закріплений, а до нижнього приєднано вантаж (див. рис. 2.2). Якщо вантаж змістити на невелику відстань x , то у пружині виникне пружна сила

$$F = -k x,$$

де k – коефіцієнт пружності пружини; знак мінус у правій частині формули вказує на те, що проекція пружної сили на вертикальну вісь і координата x мають різні знаки. Твердження про пропорційність між пружною силою та деформацією має назву **закону Гука**.

У системі СІ силу вимірюють у ньютонках (H). Із рівняння другого закону Ньютона випливає, що $1 H = kг \cdot м/с^2$.

2.5. Кінетична енергія, робота, потужність

2.5.1. Представимо прискорення як першу похідну за часом від швидкості і запишемо рівняння другого закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}}.$$

Помножимо скалярно ліву частину цього рівняння на елементарний вектор переміщення $d\vec{s}$, яке матеріальна точка проходить за час dt , а ліву частину – на цей же вектор, але по-іншому записаний, $\vec{v}dt$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}dt. \quad (2.6)$$

Величина у лівій частині (2.6) називається **роботою сили** \vec{F} на елементарному переміщенні $d\vec{s}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2.7)$$

Ліву частину (2.6) перетворимо таким чином:

$$m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}dt = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT. \quad (2.8)$$

Величина під знаком диференціалу в (2.8) – **кінетична енергія** T :

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Отже, (2.6) запишемо так:

$$dA = dT. \quad (2.9)$$

Проінтегруємо вираз (2.9) і отримаємо

$$\int dA = \int dT; \\ A_{12} = T_2 - T_1. \quad (2.10)$$

З формули (2.10) випливає, що *робота усіх сил, які діють на тіло, дорівнює зміні кінетичної енергії тіла.*

Робота, яка здійснюється в одиницю часу, називається **потужністю**. Якщо за час dt здійснюється робота dA , то потужність дорівнює

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (2.11)$$

Якщо вираз для роботи dA візьмемо у вигляді лівій частини (2.6) і підставимо у (2.11), то отримаємо для потужності формулу

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Одиницею вимірювання роботи та кінетичної енергії у системі СІ є джоуль, а потужності – ват:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}, \quad 1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}}.$$

2.5.2. Обчислення роботи. Якщо тіло рухається прямолінійно (вздовж вектора переміщення $d\vec{s}$), а вектор сили \vec{F} у кожній точці траєкторії постійний за напрямком і за модулем, то робота дорівнює скалярному добутку сили на переміщення, як вказує формула (2.7). Якщо маємо обчислити роботу у загальному випадку, коли траєкторія тіла є довільною кривою у просторі, а вектор сили змінюється від точки до точки на траєкторії, то діють таким чином.

1) Розбивають траєкторію на N ділянок (частин) (див. рис. 2.3). Якщо N – досить велике, то можна вважати кожну таку частину траєкторії відрізком довжиною Δs_i . Вектор переміщення на ділянці з номером i є $\Delta\vec{s}_i$. Припускають, що сила, яка діє на матеріальну точку в межах однієї ділянки, незмінна й дорівнює \vec{F}_i ; наприклад, \vec{F}_i – це сила у початковій точці ділянки.

2) Обчислюють роботу на кожній ділянці ΔA_i за формулою (2.7):

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha.$$

3) Підсумовують по усім ділянкам і отримують повну роботу:

$$A \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i.$$

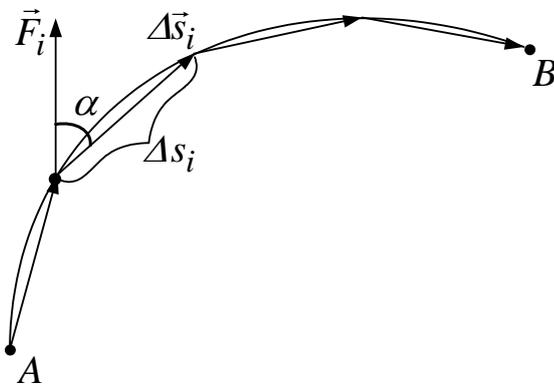


Рис.

Щоб збільшити точність розрахунку, виконують ці всі дії при більшому N . У граничному випадку, коли $N \rightarrow \infty$, сума переходить у інтеграл:

$$A = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2.12)$$

2.3 Межі інтегрування – початкова A та кінцева B точки траєкторії.

У правій частині виразу (2.12) стоїть інтеграл, який називається криволінійним інтегралом другого роду. Цей інтеграл використовується для обчислення роботи при змінній силі. Якщо силу \vec{F} і елементарний вектор переміщення $d\vec{s}$ представити через орти і їхні проекції на координатні осі:

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z, \quad d\vec{s} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz,$$

то інтеграл обчислюють таким чином:

$$A = \int dA = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_x(x,y,z) dx + \int_A^B F_y(x,y,z) dy + \int_A^B F_z(x,y,z) dz. \quad (2.13)$$

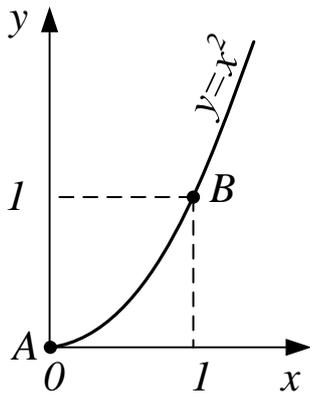


Рис. 2.4

2.5.3. Приклад обчислення роботи за допомогою криволінійного інтегралу другого роду.

Нехай задано проекції сили:

$$F_x = (x + y) \cdot H/m, \quad F_y = x^2 \cdot H/m.$$

Ця сила діє на точку, яка рухається у площині XU по параболі $y = x^2$ від т. $A(0,0)$ до т. $B(1,1)$ (див. рис.2.4). Отже, вектор сили є

$$\vec{F} = \vec{i}(x + y) + \vec{j} \cdot x^2,$$

а елементарний вектор переміщення $d\vec{s}$

$$d\vec{s} = \vec{i} dx + \vec{j} dy.$$

Врахуємо, що $y = x^2$ і $dy = 2x dx$ і за формулою (2.13) обчислимо роботу:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 F_x(x,y) dx + \int_0^1 F_y(x,y) dy = \int_0^1 (x + y) dx + \int_0^1 x^2 dy = \int_0^1 (x + x^2) dx + \int_0^1 x^2 2x dx = \\ &= \int_0^1 (x + x^2 + 2x^3) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

2.5.4. Консервативні сили. Якщо у кожній точці задано вектор $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$, то говорять, що у просторі задано векторне поле.

Нехай у кожній точці простору на деяку матеріальну точку діє сила, величина і напрямок якої у кожній точці різні. Отже задано **поле сил** $\vec{F}(x,y,z)$.

Поле сил називається **консервативним**, якщо робота, яку виконує поле сил при переміщенні точки від положення A до положення B , не залежить від форми траєкторії частинки (шляху інтегрування). В такому випадку:

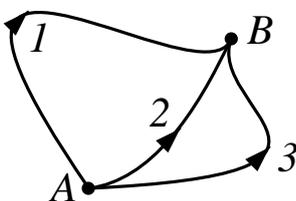


Рис. 2.5

$$A_1 = A_2 = A_3,$$

де A_1, A_2, A_3 – робота, обчислена вздовж траєкторій 1, 2, 3 відповідно (див. рис. 2.5).

Робота на замкненому контурі для поля консервативних сил буде дорівнювати нулю.

$$A = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0.$$

Насправді, оскільки $A_1 = A_2$, то робота по замкненому контурі $A1B2A$

$$A_{A1B2A} = A_{A1B} + A_{B2A} = A_1 + (-A_2) = 0,$$

де A_{A1B} – робота, обчислена вздовж першої траєкторії, A_{B2A} – робота, обчислена у зворотному напрямку вздовж другої траєкторії.

2.6. Потенціальна енергія

2.6.1. Градієнт скалярної функції. Якщо у кожній точці простору задано число $\varphi = \varphi(x, y, z)$, то говорять, що задано скалярне поле. Прикладом скалярного поля може бути поле значень температур у кожній точці в об'ємі газу, або значення електричного потенціалу поблизу зарядженого тіла.

Нехай у просторі задано скалярне поле $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і векторне поле $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \vec{i}F_x(x, y, z) + \vec{j}F_y(x, y, z) + \vec{k}F_z(x, y, z)$.

Якщо мають місце такі співвідношення:

$$F_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то векторне поле \vec{F} називається **градієнтом скалярної функції** $\varphi(x, y, z)$. Величина $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ є частковою похідною функції φ . Часткова похідна – це похідна за однією змінною (у даному випадку, за змінною x) від функції багатьох змінних. Наприклад, від функції $\Phi(x) = 5 \cos(xy) + 3x^2z - 48y$ часткова похідна за змінною x дорівнює

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -5y \sin(xy) + 6xz.$$

Позначається градієнт так чином:

$$\vec{F} = \text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi,$$

$\vec{\nabla}$ – диференціальний оператор “набла”:

$$\vec{\nabla} = \text{grad} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

2.6.2. Приклад на обчислення градієнта

Знайти градієнт від скалярної функції $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

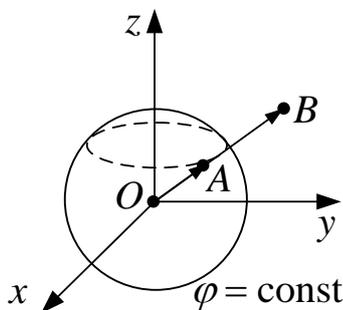


Рис. 2.6

Розв'язок. Спочатку знайдемо часткові похідні

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z.$$

Позначимо вектором \vec{F} градієнт даної функції:

$$\vec{F} = \text{grad } \varphi(x, y, z) = 2(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = 2\vec{r}.$$

На рис. 2.6 радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, точка A лежить на поверхні сфери, рівняння якої

$$\varphi(x, y, z) = \text{const};$$

градієнтом функції $\varphi(x, y, z)$ є подвійний радіус-вектор $\vec{F} = \overrightarrow{OB} = 2\vec{r}$.

2.6.3. Потенціальне поле

Якщо існує градієнт функції $\varphi(x,y,z)$, то векторне поле $\vec{F} = \text{grad } \varphi$ називається **потенціальним**. Функція φ називається **потенціальною функцією**.

Теорема

Якщо векторне поле $\vec{F}(x,y,z)$ потенціальне, то воно консервативне.

Доведення:

Потрібно довести той факт, якщо векторну функцію \vec{F} можна представити у вигляді градієнта скалярної функції φ , то робота по замкненому контуру дорівнює нулю: $A = \oint \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$.

Підставимо у формулу для визначення роботи вирази для градієнта та вектора елементарного переміщення й отримаємо:

$$\begin{aligned} A &= \oint \vec{F} \cdot \vec{ds} = \oint \text{grad } \varphi \cdot \vec{ds} = \oint \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) = \\ &= \left(\vec{i} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) \cdot \vec{i} + \left(\vec{j} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \cdot \vec{j} + \left(\vec{k} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) \cdot \vec{k} = \\ &= \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_1 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_1 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_1 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = 3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

оскільки інтегрування ведеться по замкненому контуру, тому $\varphi_1 = \varphi_2$, а деякі члени у другому рядку не враховані, тому що в них містяться скалярні добутки різних ортів, які дорівнюють нулю ($\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$). Теорему доведено.

Завдання. Самостійно довести зворотне твердження: якщо поле консервативне, то воно потенціальне.

2.6.4. Потенціальна енергія – це потенціальна функція з протилежним знаком:

$$U(x,y,z) = -\varphi(x,y,z). \quad (2.15)$$

Як впливає з формули (2.14), робота консервативного поля сил дорівнює зміні потенціальної функції:

$$A_{\text{конс}} = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (2.16)$$

Врахувавши визначення потенціальної енергії (2.15), виразимо роботу консервативних сил через потенціальну енергію:

$$A_{\text{конс}} = U_1 - U_2. \quad (2.16)$$

Сила виражається через потенціальну функцію як

$$\vec{F} = \text{grad} \varphi,$$

а через потенціальну енергію –

$$\vec{F} = -\text{grad} U.$$

2.6.5. Приклади потенціальних енергій

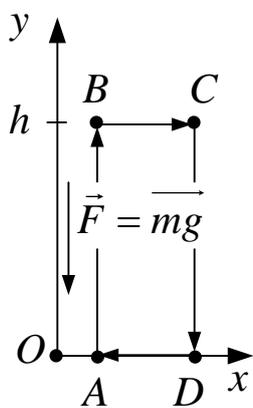


Рис. 2.7

1) Поле сил тяжіння Землі. Потенціальна енергія є функцією лише однієї змінної – висоти над поверхнею Землі:

$$U = mgh.$$

Переконаємося у тому, що це консервативне поле. Для цього обчислимо роботу вздовж замкненого контуру $ABCD A$ (див. рис. 2.7).

Робота на відрізку AB – $A = -mgh$; BC та DA – $A = 0$; на CD – $A = mgh$. Отже, робота вздовж замкненого контуру $ABCD A$ дорівнює нулю:

$$A = \int \vec{F} \overline{ds} = \int_A^B \vec{F} \overline{ds} + \int_B^C \vec{F} \overline{ds} + \int_C^D \vec{F} \overline{ds} + \int_D^A \vec{F} \overline{ds} = -mgh + 0 + mgh + 0 = 0.$$

2) Потенціальна енергія пружно стиснутої пружини:

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Величини k і x визначені у пункті 2.3.4.

Одиниця вимірювання потенціальної енергії – джоуль (Дж).

2.6.6. Потенціальна енергія механічної системи (системи матеріальних точок) – це частина механічної енергії системи, яка залежить лише від взаємного розташування частинок системи та їхнього положення зовнішньому силовому полі.

Якщо будь-які дві частинки всередині системи взаємодіють між собою із силами, модулі яких залежать лише від відстані між ними, то всі сили всередині системи будуть консервативними і потенціальна енергія механічної системи складається з двох частин: $U_{вз}$ – потенціальної енергії взаємодії між частинками системи (внутрішня потенціальна енергія) і $U_{зов}$ – потенціальної у зовнішньому консервативному силовому полі.

2.7. Закон збереження повної механічної енергії

2.7.1. З одного боку, робота, яку виконують зовнішні консервативні сили, дорівнює мінус зміні потенціальної енергії матеріальної точки (див. ф. (2.16)):

$$A_{\text{конс}} = U_1 - U_2. \quad (2.17)$$

З іншого боку, якщо не діють неконсервативні сили, ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії матеріальної точки (див. ф. (2.10)):

$$A_{\text{конс}} = T_2 - T_1. \quad (2.18)$$

Тож, прирівнюючи праві частини виразів (2.17) і (2.18) та перегрупуваючи доданки, отримуємо:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1.$$

Отже, величина $E = T + U$ зберігається, якщо на матеріальну точку діють лише консервативні сили.

Величину E , яка дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій частинки, називають **повною механічною енергією**:

$$E = T + U.$$

2.7.2. Закон збереження повної механічної енергії: *Повна механічна енергія матеріальної точки зберігається, якщо на матеріальну точку діють лише консервативні сили:*

$$E = \text{const.}$$

2.7.3. Приклад. Перевіримо закон для вільно падаючих тіл у полі тяжіння землі. Продиференціюємо вираз для кінетичної енергії і зробимо деякі перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = \frac{m}{2} 2v \frac{dv}{dt} = v \underbrace{m \frac{dv}{dt}}_{F = -mg} = \\ &= -v mg = -mg \frac{dh}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\underbrace{mgh}_U \right) = -\frac{d}{dt} U. \end{aligned}$$

Отже, ми отримали, що похідна за часом від кінетичної енергії дорівнює з протилежним знаком похідній від потенціальної енергії:

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{d}{dt} U. \quad (2.19)$$

Згадаємо, що похідна за часом від будь-якої величини є швидкістю зміни цієї величини. Тому швидкість збільшення кінетичної енергії дорівнює швидкості зменшення потенціальної енергії. Або, якщо помножимо ліву і праву частини виразу (2.19) на елементарний час dt , і по інтегруємо від початкового до кінцевого моменту часу, то отри-

маємо, що зміна потенціальної енергії U дорівнює зміні кінетичної енергії (з протилежним знаком), тобто:

$$\Delta U = -\Delta T.$$

Отже, закон збереження повної механічної енергії для тіл, які падають вільно у полі тяжіння Землі виконується.

2.7.4. Закон збереження повної механічної енергії для механічної системи: *повна механічна енергія системи тіл, на які діють лише консервативні сили, залишається постійною:*

$$E = T + U_{вз} + U_{зов} = \text{const},$$

де T – сума кінетичних енергій усіх тіл, $U_{вз}$ – потенціальна енергія взаємодії всередині системи, $U_{зов}$ – сума потенціальних енергій усіх тіл у зовнішньому полі сил. Закон виконується і для систем, які складаються із тіл, які не можна вважати матеріальними точками.

2.7.5. Робота неконсервативних сил. Розглянемо загальний випадок, коли на матеріальну точку діють як консервативні, так і неконсервативні сили:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{консер}} + \vec{F}_{\text{неконсер}}. \quad (2.20)$$

Загальна робота консервативних і неконсервативних сил є зміною кінетичної енергії (див. ф. (2.10)):

$$A = \int \vec{F} d\vec{s} = T_2 - T_1. \quad (2.21)$$

З іншого боку, обчислимо цю роботу, використавши вираз (2.20):

$$\begin{aligned} A &= \int (\vec{F}_{\text{консер}} + \vec{F}_{\text{неконсер}}) d\vec{s} = \int \vec{F}_{\text{консер}} d\vec{s} + \int \vec{F}_{\text{неконсер}} d\vec{s} = \\ &= A_{\text{консер}} + A_{\text{неконсер}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Об'єднуючи вирази (2.21) і (2.22), а також врахувавши, що $A_{\text{консер}} = U_1 - U_2$, маємо

у

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{\text{неконсер}},$$

звідки

$$A_{\text{неконсер}} = \underbrace{T_2 + U_2}_{E_2} - \underbrace{T_1 + U_1}_{E_1} = E_2 - E_1.$$

Отже, *робота неконсервативних сил дорівнює зміні повної механічної енергії:*

$$A_{\text{неконсер}} = E_2 - E_1.$$

Приклад неконсервативної сили – сила тертя.

2.8. Закон збереження моменту імпульсу

2.8.1. Розглянемо систему, що складається із двох матеріальних точок масами m_1 і m_2 . Ці точки взаємодіють між собою із силами \vec{f}_1 , \vec{f}_2 , а також знаходяться у полі зовнішньої сили: \vec{F}_1 , \vec{F}_2 – зовнішні сили.

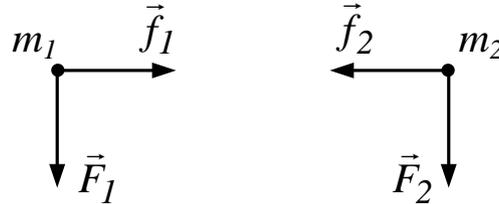


Рис. 2.8

Запишемо рівняння другого закону для двох точок:

$$\begin{cases} m_1 \dot{\vec{v}}_1 = \vec{f}_1 + \vec{F}_1 \\ m_2 \dot{\vec{v}}_2 = \vec{f}_2 + \vec{F}_2 \end{cases}$$

Векторно помножимо перше рівняння на радіус вектор першої точки \vec{r}_1 , а друге – на радіус вектор другої точки \vec{r}_2 :

$$\begin{cases} [\vec{r}_1, m_1 \dot{\vec{v}}_1] = [\vec{r}_1, \vec{f}_1] + [\vec{r}_1, \vec{F}_1], \\ [\vec{r}_2, m_2 \dot{\vec{v}}_2] = [\vec{r}_2, \vec{f}_2] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2]. \end{cases}$$

Додамо ці два рівняння, перед тим представивши ліві частини обох рівнянь як першу похідну за часом від такого векторного добутку:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_1, m \vec{v}_1] = \underbrace{[\dot{\vec{r}}_1, m \vec{v}_1]}_{=0} + [\vec{r}_1, m \dot{\vec{v}}_1] = [\vec{r}_1, m \dot{\vec{v}}_1].$$

Тут перший векторний добуток дорівнює 0, оскільки $\dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1$ (див. п. 1.9.2). Така заміна справедлива і для другого рівняння. Отже, після додавання отримаємо:

$$\frac{d}{dt} ([\vec{r}_1, m \vec{v}_1] + [\vec{r}_2, m \vec{v}_2]) = [\vec{r}_1, \vec{f}_1] + [\vec{r}_2, \vec{f}_2] + [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2]. \quad (2.23)$$

За третім законом Ньютона

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2,$$

тому два доданки у правій частині (2.23) взаємно знищуються:

$$[\vec{r}_1, \vec{f}_2] + [\vec{r}_2, \vec{f}_2] = [\vec{r}_1, \vec{f}_1] + [\vec{r}_2, (-\vec{f}_1)] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{f}_1] = \vec{0},$$

оскільки вектори $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ і \vec{f}_1 колінеарні.

Якщо ввести такі позначення:

$\overline{M}_1 = [\vec{r}_1, m\vec{v}_1]$, $\overline{M}_2 = [\vec{r}_2, m\vec{v}_2]$, $\vec{N}_1 = [\vec{r}_1, \vec{F}_1]$, $\vec{N}_2 = [\vec{r}_2, \vec{F}_2]$,
 то формулу (2.23) можемо записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_1 + \overline{M}_2) = \vec{N}_1 + \vec{N}_2. \quad (2.24)$$

Коли зовнішні сили не діють ($F_1 = F_2 = 0$, і як наслідок $N_1 = N_2 = 0$), то вираз (2.24) набуває вигляд

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_1 + \overline{M}_2) = \vec{0}.$$

А раз похідна від величини дорівнює нулю, то сама величина не змінюється з часом:

$$\overline{M}_1 + \overline{M}_2 = \overline{\text{const}}. \quad (2.25)$$

2.8.2. Величина, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора матеріальної точки (частинки) на її імпульс:

$$\overline{M} = [\vec{r}, m\vec{v}],$$

називається **моментом імпульсу частинки відносно точки** (початку системи координат).

2.8.3. Величина, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора матеріальної точки (частинки) на силу, яка діє на неї:

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}],$$

називається **моментом сили відносно точки** (початку системи координат), що діє на частинку. Момент сили \vec{N} характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої він береться.

Моменти імпульсу та сили – адитивні величина: момент імпульсу (сили) системи матеріальних точок є сумою моментів імпульсу (сили) кожної частинки.

Вираз (2.25) є математичним записом закону збереження моменту імпульсу для системи двох матеріальних точок.

2.8.4. Закон збереження моменту імпульсу: якщо на систему матеріальних точок не діють моменти зовнішніх сил, то сумарний момент імпульсу системи матеріальних точок не змінюється:

$$\overline{M} = \overline{\text{const}}. \quad (2.26)$$

2.8.5. Проекція вектора моменту імпульсу матеріальної точки \overline{M} на деяку вісь z є скалярною величиною, яка називається **моментом імпульсу матеріальної точки відносно осі z** . Позначають:

$$M_z = |\overline{M}| \cos \varphi,$$

де φ – кут між вектором \overline{M} і віссю z .

2.8.6. Момент сили відносно осі – це скалярна величина, яка дорівнює проекції вектора \vec{N} на вісь z :

$$N_z = |\vec{N}| \cos \varphi,$$

де φ – кут між вектором \vec{N} і віссю z .

2.8.7. Приклади

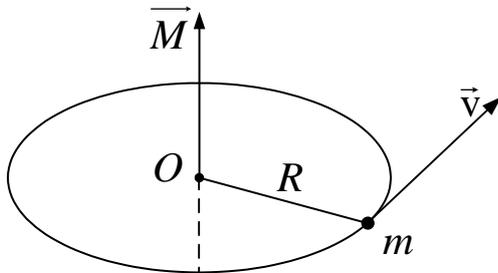


Рис. 2.9

1. Момент імпульсу точки маси m , яка рухається по колу радіусу R .

Момент імпульсу частинки відносно центра кола O дорівнює за модулем:

$$M = m v R.$$

Вектор \vec{M} перпендикулярний до площини кола. Напрямок вектора \vec{M} і напрямок руху частинки утворює правогвинтову систему. При рівномірному русі частинки по колу момент імпульсу залишається постійним і за модулем, і за напрямком.

2. Момент імпульсу точки маси m , яка рухається по прямій.

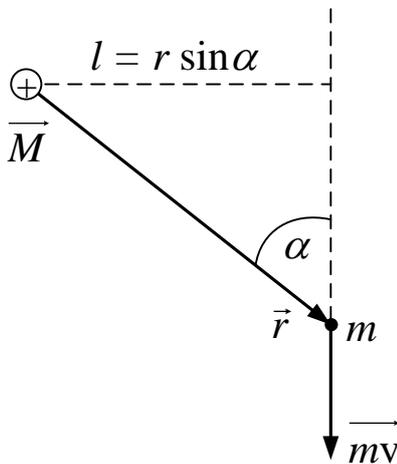


Рис. 2.10

Нехай частинка рухається вздовж прямої, показаної пунктиром на рис. 2.10. З рисунка видно, що модуль вектора момента імпульсу частинки дорівнює

$$M = m v r \sin \alpha = m v l,$$

де $l = r \sin \alpha$ – довжина перпендикуляра, який опущено із точки O на пряму, вздовж якої рухається частинка. Ця довжина називається **плечем імпульсу** відносно точки O . Вектор \vec{M} перпендикулярний до площини рисунка і перетинає цю площину у точці O .

2.8.8. Парою сил називають рівні за модулем і протилежно направлені сили, які не діють вздовж однієї прямої. Відстань l між прямими, вздовж яких діють сили, називається плечем пари сил. Сумарний момент сил, які утворюють пару сил, однаковий відносно будь-якої точки простору, направлений перпендикулярно до площини, у якій лежать сили, і чисельно дорівнює добутку модуля будь-якої сили на плече.

2.9. Динаміка обертального руху

2.9.1. Будь-який рух твердого тіла можна представити як накладання двох видів руху: поступальний і обертальний рух. Покажемо це на прикладі плоского руху, тобто такого, при якому усі точки тіла переміщуються в паралельних площинах. На рис. 2.11 показано приклад такого руху – кочення циліндра по площині.

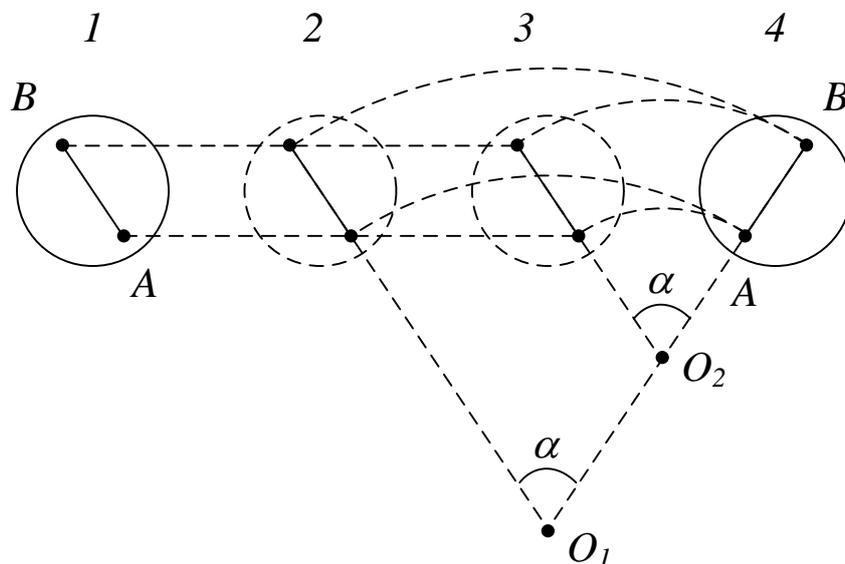


Рис. 2.11

Розкладання руху на два компоненти може бути здійснено нескінченним числом способів. На рис. 2.11 показано два приклада такого розкладання:

1) спочатку тіло рухається поступально з положення 1 до положення 2, а потім – обертально навколо осі O_1 з положення 2 до положення 4;

2) спочатку тіло рухається поступально з положення 1 до положення 3, а потім – обертально навколо осі O_2 з положення 3 до положення 4.

В обох прикладах обертання відбувається на один і той же кут α .

Елементарне переміщення (нескінченно мале) будь-якої точки тіла \overline{ds} теж можна розкласти на два переміщення – поступальне $\overline{ds}_{\text{пост}}$ й обертальне $\overline{ds}_{\text{оберт}}$:

$$\overline{ds} = \overline{ds}_{\text{пост}} + \overline{ds}_{\text{оберт}}. \quad (2.27)$$

Переміщення $\overline{ds}_{\text{пост}}$ одне й те саме для всіх точок тіла. Розділимо \overline{ds} на проміжок часу dt й отримаємо швидкість точки:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{пост}} + \vec{v}_{\text{оберт}}.$$

$\vec{v}_{пост}$ – однакова для усіх точок тіла, а $\vec{v}_{оберт} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ – різна для всіх точок тіла швидкість, обумовлена обертанням.

Отже, плоский рух твердого тіла можна представити як суму двох рухів – поступального зі швидкістю $\vec{v}_{пост}$ і кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

Елементарне переміщення твердого тіла при плоскому русі завжди можна уявити як обертання навколо деякої осі – миттєвої осі обертання. Наприклад, для циліндра, який котиться, миттєва вісь обертання збігається з лінією дотику циліндра із площиною.

2.9.2. Рух центра інерції твердого тіла. Якщо розбити тверде тіло на елементарні маси m_i , то його можна представити як систему матеріальних точок, взаємне положення яких залишається незмінним.

Запишемо для кожної елементарної маси рівняння другого закону Ньютона:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i \vec{r}_i) = \vec{f}_i + \vec{F}_i, \quad (2.28)$$

де \vec{f}_i – результуюча всіх внутрішніх сил, а \vec{F}_i – результуюча всіх зовнішніх сил, прикладених до даної елементарної маси (маса кожної частинки m_i не змінюється тому її можна внести під знак диференціювання). Складемо рівняння (2.28) для всіх елементарних мас і врахуємо, що сума всіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_i \frac{d^2}{dt^2}(m_i \vec{r}_i) = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.29)$$

Праворуч стоїть результуюча всіх зовнішніх сил \vec{F} , що діють на тіло:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (2.30)$$

Ліву частину (2.29) перетворимо таким чином, помінявши порядок підсумовування й диференціювання, а також помноживши чисельник і знаменник на масу тіла $m = \sum m_i$:

$$\sum_i \frac{d^2}{dt^2}(m_i \vec{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i (m_i \vec{r}_i) = m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum_i (m_i \vec{r}_i)}{\sum_i m_i} \right) = m \vec{r}_c. \quad (2.31)$$

Центр інерції – це така точка, пов'язана з тілом (або системою матеріальних точок), радіус-вектор якої визначається так:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad (2.32)$$

де m_i і \vec{r}_i – маса і радіус-вектор матеріальної точки з номером i , що належить тілу; m – маса тіла.

Враховуючи вирази (2.30) і (2.31), формулу (2.29) перепишемо так:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_c = \vec{F}. \quad (2.33)$$

Це означає, що *центр інерції твердого тіла рухається так, як рухалася б матеріальна точка з масою, яка дорівнює масі тіла, під дією всіх прикладених до тіла сил.*

2.9.3. Основні рівняння динаміки обертального руху. Абсолютно тверде тіло можна розглядати як систему частинок (матеріальних точок) з незмінними відстанями між ними. Для системи, що складалася з двох частинок, було отримане рівняння (2.24)

$$\frac{d}{dt} (\vec{M}_1 + \vec{M}_2) = \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Це рівняння можна узагальнити й на системі багатьох матеріальних точок, а також на абсолютно тверде тіло:

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = \vec{N}, \quad (2.34)$$

де \vec{M} являє собою момент імпульсу тіла, а праворуч стоїть сума моментів зовнішніх сил, які діють на тіло.

Рівняння (2.34) – **основні рівняння динаміки обертального руху.**

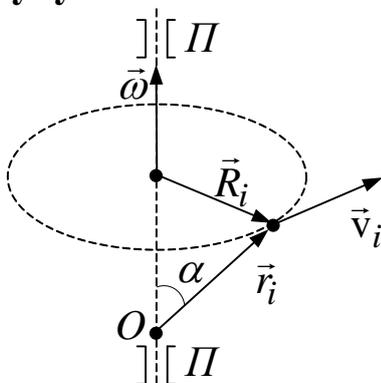


Рис. 2.12

Розглянемо обертання тала навколо нерухомої осі. На рис. 2.12 показана траєкторія матеріальної точки (частинки), яка належить тілу, \vec{r}_i – радіус-вектор цієї точки. Вісь обертання зафіксована у просторі за допомогою підшипників Π . Момент імпульсу частинки відносно початку координат (точки O) дорівнює

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, m\vec{v}_i],$$

а модуль цього вектора дорівнює

$$M_i = m_i v_i r_i = m_i r_i \omega R_i .$$

Момент імпульсу відносно осі обертання M_{zi} – це проекція вектора \vec{M}_i на цю вісь:

$$M_{zi} = m_i \omega R_i r_i \cos \alpha = m_i \omega R_i^2 , \quad (2.35)$$

тому що як видно з малюнка, $r_i \cos \alpha = R_i$.

Момент імпульсу адитивна величина

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i ,$$

тому момент імпульсу всього тіла відносно осі дорівнює

$$M = \sum_i M_i = \omega \sum_i m_i R_i^2 = \omega I , \quad (2.36)$$

де величина

$$I = \sum_i m_i R_i^2 \quad (2.37)$$

називається моментом інерції системи матеріальних точок (твердого тіла). Якщо тіло має симетричну форму і обертається навколо нерухомої осі симетрії, то вектори \vec{M} і $\vec{\omega}$ мають однакові напрямки, тому формулу (2.36) можна записати у векторній формі:

$$\vec{M} = I \vec{\omega} . \quad (2.38)$$

Підставимо (2.38) у основне рівняння динаміки обертального руху (2.34):

$$I \vec{\beta} = \vec{N} . \quad (2.39)$$

Величина $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – кутове прискорення твердого тіла. Рівняння (2.39) справедливе лише для випадку обертання симетричного твердого тіла навколо осі симетрії. Аналогічне рівняння у проекціях на вісь z

$$I \beta_z = N_z \quad (2.40)$$

вже справедливе для будь-якого (однорідного і неоднорідного, симетричного і несиметричного) тіла.

Рівняння (2.40) аналогічне рівнянню $ma = F$. Роль маси грає момент інерції, роль лінійного прискорення – кутове прискорення, і, нарешті, роль результуючої сили – сумарний момент зовнішніх сил.

2.9.4. Момент інерції. Фізичний зміст моменту інерції: **Момент інерції** – це міра інерції тіла при обертальному русі.

Момент інерції **матеріальної точки** – це добуток маси тіла на квадрат відстані від точки до осі обертання:

$$I_i = m_i R_i^2 .$$

Момент інерції абсолютно **твердого тіла** – це сума моментів інерції матеріальних точок, з яких складається тіло:

$$I = \sum_i I_i .$$

Момент інерції твердого тіла визначається формулою (2.37).

Якщо ввести поняття густини

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} ,$$

де V – об'єм, m – маса, а позначити через R відстань від елемента маси тіла dm до осі обертання; то момент інерції для суцільного тіла визначають за допомогою потрійного інтеграла

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV . \quad (2.41)$$

Приклад. Знайдемо момент інерції однорідного диска за формулою (2.41). Радіус диска – R , товщина – b .

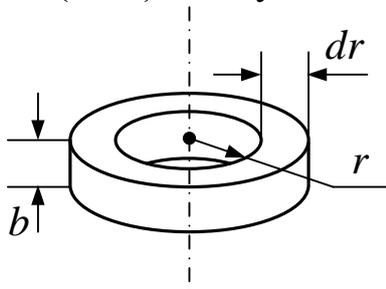


Рис. 2.13

На рис. 2.13 показано фрагмент диска – кільце радіусу r , товщиною dr . Об'єм цього кільця дорівнює

$$dV = b \cdot 2\pi r dr .$$

Момент інерції обчислимо за формулою (2.41):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \rho r^2 b 2\pi r dr = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{b \pi R^2}_V \cdot \rho \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2 , \end{aligned}$$

де V – об'єм кільця.

Отже, момент інерції однорідного кільця (диска) маси m і радіусу R обчислюють за такою формулою:

$$I = \frac{1}{2} m R^2 . \quad (2.42)$$

2.9.5. Теорема Штейнера: Момент інерції I твердого тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно осі, яка проходить через центр інерції і є паралельною даній, і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями:

$$I = I_0 + ma^2.$$

Таким чином, теорема Штейнера зводить обчислення моменту інерції відносно довільної осі до обчислення моменту інерції відносно осі, яка проходить через центр інерції тіла.

Приклад. Обчислимо момент інерції однорідного диска відносно осі, яка перпендикулярна до площини основи диску і проходить через бічну поверхню, ковзаючи по ній (див. рис. 2.14).

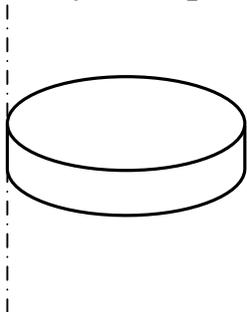


Рис. 2.14

Момент інерції диска відносно осі, яка проходить через центр інерції визначимо за формулою (2.42). Відстань між центром інерції та віссю $a=R$. За теоремою Штейнера потрібний момент інерції дорівнює

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

2.9.6. Кінетичну енергію тіла, що обертається, обчислюють за формулою

$$T = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.43)$$

I – момент інерції тіла, ω – кінетична енергія.

Якщо тіло здійснює плоский рух, то обертальної кінетичної енергії слід додати кінетичну енергію поступального руху:

$$T = \frac{m v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

2.9.7. Робота з обертання твердого тіла dA на кут $d\varphi$ моментом зовнішніх сил \vec{N} :

$$dA = N_z d\varphi,$$

де N_z – сумарний момент зовнішніх сил на вісь z .

2.9.8. Аналогія між динамічними формулами поступального і обертального рухів.

Усі динамічні формули можна занести у таку таблицю:

Таблиця 2.1. Формули Динаміки поступального і обертального рухів

Поступальний рух	Обертальний рух
m – маса	I – момент інерції
$\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс	$M_z = I_z \omega$ – момент імпульсу
\vec{F} – сила	N_z – момент сили
$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$	$\dot{\vec{M}} = \vec{N}$
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\beta_z = N_z$
$T = \frac{m v^2}{2}$	$T = \frac{I\omega^2}{2}$
$dA = \vec{F} \overline{ds}$	$dA = N_z d\varphi$

ТЕМА 3

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

3.1. Загальні положення

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень, що

- 1) будь-яке тіло складається з великої кількості молекул;
- 2) молекули будь-якої речовини знаходяться у стані постійного теплового руху;
- 3) молекули взаємодіють між собою.

Молекулярна фізика розглядає властивості речовини як підсумковий результат дії молекул. При цьому вона користується статистичним методом, цікавлячись лише середніми величинами (середня швидкість молекул, середня енергія і т.п.)

Термодинаміка вивчає властивості тіл і явищ природи не цікавлячись їх мікроскопічною структурою. В основі термодинаміки лежать кілька фундаментальних законів, які виведені шляхом узагальнення великої сукупності експериментальних даних.

Підходячи до зміни стану речовини з різних точок зору (молекулярна фізика з мікроскопічного рівня, термодинаміка – з макроскопічного), вони взаємно доповнюють одна одну.

Система. Системою будемо називати сукупність тіл, що розглядається. Будь-яка система може знаходитися у різних станах. Величини, що характеризують стан системи, називаються параметрами стану. Так, газ має три параметри стану – тиск p , об'єм V , і температуру T .

Рівноважний стан. Якщо всі параметри системи визначені, то такий стан системи називається рівноважним. Будь-який рівноважний стан може бути зображено на координатній площині точкою.

Рівноважний процес – це процес, який складається з неперервної послідовності рівноважних станів. Рівноважним може бути тільки нескінченно повільний процес. Тільки рівноважні процеси на координатній площині можуть бути зображені відповідною кривою.

3.2. Внутрішня енергія системи

Внутрішня енергія тіла – це сума кінетичної енергії руху молекул, потенціальної енергії їх взаємодії і внутрішньомолекулярної енергії:

$$U_{\text{тіла}} = \sum E_k + E_p + E_{\text{вн.мол.}}$$

Внутрішня енергія системи дорівнює сумі внутрішніх енергій всіх тіл системи і потенціальної енергії взаємодії між ними:

$$U_{\text{сист.}} = \sum_{i=1}^N U_i + E_p.$$

Внутрішня енергія системи є функцією стану. Це означає, що будь-який раз, коли система опиняється у даному стані, її внутрішня енергія приймає тільки одне притаманне цьому стану значення.

При переході системи з одного стану в інший зміна внутрішньої енергії дорівнює різниці її значень у цих станах, незалежно від шляху переходу:

$$\Delta U_{12} = U_1 - U_2.$$

Внутрішню енергію системи можна змінити двома процесами і виконанням над системою роботи A' і наданням їй кількості теплоти Q :

$$U_2 - U_1 = Q + A'.$$

Вводячи $A_{12} = -A'_{12}$ – роботу системи над зовнішніми тілами, отримаємо вираз для першого закону термодинаміки.

Перший закон термодинаміки:

$$Q = (U_2 - U_1) + A.$$

Кількість теплоти, що надається системі, йде на приріст її внутрішньої енергії і на виконання роботи системою над зовнішніми тілами.

Для визначення величин A і Q доводиться розбивати весь процес на послідовність елементарних процесів, що відповідають невеликій зміні параметрів системи. Для елементарного процесу 1-й закон термодинаміки має вигляд

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A,$$

де ΔQ – елементарна кількість теплоти; ΔA – елементарна робота; ΔU – приріст внутрішньої енергії.

Робота при зміні об'єму. При ізобарному ($p = \text{const}$) процесі робота зі зміни об'єму газу визначається формулою

$$A_{12}=p (V_1 - V_2), \quad (3.1)$$

де p – тиск газу; V_1 і V_2 – початковий і кінцевий об'єми.

Якщо тиск газу змінюється у процесі виконання роботи, то всю зміну об'єму слід розбити на такі елементарні зміни ΔV_i , для яких тиск p_i можна вважати незмінним. Тоді для елементарних процесів можна скористатися формулою (3.1) і записати повну роботу у вигляді

$$A_{12} \approx \sum_i p_i \Delta V_i.$$

Строгий знак рівності можна поставити тільки під знаком границі при $\Delta V_i \rightarrow 0$. У результаті отримаємо.

$$A_{12} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum p_i \Delta V_i = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Тобто щоб визначити роботу системи при зміні об'єму, потрібно тиск проінтегрувати за об'ємом від початкового V_1 до кінцевого V_2 значень.

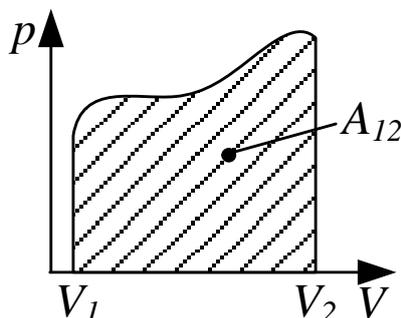


Рис. 3.1

На координатній площині (p, V) робота дорівнює площі криволинійної трапеції, яка зверху обмежена графіком залежності $p = f(V)$, знизу – віссю V , ліворуч і праворуч прямими $V = V_1$ і $V = V_2$ (див. рис. 3.1).

3.3. Елементарна кінетична теорія газів

Ідеальний газ – це сукупність однакових молекул, які хаотично рухаються і не взаємодіють між собою на відстані. Розміри молекул настільки малі, що їх сумарним об'ємом можна знехтувати порівняно з об'ємом посудини.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії для тиску.

Тиск газу на стінки посудини обумовлений співударами молекул зі стінками і передачею їм імпульсу. При цьому виникає тиск газу на стінки, який дорівнює

$$p = n k T,$$

де n – кількість молекул в одиниці об'єму, $k = R / N_0$ – стала Больцмана, $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{К моль})$ – універсальна газова стала, $N_0 = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ число Авогадро (кількість молекул в одному молі речовини).

Ступені вільності. Ступенями вільності механічної системи називаються незалежні змінні, які потрібно задати, щоб визначити положення системи у просторі.

Матеріальна точка має три ступеня вільності – це її координати (x, y, z) . Тверде тіло має шість ступенів вільності: три координати центра інерції тіла (x_c, y_c, z_c) і три кути (θ, φ, ψ) які визначають положення у просторі двох пов'язаних з тілом взаємно перпендикулярних осей, які проходять через центр інерції тіла (див. рис. 3.2, а). Величини (x_c, y_c, z_c) змінюються у процесі поступального руху тіла і називаються поступальними ступенями вільності. Кути (θ, φ, ψ) змінюються у процесі обертального руху тіла і називаються обертальними ступенями вільності.

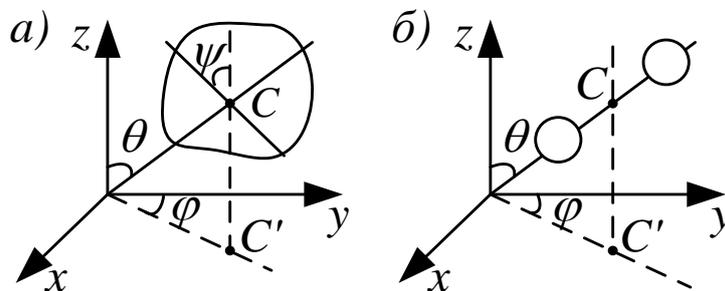


Рис. 3.2

Система двох жорстко зв'язаних між собою матеріальних точок (двохатомна молекула) має п'ять ступенів вільності $(x_c, y_c, z_c, \theta, \varphi)$ (див. рис. 3.2, б). При обертанні навколо власної осі положення молекули не змінюється, тому необхідно задавати тільки два кути.

Принцип рівнорозподілу енергії за ступенями вільності. Ні один з видів руху молекули не має переваги перед іншими, тому на будь-яку ступінь вільності молекули у середньому припадає однакова енергія:

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{ст. вільн.}} = \frac{1}{2} k T.$$

Тоді середня енергія теплового руху молекул:

$$\langle \varepsilon \rangle_{ст. св} = \frac{i}{2} kT,$$

де

$$i = n_{пост} + n_{об} + 2n_{кол}, \quad (3.2)$$

$n_{пост}$ – кількість поступальних ступенів вільності; $n_{об}$ – обертальних, $n_{кол}$ – коливальних (коливальні ступені вільності мають вдвічі більшу енергоємність, ніж поступальні й обертальні, і тому у формулу (3.2) вони входять подвійно). При невисоких температурах коливальні ступені вільності не збуджені і число ступенів вільності дорівнює: $i = 3$ – для одноатомних молекул; $i = 5$ – для двоатомних молекул; $i = 6$ – для трьох (і вище) атомних молекул (тобто як і для твердого тіла).

Внутрішня енергія ідеального газу складається з енергії теплового руху окремих молекул і для довільної маси газу m визначається формулою

$$U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} RT.$$

Теплоємність газів. Для газів розрізняють два типи теплоємностей: при сталому об'ємі – C_V і при сталому тиску – C_p .

Молярні теплоємності, тобто теплоємності одного моля газу, визначаються формулами:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_p = C_V + R.$$

Адіабатний процес – це процес, який протікає без теплообміну газу із зовнішнім середовищем (тобто $dQ=0$). Якщо покласти $dQ=0$ у рівнянні першого закону термодинаміки $dQ = \frac{m}{\mu} \cdot C_V dT + pdV$, то отримаємо рівняння адіабати ідеального газу:

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (3.3)$$

де $\gamma = C_p / C_V = (i+2)/i$, γ – коефіцієнт адіабати, який визначається кількістю ступенів вільності і молекули. Формула (3.3) носить назву рівняння Пуассона.

3.4. Розподіл молекул за швидкостями і потенціальними енергіями

Розподіл молекул за швидкостями. Молекули газу рухаються з різними швидкостями. При цьому величини і напрямки швидкостей кожної молекули безперервно змінюються через зіткнення. Можливі

значення швидкості молекул лежать у межах від 0 до ∞ . Дуже великі і дуже малі порівняно з середніми швидкості мало ймовірні.

Розподіл молекул газу за швидкостями визначається функцією розподілу Максвелла, яка має вигляд:

$$f(v) = A \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2, \quad (3.4)$$

де m – маса молекули, v – її швидкість, A – стала, яка залежить від m та T . Графік цієї функції схематично показано на рис. 3.3. Функція розподілу $f(v)$ визначає густину ймовірності, тобто ймовірність того, що швидкість молекул лежить у заданому одиничному інтервалі швидкостей. Тоді $f(v)\Delta v$ визначає ймовірність того, що швидкість молекул лежить в інтервалі швидкостей від v до $v + \Delta v$ (Δv – інтервал швидкостей). Одночасно $f(v)\Delta v$ визначає відносну кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі швидкості від v до $v + \Delta v$.

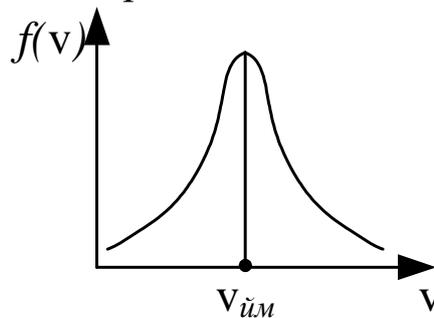


Рис. 3.3

Швидкість, що відповідає максимуму функції розподілу $f(v)$, називається найбільш ймовірною швидкістю

$$v_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

де m – маса молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура. Знаючи розподіл молекул за швидкостями, можна визначити середнє значення швидкості молекул газу:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Функція (3.4) розподілу молекул газу за швидкостями одночасно є і функцією розподілу молекул газу за кінетичними енергіями:

$$f(v) = A' \cdot e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} \varepsilon_k,$$

де ε_k – кінетична енергія молекул, A' – стала, що залежить від m та T .

Розподіл молекул за потенціальними енергіями описується функцією розподілу Больцмана (див. рис. 3.4):

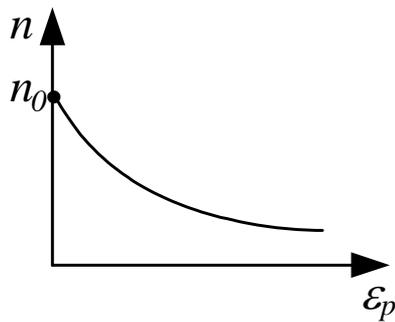


Рис. 3.4

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right),$$

де n – кількість молекул в одиниці об'єму з потенціальною енергією ε_k ; n_0 – кількість молекул в одиниці об'єму з потенціальною енергією $\varepsilon_p=0$. Молекули розподілені з більшою густиною там, де менша їх потенціальна енергія.

Середня довжина вільного пробігу молекул газу. Мінімальна відстань, на яку наближаються при співударі центри двох молекул, називається ефективним діаметром молекули (див. рис. 3.5). Величина $\sigma = \pi d^2$ – ефективний переріз молекули. Ефективний діаметр молекули зменшується із зростанням температури, бо при цьому зростають швидкості теплового руху молекул газу. Середній шлях між двома послідовними співударами

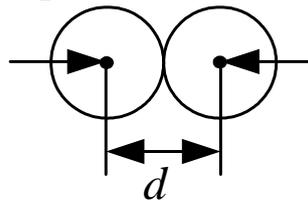


Рис. 3.5

молекули називається середньою довжиною вільного пробігу λ і визначається за формулою

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Оскільки при $T=\text{const}$ кількість молекул в одиниці об'єму $n \sim p$, то $\lambda \sim 1/p$, тобто із зниженням тиску середня довжина вільного пробігу збільшується.

3.5. Явища переносу

Це явища, які виникають при відхиленні газу від стану рівноваги. До них відносяться: внутрішнє тертя, теплопровідність і дифузія.

Внутрішнє тертя. Якщо швидкості впорядкованого руху молекул у потоці газу змінюються від шару до шару (тобто шари рухаються з різними швидкостями), то між шарами газу виникають сили внутрішнього тертя (див. рис. 3.6), які визначаються за формулою

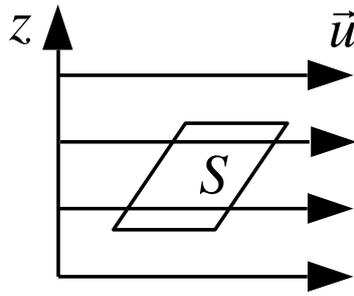


Рис. 3.6

$$F = \eta \frac{du}{dz} S,$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя, $\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості впо-
рядкованого руху молекул, який характеризує зміну швидкості у по-
перечному напрямку z , S – площа шарів. Коефіцієнт внутрішнього те-
ртя чисельно рівний силі, що діє на одиничну площадку при одинич-
ному градієнті швидкості.

Молекули газу переходять внаслідок теплового руху з шару в шар і переносять з собою імпульс. У результаті імпульс більш повільного шару зростає, а більш швидкого зменшується. Перенесення імпульсу з шару в шар і обумовлює виникнення внутрішнього тертя.

У молекулярно-кінетичній теорії є формула для коефіцієнта внутрішнього тертя

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda,$$

де ρ – густина газу; $\langle v \rangle$ – середня швидкість теплового руху молекул; λ – середня довжина вільного пробігу молекул.

Теплопровідність газів. Якщо в газі вздовж деякого напрямку z (див. рис. 3.7) температура не залишається сталою, то вздовж цього напрямку встановлюється потік q тепла в напрямку зменшення температури.

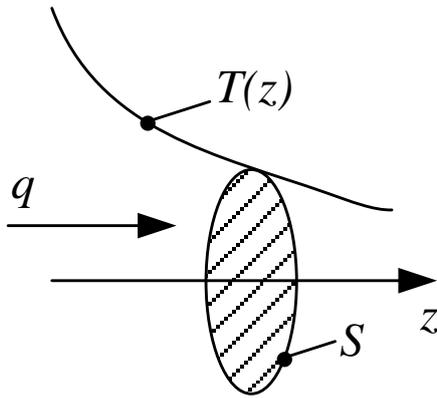


Рис. 3.7

$$q = \chi \frac{dT}{dz} S,$$

де $q = \frac{dQ}{dt}$ – потік теплоти, тобто кількість тепла, яка переноситься через площадку S у одиницю часу, $\frac{dT}{dz}$ – градієнт температури, який характеризує швидкість зміни температури вздовж осі z , S –

площа ділянки S , χ – коефіцієнт теплопровідності, який дорівнює потоку тепла через одиничну площадку при одиничному градієнті температури.

Теплопровідність обумовлена тим, що переміщуючись внаслідок теплового руху, кожна молекула переносить з місця з більшою температурою в місце з меншою температурою енергію $\langle \varepsilon \rangle = ikT/2$. У результаті теплопровідності температура менш нагрітих місць підвищується, а температура більш нагрітих – зменшується. Коли температури вирівнюються, теплопровідність припиняється.

Дифузія у газах. Якщо концентрація C (тобто, маса в одиниці об'єму) газу вздовж деякого напрямку z у просторі (див. рис. 3.8) змінюється, то внаслідок теплового руху молекул буде виникати процес вирівнювання концентрацій, який супроводжується переносом маси. У результаті в напрямку зменшення концентрації виникає потік маси:

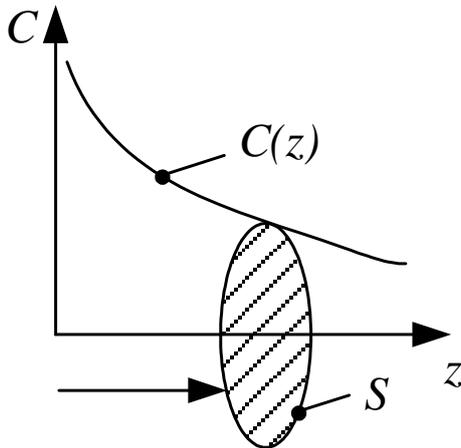


Рис. 3.8

$$\mu = -D \frac{dc}{dz} \cdot S,$$

де μ – потік маси, тобто маса, що переноситься через площадку s в одиницю часу, $\frac{dc}{dz}$ – градієнт концентрації, який характеризує швидкість зміни концентрації вздовж осі z , S – плоска перпендикулярна до осі z площадка; D – коефіцієнт дифузії,

який чисельно рівний потоку маси через одиничну площадку при одиничному градієнті концентрації. Коли концентрація вирівнюється, дифузія припиняється.

3.6. Термодинаміка

Оборотні процеси. Оборотним процесом називається процес, який можна провести у зворотному напрямку таким чином, щоб система пройшла через ті самі стани, що й при прямій ході, але в зворотній послідовності. Оборотні процеси мають таку властивість: якщо при прямій ході система отримувала теплоту dQ і виконувала роботу dA , то при зворотній ході система віддає тепло $dQ' = dQ$ і над нею виконується робота $dA' = dA$.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини. Термодинаміка виникла спочатку як наука про теплові машини. Теплова машина – це пристрій, який перетворює теплову (внутрішню) енергію у механічну роботу. Будь-яка теплова машина являє собою систему, що виконує певний круговий процес (цикл) і складається з робочої речовини, нагрівача і охолоджувача (див. рис. 3.9). У ході циклу робоча речовина спочатку розширюється, а потім знову стискається. Щоб робота за цикл була позитивна, при розширенні робочій речовині надається теплота Q_1 , а при стисканні – відбирається теплота Q_2 . Різниця між теплотою отриманою і відданою робочою речовиною перетворюється у корисну роботу.

Коефіцієнт корисної дії теплової машини

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

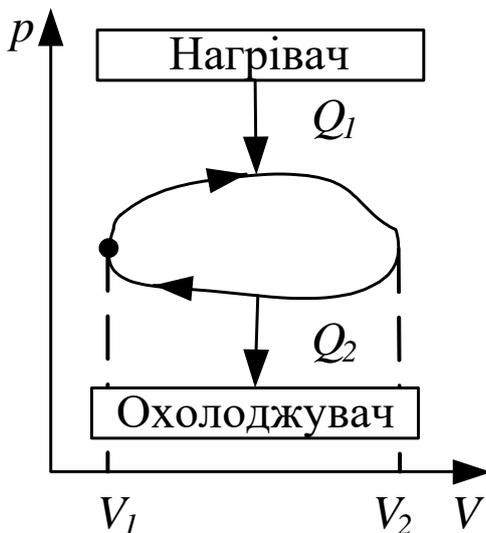


Рис. 3.9

Другий закон термодинаміки.

Якщо перший закон термодинаміки встановлює кількісні співвідношення у теплових процесах, то другий закон вказує на направленість цих процесів.

Не можливі процеси, єдиним і кінцевим результатом яких був би перехід тепла від тіл менш нагрітих до тіл більш нагрітих.

Якщо перехід тепла від менш нагрітих тіл до більш нагрітих не є єдиним кінцевим результатом цього про-

цесу, то такий перехід можливий, наприклад у холодильній камері, де тепло переходить від менш нагрітих тіл до більш нагрітих, але при цьому виконується робота.

Цикл Карно. З другого закону термодинаміки випливає, що єдиним оборотним процесом, який супроводжується теплообміном з тепловим резервуаром з постійною температурою, є ізотермічний процес, що протікає при температурі резервуара.

Отже оборотний цикл, у ході якого система вступає у теплообмін з двома тепловими резервуарами, повинен складатися з двох ізотерм і двох адіабат. Адіабати йдуть крутіше ізотерм і замикають дві ізотерми у цикл. Такий цикл було введено в розгляд Карно і він отримав його ім'я (див. рис. 3.10), а теплова машина, яка працює за циклом Карно, називається ідеальною тепловою машиною.

ККД циклу Карно визначається формулою

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура охолоджувача.

Нерівність Клаузіуса. Перейдемо від теплових машин до загальних термодинамічних співвідношень, першою з яких є нерівність Клаузіуса.

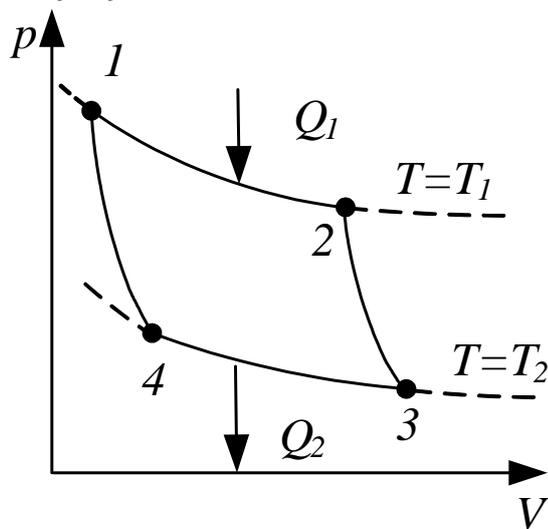


Рис. 3.10

Справедливі два твердження:

1. ККД всіх оборотних теплових машин, що працюють в ідентичних умовах (тобто при однакових температурах нагрівача і охолоджувача), однаковий.

2. ККД теплової машини, яка працює за необоротним циклом, завжди менший, ніж ККД машини, що працює за оборотним циклом, якщо умови роботи двох машин однакові. Це пояснюється тим, що повна робота при необоротному циклі менша, ніж при оборотному.

Звідси випливає нерівність Клаузіуса:

$$\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (3.5)$$

Відношення теплоти ΔQ_i , яку отримує система, до температури T_i , при якій ця теплота доставляється у систему, називається зведеною кількістю теплоти. З нерівності (3.5) випливає, що сума зведених

кількостей теплоти, отриманих системою за цикл, дорівнює нулю, якщо цикл оборотний і менша нуля, якщо цикл необоротний.

Ентропія. Із нерівності Клаузіуса випливає, що сума зведених кількостей теплоти, отриманих системою при оборотному переході з одного стану в інший, не залежить від шляху, за яким виконується перехід, а залежить тільки від початкового і кінцевого станів (рис. 3.11):

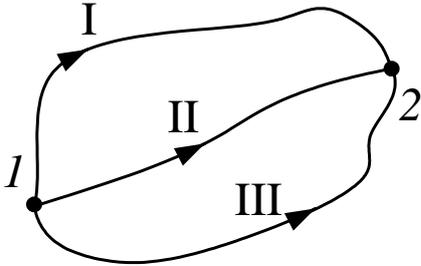


Рис. 3.11

$$\sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (I)}} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (II)}} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (III)}} \frac{\Delta Q}{T}.$$

Звідси випливає, що при оборотному переході величина $\Delta Q/T$ є приростом деякої функції стану. Ця функція позначається S і називається ентропією системи:

$$\left(\frac{\Delta Q}{T} \right)_{\text{обор.}} = \Delta S. \quad (3.6)$$

Таким чином, ентропія – це функція стану системи, приріст якої при оборотному процесі дорівнює зведеній кількості теплоти, отриманої системою.

Фізичний зміст ентропії випливає із статистичного визначення ентропії, яке вивів Больцман:

$$S = k \ln w,$$

де k – стала Больцмана; w – термодинамічна ймовірність системи, що характеризує кількість різних способів, якими може бути реалізований даний стан системи.

Таким чином, ентропія – міра хаосу (непорядкованості) в системі. Чим більша ентропія – тим більший хаос в системі.

Властивості ентропії. З урахуванням необоротних процесів, формула (3.6) переписується у вигляді нерівності

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q}{T},$$

де знак рівності береться для оборотних процесів, а нерівності – для необоротних. Для ізольованої системи $\Delta Q = 0$ і $\Delta S \geq 0$. З цього випливає, що: 1) ентропія ізольованої системи тільки збільшується, якщо процеси в неї необоротні (закон збільшення ентропії); 2) ентропія ізольованої системи залишається сталою, якщо процеси в ній оборотні (закон збереження ентропії).

ТЕМА 4

ЕЛЕКТРОСТАТИКА І ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

4.1. Електричне поле у вакуумі

Електричний заряд. Електричний заряд – це невід’ємна властивість елементарних частинок, як і їх маса. Електричні заряди в природі виникають і зникають тільки по двоє (позитивний і негативний). Звідси випливає закон збереження заряду: сумарний заряд електрично ізольованої системи є величина незмінна.

Закон Кулона. Сила взаємодії між двома точковими зарядами визначається законом Кулона

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$
$$F_{12} = -F_{21},$$

де r – відстань між точковими зарядами, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (Ф/м) – електрична стала, q_1, q_2 – точкові заряди, F_{12} – сила, що діє на перший заряд з боку другого, F_{21} – сила, що діє на другий заряд з боку першого (див. рис. 4.1).

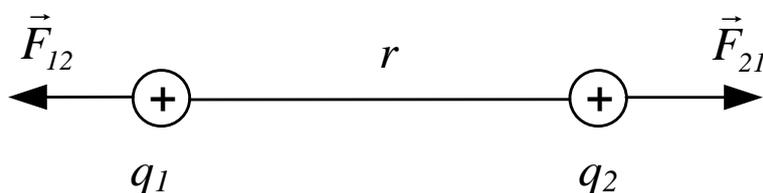


Рис. 4.1

Електричне поле. Взаємодія між зарядами, що знаходяться в стані спокою, здійснюється через електричне поле. Електричне поле – це форма матерії, що породжується зарядженими тілами і здійснює взаємодію між ними.

На рис. 4.1 заряд q_1 утворює електричне поле і через нього діє з силою F_{21} на заряд q_2 , заряд q_2 , в свою чергу, утворює своє електричне поле і через нього діє з силою F_{12} на заряд q_1 .

Напруженість електричного поля. В електричному полі на заряд діє сила. Відношення сили, що діє на заряд, до величини цього заряду є силовою характеристикою електричного поля в цій точці і називається напруженістю.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\vec{q}} \quad \left(1 \frac{H}{кл} = 1 \frac{B}{м} \right).$$

За напрям вектора напруженості \vec{E} приймається напрям сили, що діє позитивний заряд. Напруженість чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд.

Для точкового заряду

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

де r – відстань від заряду до точки спостереження.

Принцип суперпозиції. Для системи зарядів напруженість поля визначається за допомогою принципу суперпозиції

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N.$$

Тобто, напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, що утворюються кожним із зарядів окремо.

Лінії напруженості електричного поля. Електричне поле зображується за допомогою ліній напруженості, які:

1) починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах, або йдуть на нескінченність, чи приходять з нескінченності.

2) у просторі проводяться так, що в кожній точці лінії напруженості вектор напруженості \vec{E} направлений по дотичній до лінії напруженості.

3) густина ліній напруженості пропорційна самій напруженості.

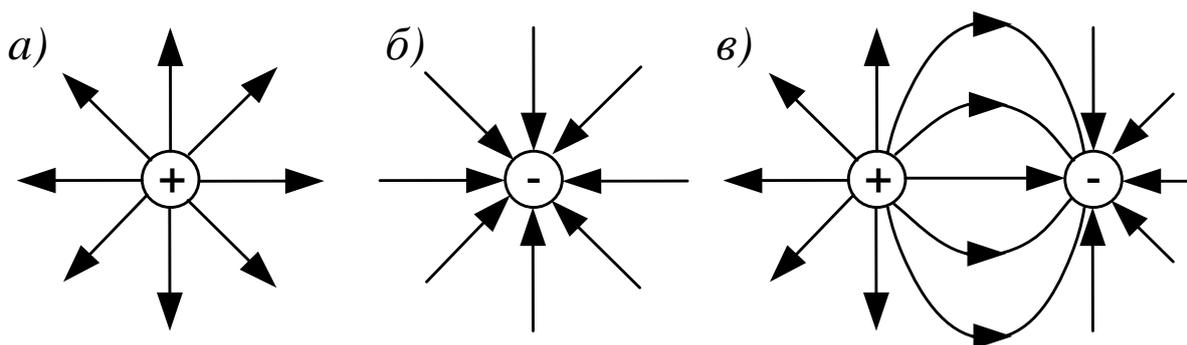


Рис. 4.2

На рис 4.2, а, б зображено електричне поле усамітнених позитивних і негативних зарядів. На рис 4.2, в – поле диполя – системи двох однакових різнойменних зарядів, що розташовані на невеликій відстані один від одного.

Потенціал електричного поля. Відношення роботи по переміщенню пробного позитивного заряду до величини заряду є енергетичною характеристикою поля в даній точці і називається потенціалом:

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q} \quad \left(1B = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right).$$

В електричному полі заряд має потенціальну енергію W_p .

$$W_p = \varphi \cdot q$$

Потенціал чисельно дорівнює потенціальній енергії одиничного позитивного заряду у даній точці поля.

Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r}.$$

Тоді потенціал точкового заряду:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Для системи зарядів потенціал дорівнює:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N,$$

тобто, потенціал електричного поля системи зарядів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, які утворюються кожним зарядом окремо.

Робота сил електричного поля. Робота сил електричного поля з переміщення заряду з точки з потенціалом φ_1 в точку з потенціалом φ_2 визначається формулою:

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

і не залежить від шляху (траєкторії) переміщення заряду з точки 1 у точку 2.

Зв'язок між напруженістю і потенціалом. Між напруженістю і потенціалом електричного поля існує зв'язок, аналогічний зв'язку між силою і потенціальною енергією:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad (4.1)$$

де $\vec{\nabla}$ – оператор градієнта (див. п. 2.6.1).

В проєкціях на координатні осі замість (4.1) записують три рівняння:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Можна розв'язати і обернену задачу – по відомій напруженості \vec{E} визначити різницю потенціалів

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl, \quad (4.2)$$

де E_l – проекція вектора \vec{E} на напрям ділянки інтегрування $d\vec{l}$, тобто на напрям дотичної, в кожній точці контуру інтегрування від точки 1 до точки 2. Інтеграл (4.2) можна брати по будь-якій кривій, що з'єднує точки 1 і 2.

Інтеграл у правій частині (4.2) по замкненому контуру L називається циркуляцією вектора напруженості. З формули (4.2) випливає:

$$\oint_L E_l dl = 0. \quad (4.3)$$

Тобто циркуляція вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю. Формула (4.3) є однією з чотирьох формул, які вичерпно описують всі властивості електромагнітного поля.

Якщо в будь-якій точці поля вектор \vec{E} незмінний за величиною та напрямком (тобто $\vec{E} = \overline{\text{const}}$), то таке поле називається однорідним. Для однорідного електричного поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed,$$

де d – відстань між точками 1 і 2, яку вимірюють вздовж лінії напруженості.

Еквіпотенціальні поверхні. Поверхні, що проведені в електричному полі через точки з однаковим потенціалом, називаються еквіпотенціальними поверхнями. В кожній точці еквіпотенціальної поверхні вектор \vec{E} направлений по нормалі до неї.

Потік вектора напруженості. Величина

$$\Phi = \int_S E_n ds,$$

де E_n проекція вектора \vec{E} на напрям нормалі в кожній точці поверхні інтегрування S , називається потоком вектора напруженості через поверхню S (див. рис 4.3). Фізичний зміст потоку вектора напруженості

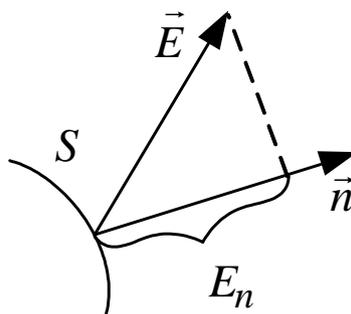


Рис. 4.3

полягає в тому, що він визначає кількість ліній напруженості, що перетинають поверхню інтегрування S . Для замкнених поверхонь інтегрування у якості позитивної нормалі береться зовнішня нормаль.

Теорема Гауса. Потік вектора напруженості через замкнуту поверхню дорівнює сумі зарядів, які знаходяться всередині цієї поверхні, поділеної на електричну сталу ϵ_0

$$\oint_S E_n ds = \frac{\Sigma q_i}{\epsilon_0}.$$

Використовуючи теорему Гауса легко визначити:

1. Поле нескінченної однорідно зарядженої площини (див. рис. 4.4)

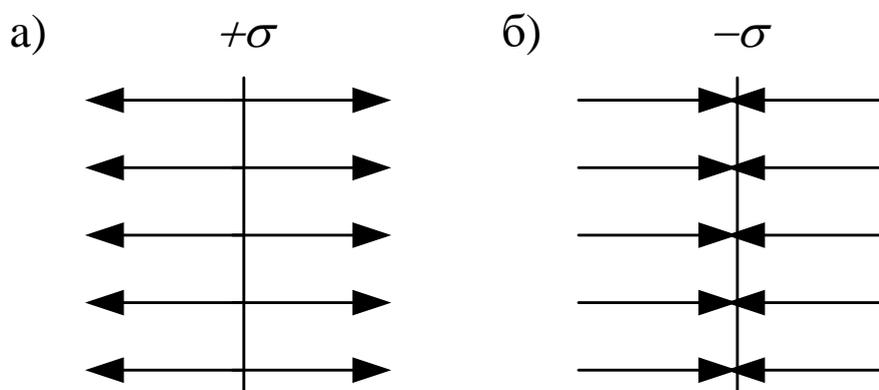


Рис. 4.4

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

де σ – поверхнева густина заряду, тобто заряд, що припадає на одинцю площі поверхні.

2. Поле двох різнойменно заряджених поверхонь (див. рис. 4.5)

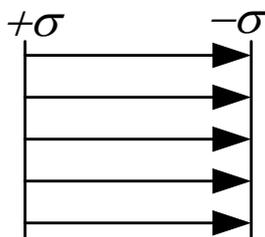


Рис. 4.5

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Електричне поле повністю зосереджене між різнойменно зарядженими поверхнями з однаковими густинами заряду і є однорідним.

3. Поле нескінченної, зарядженої циліндричної поверхні:

$$E(r)=0 \quad (r < R),$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R),$$

де R – радіус циліндра λ – лінійна густина заряду, тобто заряд, який припадає на одиницю довжини, r – відстань від осі до точки спостереження (див. рис. 4.6). Таким чином, заряджена циліндрична поверхня утворює електричне поле тільки зовні циліндра, всередині циліндра електричне поле відсутнє.

4. Поле двох коаксіальних циліндричних різнойменно заряджених поверхонь (рис. 4.7).

$$E(r) = 0 \quad (r < R_1),$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (R_1 \leq r \leq R_2),$$

$$E(r) = 0 \quad (r > R_2),$$

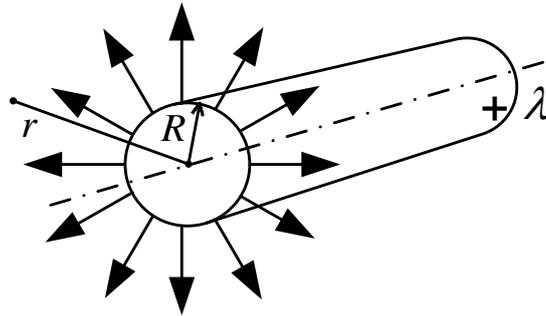


Рис. 4.6

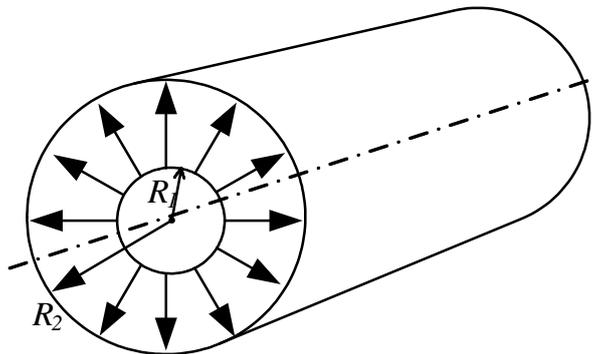


Рис. 4.7

де R_1 – радіус внутрішнього циліндру, R_2 – радіус зовнішнього циліндра. Коаксіальними циліндрами називають циліндри зі спільною віссю. Таким чином електричне поле двох коаксіальних різнойменно за-

ряджених циліндрів з однаковою за модулем лінійною густиною λ заряду повністю сконцентроване між циліндричними поверхнями.

5. Поле зарядженої сферичної поверхні (див. рис. 4.8)

$$E(r) = 0 \quad (r < R),$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r > R),$$

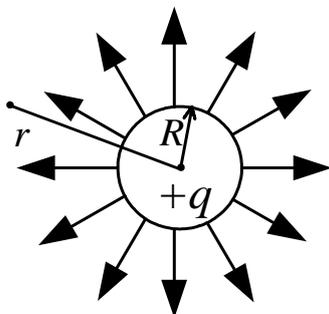


Рис. 4.8

де R – радіус сфери, r – відстань від центра сфери до точки спостереження, q – заряд сфери. Таким чином, електричне поле зарядженої сфери утворюється тільки зовні сфери, у середині зарядженої сфери електричне поле відсутнє.

6. Поле двох концентричних різнойменно заряджених сферичних поверхонь (див. рис. 4.9):

$$E(r) = 0 \quad (r < R_1),$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (R_1 \leq r \leq R_2),$$

$$E(r) = 0 \quad (r > R_2),$$

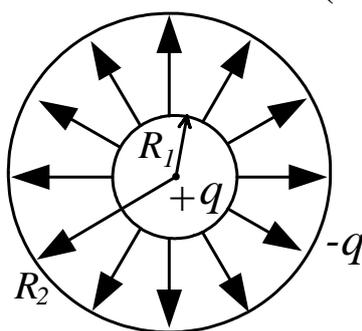


Рис. 4.9

де R_1 і R_2 – радіуси внутрішньої і зовнішньої сфер. Концентричними називаються сфери зі спільним центром.

Таким чином, електричне поле двох різнойменно заряджених концентричних сферичних поверхонь повністю зосереджене між сферами.

4.2. Електричне поле в діелектриках

Діелектриками називаються речовини, не здатні проводити електричний струм через відсутність в них вільних електричних зарядів.

Полярні і неполярні діелектрики. Можна ввести радіус-вектори центрів ваги позитивних і негативних зарядів молекули (див. рис. 4.10).

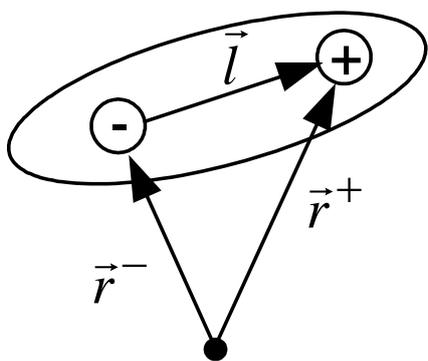


Рис. 4.10

$$\vec{r}^+ = \frac{\sum q_i^+ \vec{r}_i^+}{q}; \quad \vec{r}^- = \frac{\sum q_i^- \vec{r}_i^-}{-q},$$

де \vec{r}_i^+ – радіус-вектори усередненого за часом положення i -го заряду молекули. Тоді можна вважати, що весь позитивний заряд молекули зосереджений у центрі ваги позитивних зарядів, а негативний – у центрі ваги негативних. В результаті отримуємо так звану дипольну модель молекули. Якщо за відсутності зовнішнього електричного поля:

1) $\vec{r}^+ = \vec{r}^-$, тобто центри ваги позитивних і негативних зарядів молекули збігаються, то такі молекули називаються неполярними, а діелектрики, що утворені з цих молекул – неполярними діелектриками.

2) $\vec{r}^+ \neq \vec{r}^-$, тобто центри ваги позитивних і негативних зарядів молекули не збігаються, то такі молекули називаються полярними, а діелектрики, що утворені з цих молекул, – полярними діелектриками.

Для полярних молекул вводиться дипольний електричний момент молекули

$$p_e = |q| \vec{l},$$

де q – заряд молекули, \vec{l} – радіус – вектор, проведений із центра ваги негативних зарядів у центр ваги позитивних зарядів молекули.

Молекула в зовнішньому електричному полі. При переміщенні в зовнішнє електричне поле з напруженістю \vec{E} :

а) неполярна молекула розтягується під дією сил поля і набуває дипольного електричного моменту, який направлений вздовж зовнішнього поля і пропорційний напруженості поля:

$$\vec{p}_e = \beta \epsilon_0 \vec{E},$$

де β – поляризованість молекули;

б) полярні молекули розвертаються і встановлюються своїм дипольним моментом \vec{p}_e за напрямком вектора напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E} .

Поляризація діелектрика. За відсутності зовнішнього електричного поля сумарний дипольний момент діелектрика дорівнює нулю (для неполярного діелектрика дипольні моменти молекул дорівнюють нулю, для полярного – через повний хаос напрямків дипольних електричних моментів молекул).

Під дією зовнішнього електричного поля діелектрик поляризується – результуючий дипольний момент діелектрика становиться відмінним від нуля (неполярні молекули розтягуються і орієнтуються дипольними моментами вздовж зовнішнього електричного поля з напруженістю \vec{E}_0 , див. рис. 4.11). Ступінь поляризації діелектрика характеризується поляризованістю \vec{P} – дипольним електричним моментом у одиничному об'ємі діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{ei}}{V};$$

де $\sum \vec{p}_{ei}$ – сума дипольних електричних моментів у об'ємі V .

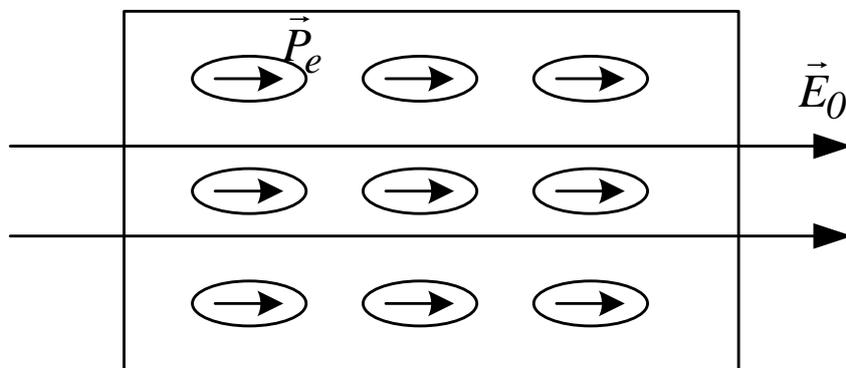


Рис. 4.11

Для ізотропних діелектриків:

$$\vec{P} = \delta \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (4.4)$$

де δ – діелектрична сприйнятливість, \vec{E} – напруженість поля в діелектрику.

Зв'язані заряди. На поверхню діелектрика в наслідок поляризації виступають зв'язані заряди (див. рис. 4.12). Там, де лінії напруженості виходять з діелектрика виступають позитивні заряди, а там, де

входять, – негативні. Поверхнева густина зв'язаних зарядів визначається за формулою:

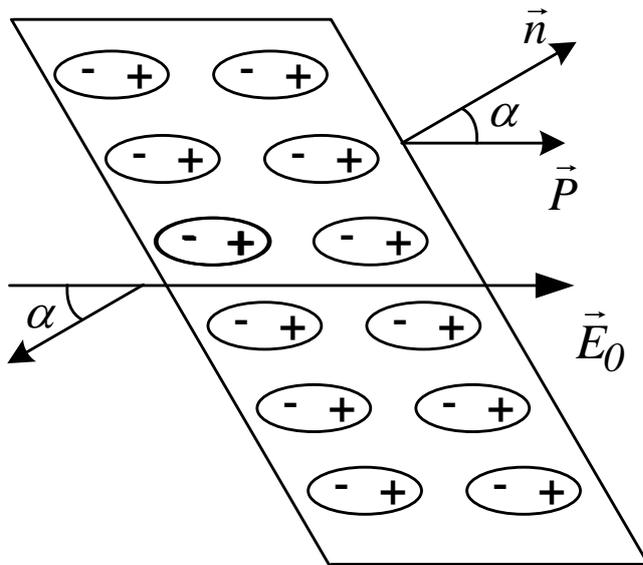


Рис. 4.12

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (4.5)$$

де P_n – проекція вектора поляризованості на зовнішню нормаль до поверхні діелектрика. З урахуванням (4.4) формула (4.5) набуває вигляду:

$$\sigma' = \delta \varepsilon_0 E_n, \quad (4.6)$$

де E_n – проекція напруженості поля всередині діелектрика у безпосередній близькості до поверхні на зовнішню нормаль до поверхні. Формула (4.6) визначає не тільки величину σ , а також її знак.

Опис поля у діелектрику. Через принцип суперпозиції напруженість електричного поля всередині діелектрика складається з двох компонентів:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (4.7)$$

де \vec{E}_0 – напруженість зовнішнього поля, \vec{E}' – напруженість поля, утвореного зв'язаними зарядами, що виступили на поверхню діелектрика при його поляризації. Вектор \vec{E}' завжди направлений протилежно вектору \vec{E}_0 , тому в скалярному вигляді:

$$E = E_0 - E' < E_0,$$

тобто діелектрики завжди послаблюють електричне поле. Поляризація діелектрика обумовлена дією сумарного поля (4.7).

Для опису електричного поля у діелектрику крім вектора напруженості \vec{E} вводиться ще вектор електричного зміщення

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Зв'язок між векторами \vec{D} і \vec{E} такий:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

де $\varepsilon = 1 + \delta$ – відносна діелектрична проникність. Відносна діелектрична проникність ε показує, у скільки разів напруженість електричного поля в середині діелектрика відрізняється від напруженості зовнішнього поля.

4.3. Провідники у зовнішньому електричному полі

Умови рівноваги зарядів на провіднику. Рівновага зарядів на провіднику спостерігається при виконанні двох умов:

$E=0$ – в середині провідника.

$E = E_n$ – на поверхні провідника.

Тобто, в середині провідника поле повинно бути відсутнє, а на поверхні направлено по нормалі до поверхні.

Розподіл зарядів по провіднику. Якщо провіднику надати заряд, то він розподілиться на ньому так, щоб виконувалися дві вище надані умови рівноваги заряду на провіднику.

При рівновазі зарядів ні в якому місці у середині провідника не може бути надлишкових зарядів. Всі вони розташуються по зовнішній поверхні провідника (рис. 4.13).

Густина заряду на поверхні провідника визначається кривиною поверхні $\rho=1/R$, де R – радіус кривини. Густина заряду зростає зі збільшенням позитивної кривини поверхні (опуклості) і зменшується при збільшенні негативної кривини (вгнутості).

Провідник у зовнішньому електричному полі. При внесенні незарядженого провідника у електричне поле, носії заряду у провіднику приходять в рух. На поверхні провідника накопичуються заряди протилежних знаків, які називаються індукційними зарядами (див. рис. 4.14). Перерозподіл зарядів закінчується тоді, коли будуть виконані обидві умови рівноваги заряду на провіднику.

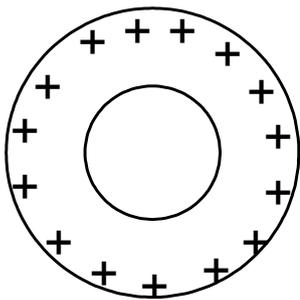


Рис. 4.13

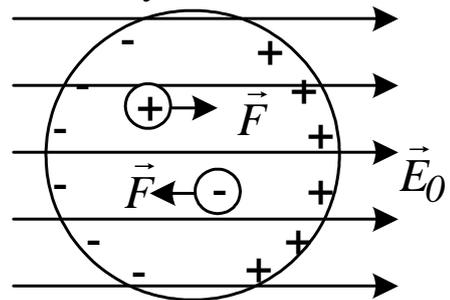


Рис. 4.14

Індукційні заряди розподіляються по зовнішній поверхні провідника, а поле всередині провідника дорівнює нулю, тому що поле індукційних зарядів компенсує всередині провідника зовнішнє поле. На цьому базується електростатичний захист, тобто захист певних місць простору від електричних полів.

Електроємність провідника. Величина, що характеризується здатністю провідника накопичувати електричні заряди, називається електроємністю

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де q – заряд на провіднику, φ – потенціал провідника, тобто потенціал електричного поля в точці на поверхні провідника. З умови рівноваги зарядів на провіднику випливає, що потенціали всіх точок на поверхні провідника однакові, тому говорять про потенціалі всього провідника.

При одному й тому ж потенціалі провідника чим більше його електроємність, тим більший заряд накопичений на провіднику. Електроємність провідника залежить від форми, розмірів провідника і електричних властивостей середовища, що оточує провідник (відносної діелектричної проникності). Для сферичного провідника:

$$C = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R,$$

де R – радіус сфери, ε – відносна діелектрична проникність оточуючого середовища.

Конденсатори. Усамітнені провідники мають малу електроємність. Навіть куля розмірів землі має електроємність близько 700 мкФ . Для накопичення зарядів служать конденсатори – пристрої, які при невеликому потенціалі накопичують помітні за величиною заряди. Будова конденсатора базується на тому, що електроємність провідника зростає при наближенні до нього інших тіл. Провідники, що утворюють конденсатор (обкладинки), повинні мати таку форму, щоб електричне поле було зосереджене між ними. Тоді наближення зовнішніх тіл не впливає на електроємність конденсатора. Можливі тільки три таких форми обкладинок і три типи конденсаторів: плоско паралельні, циліндричні і сферичні.

Електроємність конденсатора визначається за формулою:

$$C = \frac{|q|}{U},$$

де q – заряд однієї з обкладинок, U – різниця потенціалів між обкладинками. Для плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

де S – площа обкладинки, d – відстань між обкладинками, ε – відносна діелектрична проникність середовища між обкладинками.

Електроємність батареї конденсаторів.

а) При паралельному з'єднанні конденсаторів (див. рис. 4.15)

$$C = \sum_{i=1}^N C_i.$$

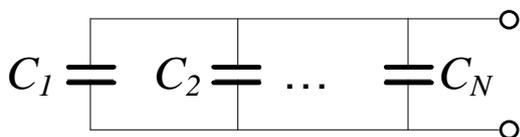


Рис. 4.15

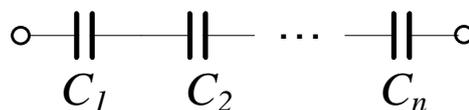


Рис. 4.16

б) При послідовному з'єднанні конденсаторів (див. рис. 4.16)

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

Енергія зарядженого провідника:

$$W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2},$$

де q – заряд провідника, φ – потенціал провідника, C – електроємність провідника. Енергія зарядженого провідника накопичується у електричному полі навколо провідника.

Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2},$$

де q – заряд на одній з обкладинок, U – різниця потенціалів між обкладинками, C – електроємність конденсатора. Носієм енергії зарядженого конденсатора є електричне поле, утворене між обкладинками конденсатора.

Енергія електричного поля. Густина енергії електричного поля, тобто енергія в одиниці об'єму електричного поля визначається за формулою:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{d} \quad (\text{Дж/м}^3),$$

де ε – відносна діелектрична проникність середовища в якому утворене електричне поле, E – напруженість електричного поля. Густина енергії електричного поля пропорційна квадрату напруженості електричного поля.

4.4. Постійний електричний струм

Впорядкований рух електричних зарядів називається електричним струмом.

Сила струму. Середня сила струму за час Δt

$$I_{\text{сер}} = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

де Δq – заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за час Δt .

Миттєве значення сили струму:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

тобто миттєва сила струму дорівнює першій похідній від заряду за часом. За напрямком струму приймається напрямок переміщення позитивних зарядів.

Якщо у провіднику рухаються заряди обох знаків то сила струму:

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \left| \frac{dq^-}{dt} \right|.$$

Густина струму. При нерівномірному розподілу по поперечному перерізу провідника зарядів, що проходять по ньому, струм характеризується густиною струму:

$$j = \frac{dI}{dS},$$

де dS – елементарна площинка, що перпендикулярна напрямку протікання струму. Знаючи густина струму j можна визначити силу струму

$$I = \int_S j_n dS$$

де $j_n = j \cos \alpha$ – проекція вектора густини струму на нормаль до поверхні S у кожній точці поверхні.

Електрорушійна сила джерела (ЕРС) струму. Сили електричного поля переміщують позитивні заряди від точок з більшим потенціалом до точок з меншим потенціалом.

У замкненому колі поряд з ділянками зі зменшенням потенціалу мають бути ділянки із зростанням потенціалу. На ділянках з зростанням потенціалу переміщення позитивних зарядів можна за допомогою тільки неелектричних (сторонніх) сил.

Сила будь-якої природи, яка може переміщувати позитивний заряд у напрямку зростання потенціалу, відноситься до класу сторонніх сил. Сторонні сили можна характеризувати роботою по переміщенню одиничного позитивного заряду. Ця величина називається електро-рушійною силою і дорівнює

$$E = A^{cm} / q \quad (1 \text{ Дж/кл} = 1 \text{ В})$$

Сторонні сили діють у джерелах струму і переміщують позитивні заряди від меншого потенціалу (від мінуса) до більшого (до плюсу). Саме джерело струму витрачає енергію по переміщенню зарядів по замкнутому колу, тому що робота електричних сил, які переміщують заряд поза джерелом, по замкненому колу дорівнює нулю.

Напруга. Розглянемо ділянку кола, яке має джерело струму. (рис. 4.17).

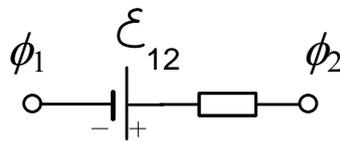


Рис. 4.17

Повна робота A_{12} по переміщенню заряду q по ділянці кола складається з роботи сторонніх сил у джерелі струму і роботи електричних сил поза джерелом струму

$$A_{12} = A_{12}^{el} + A_{12}^{cm} \quad (4.8)$$

Поділимо формулу (4.8) на заряд q що переміщується по ділянці, і введемо такі величини:

$U_{12} = A_{12} / q$ – напруга на ділянці кола,

$\phi_1 - \phi_2 = A_{12}^{el} / q$ – різниця потенціалів на ділянці кола,

$E_{12} = A_{12}^{cm} / q$ – ЕРС ділянки кола.

В результаті формулу (4.8) можна переписати у вигляді

$$U_{12} = (\phi_1 - \phi_2) + E_{12}.$$

Таким чином, напруга на ділянці кола дорівнює алгебраїчній сумі різниці потенціалів і ЕРС. Якщо напрямок дії джерела струму (від мінуса до плюсу) збігається з напрямком струму, то $E_{12} > 0$, а якщо не збігається, то $E_{12} < 0$.

Закон Ома для ділянки кола. Сила струму на ділянці кола прямо пропорційна напрузі і обернено пропорційна електричному опору ділянки і кола

$$I = \frac{U}{R}.$$

Для циліндричних провідників електричний опір визначається формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір провідника, l – довжина, S – площа поперечного перерізу провідника.

Закон Ома можна записати у диференціальній формі:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (4.9)$$

де \vec{j} – вектор густини струму, \vec{E} – напруженість електричного поля в провіднику, $\sigma = 1/\rho$ – електропровідність провідника, ρ – питомий опір. Закон Ома у вигляді (4.9) дозволяє диференційно підійти до різних ділянок поперечного перерізу провідника, і відповісти на питання, як змінюється густина струму по поперечному перерізу провідника. З формули (4.9) випливає, що розподіл густини струму співпадає з розподілом напруженості електричного поля на поперечному перерізу провідника.

Опір металевих провідників: Для більшості металів питомий опір залежить від температури за формулою:

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad (4.10)$$

де ρ_0 – питомий опір при $t = 0^\circ\text{C}$, α – температурний коефіцієнт опору, $T = t^\circ\text{C} + 273 \text{ K}$ – абсолютна температура.

Формула (4.10) добре описує температурну залежність електричного опору крім області біля абсолютного нуля (див. рис. 4.18).

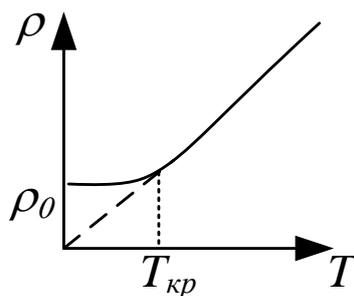


Рис. 4.18

При $T = 0$ спостерігається залишковий опір $\rho_{зал}$, який залежить від чистоти матеріалу і наявності механічних напружень. У деяких матеріалів та сплавів при $T < T_{кр}$ (тобто при температурі нижче критичної) спостерігається падіння електричного опору до нуля.

Це явище називається надпровідністю. Надпровідником є ртуть, олово, свинець алюміній та інші.

Температура, при якій провідник переходить у стан надпровідності називається критичною і є дуже малою (кілька Кельвінів).

Закон Джоуля. При протіканні струму по провіднику останній нагрівається, тобто виділяється теплота. Ця теплота називається джоулевою теплотою так як визначається за законом Джоуля. Для постійного струму закон Джоуля

$$Q = I^2 R t,$$

де I – сила постійного струму, R – опір провідника, t – час протікання струму.

Для змінного струму весь час протікання струму потрібно розбити на елементарні проміжки часу Δt_k , настільки малі, що струм I_k на кожному проміжку часу, можна вважати незмінною величиною і тоді

$$Q \approx \sum_{(i)} I_k^2 R_k \Delta t_k, \quad (4.11)$$

Формула (4.11) тим точніша, чим менші проміжки часу Δt_k . Строгий знак рівності можна підставити тільки під знаком границі

$$Q = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_i I_k^2 R_k \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt, \quad (4.12)$$

Тобто, щоб визначити кількість теплоти, що виділяється при протіканні змінного струму, потрібно вираз $I^2 R$ проінтегрувати за часом від моменту t_1 до t_2 . На координатній площині ($I^2 R, t$) кількість виділеного тепла дорівнює площі криволінійної трапеції, яка зверху обмежена графіком залежності $I^2 R = f(t)$. (див. рис. 4.19). Формула (4.12) – це закон Джоуля у звичайній формі.

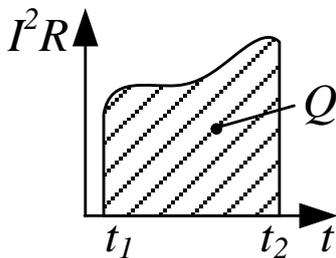


Рис. 4.19

Вона визначає тепло, що виділилося у всьому провіднику. Можна перейти до диференційної форми закону Джоуля, яка характеризує виділення теплоти у різних місцях провідника

$$w = \sigma E^2, \quad (4.13)$$

де $w = dQ/dVdt$ – питома потужність струму, тобто кількість теплоти, що виділиться у одиниці об'єму у одиницю часу. З формули (4.13) випливає, що питома потужність пропорційна квадрату напруженості

електричного поля E . Знаючи питому потужність електричного струму, виділене у провіднику тепло визначається за формулою

$$Q = \iiint \omega dV dt,$$

де інтегрування ведеться по всьому об'єму провідника.

Правила Кірхгофа. Розгалуженні електричні кола легко розрахувати за допомогою двох правил Кірхгофа.

Перше правило. Алгебраїчна сума струмів, що збігаються у вузлі, дорівнює нулю

$$\sum I_k = 0,$$

Вузол – це точка розгалуженого електричного кола, де збігається більш двох провідників. Струми, що входять у вузол беруться з одним знаком, а що виходять – з протилежним.

Друге правило. При обході по замкнутому контуру, що виділений у розгалуженому електричному колі, алгебраїчна сума добутків струмів на опір (тобто напруг на резисторах) дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС у цьому контурі

$$\sum I_k R_k = \sum E_k,$$

Порядок розрахунку розгалуженого контуру.

1. У кожній нерозгалуженій ділянці (гілці кола), довільно задаємо напрямки струмів і нумеруємо їх. Кількість невідомих струмів дорівнює кількості гілок.

2. Складаємо $N-1$ рівнянь за першим правилом Кірхгофа, де N – кількість вузлів розгалуженого електричного кола. Струми, що входять у вузол беруть з одним знаком, що виходять – з протилежним.

3. В розгалуженому колі виділяємо замкнуті контури і довільно задаємо напрямки їх обході (за годинниковою стрілкою, або проти).

4. Складаємо рівняння за другим правилом Кірхгофа. Якщо обраний напрямок обходу контуру збігається з напрямком протікання струму, то $I_k R_k > 0$. Якщо при обході контуру переходимо в джерелі струму з мінуса на плюс – то $E_k > 0$.

5. Загальне кількість рівнянь повинно дорівнювати кількості невідомих струмів.

ТЕМА 5

МАГНІТНІ ЯВИЩА

5.1. Магнітне поле у вакуумі

Електричні струми взаємодіють між собою. Взаємодія струмів здійснюється через магнітне поле.

Магнітне поле – це форма матерії, що породжується рухомими зарядами і діє на рухомі заряди.

Магнітна індукція. Для дослідження магнітних полів використовується контур зі струмом малих розмірів (пробний контур). Його орієнтація у просторі визначається позитивною одиничною нормаллю \vec{n} , пов'язаною з напрямком струму у контурі правилом правого гвинта (правилом свердлика) (див. рис. 5.1).

Контур зі струмом характеризується магнітним моментом p_m , який визначається за формулою

$$p_m = I S \vec{n},$$

де I – сила струму у контурі, S – площа контуру, \vec{n} – одинична позитивна нормаль.

При приміщенні контуру зі струмом у магнітне поле на нього діє обертальний момент \vec{M} , під дією якого контур розвертається і займає рівноважне положення (див. рис. 5.1). Відношення максимального обертального моменту сил, який діє на контур зі струмом, до магнітного моменту контуру, є силовою характеристикою магнітного поля у тому місці, де знаходиться пробний контур, і називається магнітною індукцією

$$\vec{B} = \frac{M_{\max}}{p_m} \vec{n}_{\text{рівнов.}}$$

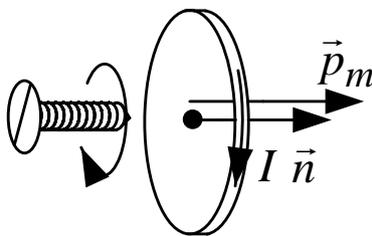


Рис. 5.1

Напрямок вектора \vec{B} визначається рівноважним положенням позитивної нормалі до контуру. Одиниця вимірювання магнітної індукції в системі СІ 1 Тесла (Тл).

Потік вектора магнітної індукції вводиться аналогічно потоку вектора електричного поля

$$\Phi = \int_S B_n ds,$$

де B_n – проекція вектора магнітної індукції \vec{B} на нормаль в кожній точці поверхні інтегрування S . Одиниця вимірювання магнітного потоку в системі СІ – 1 Вебер ($Вб$) = $1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$.

Для однорідного магнітного поля (вектор \vec{B} у всіх точках поля однаковий по величині та напрямку) потік вектора \vec{B} через плоску поверхню визначається формулою

$$\Phi = B S \cos \alpha = B_n S,$$

де α – кут між напрямком вектора магнітної індукції \vec{B} і нормаллю до площини, S – площа плоскої поверхні.

Потік Φ вектора магнітної індукції \vec{B} визначає кількість ліній магнітної індукції, що перетинають поверхню S .

Лінії магнітної індукції. Магнітні поля зображуються за допомогою ліній магнітної індукції. Потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню S дорівнює нулю

$$\Phi = \oint_S B_n ds = 0.$$

Звідси випливає, що лінії магнітної індукції замкнені криві. У просторі вони проводяться так, що в кожній точці вектор \vec{B} направлено по дотичній до лінії магнітної індукції, а густина ліній дорівнює самій індукції (див. рис. 5.2).

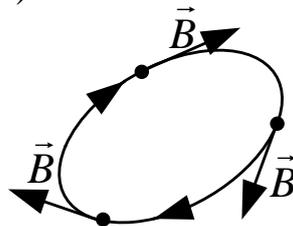


Рис.5.2

Для магнітного поля, як і для електричного, виконується принципі суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_N,$$

тобто індукція системи струмів дорівнює векторній сумі індукцій магнітних полів, утворених кожним із струмів окремо.

Закон Біо-Савара-Лапласа. Він визначає магнітну індукцію елемента струму $d\vec{l}$, тобто малої ділянки провідника зі струмом довжини dl , напрямком якої співпадає з напрямком струму. Індукція елемента струму визначається за формулою

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (5.1)$$

де \vec{r} – радіус – вектор, який проведено з елемента струму $d\vec{l}$ у точку спостереження, хрестик у дужках означає векторний добуток, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала (див. рис. 5.3).

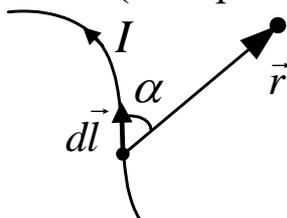


Рис. 5.3

В скалярній формі формула (5.1) записується у вигляді

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2},$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} .

Поле прямого струму. Розбиваючи провідник на елементи струму та використовуючи закон Біо-Савара-Лапласа і принцип суперпозиції, можна визначити магнітну індукцію будь-якого провідника зі струмом. Для прямого нескінченно довгого провідника зі струмом в результаті отримаємо формулу для індукції

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (5.2)$$

де r – відстань від струму до точки спостереження. Лінії магнітної індукції прямого провідника зі струмом являють собою концентричні кола (див. рис. 5.4).

Для обмеженого по довжині прямолінійного провідника зі струмом індукція визначається формулою

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \quad (5.3)$$

де α_1 і α_2 – кути, які утворюють радіус – вектори, \vec{r}_1 і \vec{r}_2 , що проведенні із точок спостереження у кінці провідників (див. рис. 5.5).

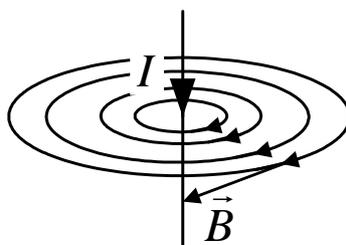


Рис. 5.4

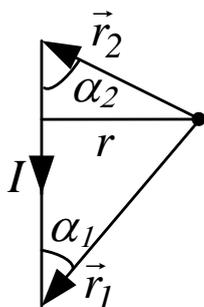


Рис. 5.5

При $\alpha_1 \rightarrow 0$ і $\alpha_2 \rightarrow 0$ (тобто при переході до необмеженого провідника) формула (5.3) переходить у формулу (5.2), для нескінченно довгого провідника.

Циркуляція вектора магнітної індукції – це інтеграл по замкнутому контуру L :

$$\oint_L B_l dl,$$

де B_l – проекція вектора \vec{B} на елементарну ділянку інтегрування $d\vec{l}$, тобто на напрямок дотичної в кожній точці контуру, називається циркуляцією вектора \vec{B} (див. рис. 5.6).

Якщо контур інтегрування L охоплює кілька струмів (див. рис. 5.7), то циркуляція вектора магнітної індукції \vec{B} дорівнює добутку магнітної сталої μ_0 на суму струмів, що охоплюються контуром інтегрування

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k, \quad (5.4)$$

Позитивними у формулі (5.4) вважаються ті струми, напрямок яких пов'язаний з напрямком інтегрування правилом правого гвинта (правило свердлика). Формула (5.4) носить назву закону повного струму.

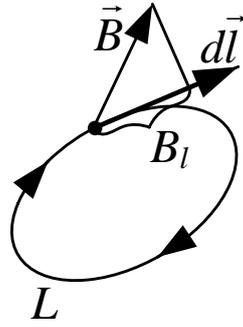


Рис.5.6

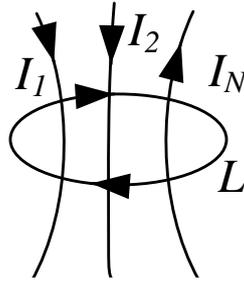


Рис. 5.7

Поле соленоїда. Використовуючи формулу (5.4) для циркуляції вектора магнітної індукції \vec{B} , легко отримати формулу для індукції магнітного поля нескінченно довгого соленоїда.

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 n I && \text{(всередині соленоїда),} \\ B &= 0 && \text{(зовні соленоїда),} \end{aligned} \quad (5.5)$$

де n – кількість витків, що припадають на одиницю довжини соленоїда. Таким чином, магнітне поле нескінченно довгого соленоїда однорідне і повністю зосереджене всередині соленоїда. (див. рис. 5.8).

Для обмеженого соленоїда лінії індукції магнітного поля замикаються через вільний простір (див. рис. 5.9). Всередині достатньо довгого соленоїда (довжина якого на багато більша його діаметра) магнітне поле практично однорідне і добре описується формулою (5.5). Однорідність поля порушується тільки поблизу кінців соленоїда.

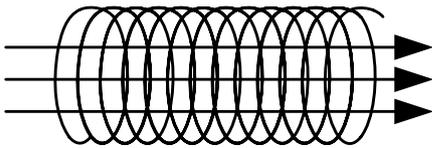


Рис. 5.8

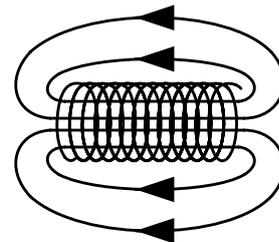


Рис. 5.9

5.2. Взаємодія струмів і частинок з магнітним полем

Сила Ампера – це сила, що діє на елемент струму $d\vec{l}$ у магнітному полі, називається силою Ампера і визначається формулою

$$d\vec{F}_A = I(d\vec{l} \times \vec{B}), \quad (5.6)$$

або в скалярному вигляді

$$dF_A = I B dl \sin \alpha,$$

де α – кути між векторами \vec{B} і $d\vec{l}$ (див. рис. 5.10).

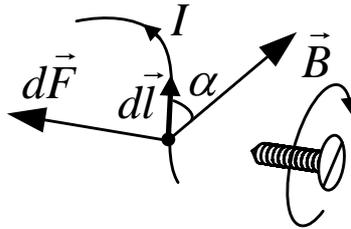


Рис. 5.10

Розбиваючи провідник на елементи струму і визначаючи за формулою (5.6) силу, що діє на кожний елемент струму, можна визначити розподіл сил вздовж провідника, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі. **Сила Лоренца** діє на рухоми заряджену частинку у магнітному полі. Вона визначається формулою

$$F_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B},$$

або в скалярному вигляді

$$F_L = q v B \sin \alpha,$$

де α – кут між векторами \vec{B} і \vec{v} (див. рис. 5.11).

Так як $\vec{F}_L \perp \vec{B}$, то сила Лоренца роботи не виконує і чисельного значення швидкості змінити не може. Вона змінює тільки напрямок вектора швидкості.

Контур зі струмом у магнітному полі. Якщо примістити у магнітне поле контур зі струмом, то збоку поля на контур діє обертальний момент

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B},$$

або у скалярному вигляді

$$M = p_m B \sin \alpha$$

де \vec{p}_m – вектор магнітного моменту контуру зі струмом, \vec{B} – вектор магнітної індукції, α – кут між векторами \vec{B} і \vec{p}_m (див. рис. 5.11 і 5.12).

Під дією обертального моменту \vec{M} контур обертається і встановлюється своїм магнітним моментом \vec{p}_m вздовж вектора магнітної індукції.

Робота при переміщенні струму у магнітному полі. При переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі сила Ампера, що діє на провідник зі струмом, виконує роботу.

$$A = I\Phi,$$

де I – сила струму у провіднику, Φ – магнітний потік, який перетинає провідник при своєму русі.

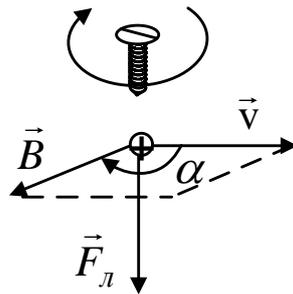


Рис. 5.11

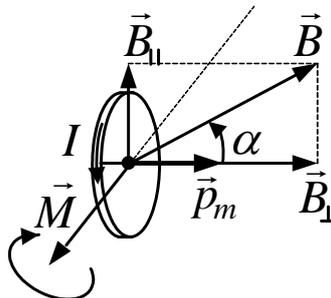


Рис. 5.12

Для прямолінійного провідника, що рухається перпендикулярно, лініям індукції однорідного магнітного поля,

$$\Phi = BlS,$$

де l – активна частина провідника (тобто та, що знаходиться у магнітному полі), S – пройдений шлях.

При переміщенні контуру зі струмом у магнітному полі виконується робота

$$A = I\Delta\Phi,$$

де $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – зміна магнітного потоку через контур, Φ_1 – початковий потік, Φ_2 – кінцевий потік.

5.3. Магнітне поле у речовині

Намагнічування речовини. Будь-яка речовина є магнетиком, тобто здатна під дією магнітного поля набувати магнітний момент (намагнічуватись). Намагнічена речовина утворює власне магнітне поле з індукцією \vec{B}' , яка накладається на утворене струмами зовнішнє магнітне поле з індукцією \vec{B}_0 . В результаті індукція магнітного поля у речовині

$$\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}_0.$$

Намагнічування магнетика характеризується намагніченістю \vec{J} – магнітним моментом одиниці об'єму

$$J = \frac{\sum \vec{p}_{m_i}}{\Delta V},$$

де \vec{p}_{m_i} – магнітні моменти окремих молекул, що знаходяться у об'ємі ΔV .

Гіпотеза Ампера. Для пояснення намагнічування тіл Ампер припустив, що в молекулах циркулюють молекулярні струми з магнітним моментом \vec{p}_{m_i} , в силу хаотичної орієнтації магнітних моментів окремих молекул, магнітний момент тіла у відсутності зовнішнього магнітного поля дорівнює нулю (див. рис.5.13, а).

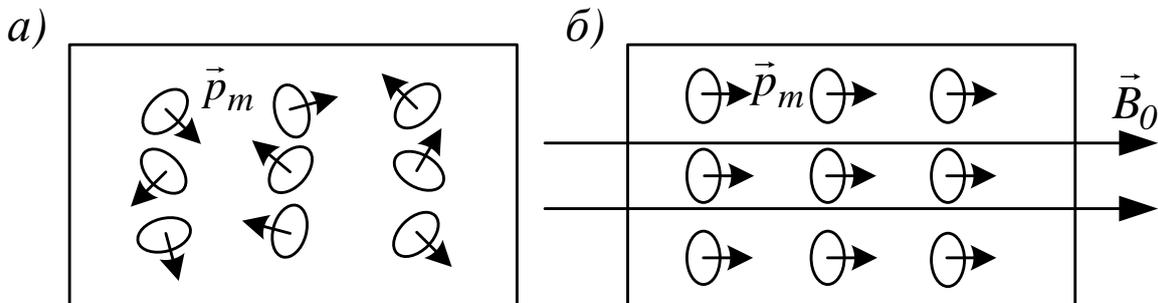


Рис. 5.13

Під впливом зовнішнього магнітного поля з індукцією \vec{B}_0 магнітні моменти молекул набувають впорядковану орієнтацію, вздовж зовнішнього магнітного поля, (див. рис. 5.13, б).

Речовина стає намагніченою, тобто її підсумковий магнітний момент молекул стає відмінним від нуля. Магнітні поля молекулярних струмів намагніченої речовини утворюють власне магнітне поле з індукцією \vec{B}' .

Опис поля у магнетиках. Циркуляція вектора \vec{B} у речовині записується у вигляді

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 (\sum J)_L + \mu_0 (\sum J_m)_L, \quad (5.7)$$

де $(\sum J)_L$ – сума відомих макроскопічних струмів у провідниках, що охоплюються контуром інтегрування L і утворюють зовнішнє магнітне поле з індукцією \vec{B}_0 ; $(\sum J_m)_L$ – сума невідомих мікроскопічних струмів молекул, що охоплюються контуром інтегрування L і утворюють магнітне поле намагніченої речовини \vec{B}' .

У формулі (5.7), щоб визначити індукцію \vec{B} магнітного поля у речовині, потрібно знати молекулярні струми $\sum J_m$, а щоб визначити молекулярні струми, в свою чергу, потрібно знати індукцію \vec{B}_0 поля у речовині. Виникає замкнене коло. Це свідчить про те, що тільки однієї індукції \vec{B} , для опису полів у речовині, недостатньо. Потрібно ввести ще одну величину, яка пов'язана з індукцією \vec{B} , але визначається тільки через відомі макроскопічні струми. Такою величиною є вектор напруженості магнітного поля \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J},$$

для якого циркуляція дорівнює

$$\oint_L H_e dl = \sum J V, \quad (5.8)$$

тобто визначається тільки відомими макроскопічними струмами $\sum J$ у провідниках.

У вакуумі намагніченість $\vec{J} = 0$; $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

У речовині, як показує дослід, для всіх речовин $\vec{J} = \chi \vec{H}$, де χ – магнітна сприйнятливості речовини.

Тоді у речовині $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$.

Вводячи відносну магнітну провідність речовини

$$\mu = 1 + \chi,$$

отримаємо зв'язок, між індукцією \vec{B} і напруженістю \vec{H} у речовині:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}.$$

Відносна магнітна проникність

$$\mu = \frac{B}{B_0}, \quad (5.9)$$

тобто показує у скільки разів індукція \vec{B} магнітного поля у речовині, більша за індукцію \vec{B}_0 поза речовиною у вакуумі. На цьому засноване вимірювання відносності магнітної проникності. Таким чином, визначивши з формули (5.8) напруженість \vec{H} магнітного поля і вимірювши відносну магнітну проникність речовини за формулою (5.9), ми розриваємо замкнене коло і визначаємо індукцію \vec{B} магнітного поля у речовині.

Види магнетиків. В залежності від відносної магнітної проникності μ речовини розділяються на три групи:

- 1) $\mu = const < 1$ – діамагнетики;
- 2) $\mu = const > 1$ – парамагнетики;
- 3) $\mu = f(H); \mu_{max} \gg 1$ – феромагнетики.

Діамагнетизм. Це речовини, атоми яких не мають власного магнітного моменту ($\vec{p}_m = 0$). Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається прецесія (обертання навколо вектора магнітної індукції \vec{B}) електронних орбіт, що призводить до виникнення індукційних \vec{p}_i магнітних моментів атомів, спрямованих проти поля, і які утворюють магнітне поле \vec{B}' намагніченої речовини, яке направлено назустріч зовнішньому.

У результаті поле у речовині

$$B = B_0 - B' < B_0, \quad \mu < 1.$$

Парамагнетизм. Якщо магнітний момент атомів \vec{p}_m відмінний від нуля, речовина називається парамагнетиком. Зовнішнє магнітне поле \vec{B}_0 намагається встановити магнітні моменти атомів вздовж \vec{B}_0 . Виникаючий позитивний магнітний момент речовини значно більше негативного індукційного. Результируючий магнітний момент речовини позитивний, тобто направлений вздовж зовнішнього поля \vec{B}_0 . В результаті поле у речовині

$$B = B_0 + B' > B_0, \quad \mu > 1.$$

Феромагнетизм. Феромагнетики – це речовини, які здатні бути намагніченими навіть у відсутності зовнішнього магнітного поля (залізо, нікель, кобальт та ін.).

Намагніченість \vec{J} феромагнетиків залежить від напруженості \vec{H} магнітного поля у речовині (див. рис. 5.14). Із збільшенням напруженості H намагніченість J феромагнетика зростає, а потім стає незмінною. Наступає стан насичення феромагнетика. В наслідок того, що

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$, аналогічно веде себе і індукція магнітного поля у ферромагнетиках (див. рис. 5.15, а). При досягненні насичення $B = \mu_0 H + \text{const}$, де $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$, і індукція слабо зростає із збільшенням напруженості. Графік залежності $B = f(H)$ називається кривою намагнічування ферромагнетика. Якщо на кривій намагнічування взяти точку і провести через неї пряму з початку координат, то тангенс кута нахилу цієї прямої

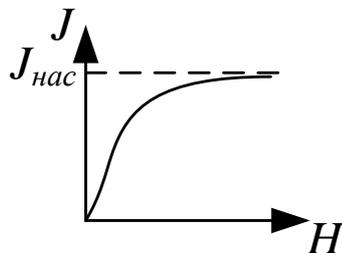


Рис. 5.14

$$\text{tg}\beta = \frac{B}{H} = \mu\mu_0.$$

Тобто, відносна магнітна проникність ферромагнетика змінюється при зміні H як $\text{tg}\beta$ (див. рис. 5.15, б). Максимальне значення μ досягається у точці, де хорда перетворюється на дотичну при русі точки по кривій намагнічування.

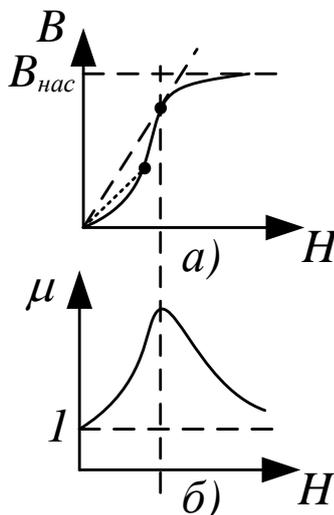


Рис. 5.15

Крім нелінійної залежності J від H у ферромагнетиках спостерігається явище гістерезису. При циклічних перемагнічуваннях ферромагнетика, залежність B від H має форму петлі (див. рис. 5.16). За один цикл перемагнічування точка $B=f(H)$ оббігає один раз по петлі проти годинникової стрілки.

При $H = 0$ (ферромагнетик вилучено з магнітного поля) ферромагнетик має залишкову індукцію $B_{\text{зал}}$, що робить можливим утворення постійних магнітів.

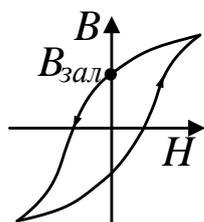


Рис. 5.16

Природа ферромагнетизму полягає у його доменній структурі. При певних умовах в кристалі виникають сили, що заставляють магнітні моменти електронів вишикуватися паралельно один одному. У результаті виникають області спонтанного намагнічування. Розміри доменів $\sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ см.

При нагріванні ферромагнетиків при певній для кожного ферромагнетика температурі, в наслідок теплового руху, домени руйнуються і ферромагнетик перетворюється на парамагнетик. Температура при якій відбувається це явище називається точкою Кюрі (T_C). Для заліза $T_C = 768^\circ\text{C}$, для нікелю $T_C = 365^\circ\text{C}$.

5.4. Електромагнітна індукція

Закон електромагнітної індукції. Явище електромагнітної індукції полягає в тому, що у будь-якому замкненому контурі, при зміні магнітного потоку через контур, виникає електричний струм, який називається індукційним струмом (див. рис. 5.17).

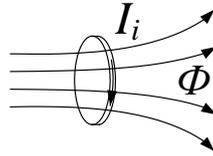


Рис. 5.17

Величина індукційного струму, а отже ЕРС індукції, не залежать від способу в якій утворюється зміна магнітного потоку і визначається лише швидкістю його зміни.

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) носить назву закону електромагнітної індукції.

Правило Ленца. Напрямок індукційного струму визначається за правилом Ленца: індукційний струм завжди направлений так, що своїм магнітним полем протидіє зміні магнітного потоку, що його породив (див. рис. 5.18).

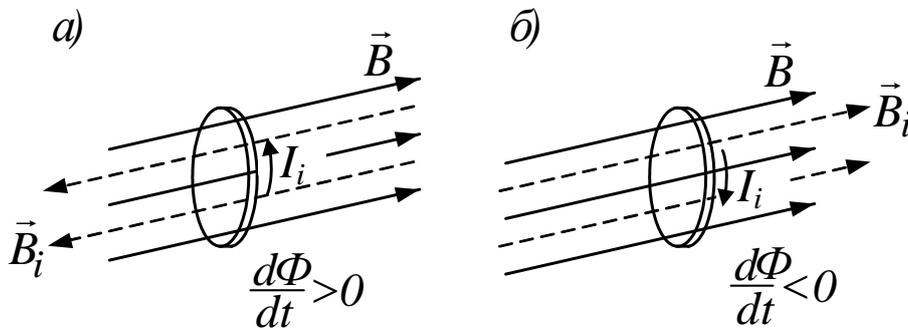


Рис. 5.18

На рис. 5.18 лінії магнітної індукції індукційного струму зображені пунктиром. При збільшенні магнітного потоку через контур вони направлені на зустріч лініям магнітної індукції зовнішнього поля, при зменшенні магнітного потоку – у той ж бік. Нагадаємо, що напрямок індукційного струму пов'язаний з напрямком ліній його магнітної індукції правилом правого гвинта (свердлення). Якщо контур складається не з одного витка, а з N витків, що з'єднані послідовно, то ЕРС індукції дорівнює:

$$E_i = \frac{d\psi}{dt}$$

де $\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$ – повний магнітний потік через контур, який дорівнює сумі магнітних потоків через усі витки контуру. Якщо всі вітки однакові, то

$$\psi = N\Phi$$

де Φ – магнітний потік через один віток.

Індукційні струми, що збуджуються у масивних суцільних провідниках, змінними магнітними полями називаються вихровими. Якщо опір масивних провідників малий, то вихрові струми можуть досягати значних величин. Для зменшення вихорних струмів осердя трансформаторів, генераторів набираються з тонких електроізолюваних пластин.

Індуктивність. Магнітний потік, що утворюється контуром, пропорційний струму, який тече у контурі.

$$\psi = LI.$$

Коефіцієнт пропорціональності L називається індуктивністю контуру. Індуктивність характеризує здатність контуру утворювати магнітний потік. Індуктивність контуру залежить від форми, розмірів контуру і магнітних властивостей середовища, що оточує контур.

Одиниця вимірювання індуктивності 1 Генрі ($Гн$) – це індуктивність контуру, який при силі струму у 1 Ампер утворює магнітний потік у 1 Вебер ($Вб$).

Індуктивність соленоїда визначається за формулою

$$L = \mu \mu_0 n^2 V,$$

де $n=N/l$ – кількість витків, що припадають на одиницю довжини соленоїда, V – об'єм соленоїда.

Самоіндукція. Електричний струм, що тече у контурі, утворює магнітний потік ψ , що пронизує цей контур. При зміні струму буде змінюватися і магнітний потік і, отже, в контурі буде виникати ЕРС індукції. Це явище називається самоіндукцією. ЕРС самоіндукції за відсутністю феромагнетиків визначається за формулою

$$E_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

Напрямок струму самоіндукції, як і індукційного струму, визначається за правилом Ленца. При збільшенні струму у контурі, струм

самоіндукції направлений йому на зустріч, а при зменшенні у той ж бік.

Струм при замиканні та розмиканні кола з індуктивністю. Внаслідок самоіндукції, встановлення струму при замиканні кола, і зменшення при розмиканні, протікає не миттєво а поступово.

При розмиканні кола з індуктивністю, струм зменшується за експоненціальним законом

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

(див. рис. 5.19, крива а), а при замиканні контуру – збільшується за експоненціальним законом

$$I = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

(див. рис. 5.19, крива б), де $I_0 = E/R$, E – ЕРС контуру, R – електричний опір контуру.

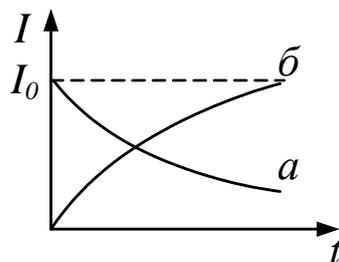


Рис. 5.19

Енергія магнітного поля. Магнітне поле, як форма матерії, є носієм енергії. Енергія магнітного кола контуру зі струмом визначається формулою

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Густина енергії $w = W/V$, тобто енергія у одиниці об'єму магнітного поля, визначається формулою

$$w_m = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

тобто, пропорційна квадрату напруженості магнітного поля, і залежить від магнітних властивостей середовища, які містяться у відносній магнітній проникності μ .

ТЕМА 6

ХВИЛЬОВА ОПТИКА

6.1. Світлова хвиля

Природа світла. Світло має складну, подвійну природу. У поведінці світла проявляються як корпускулярні так і хвильові властивості (так званий корпускулярно-хвильовий дуалізм світла). В одних оптичних явищах (інтерференція, дифракція) світло поводить себе як електромагнітна хвиля, у других (теплове випромінювання, гальмове рентгенівське випромінювання, фотоефект) світло поводить себе, як потік світлових частинок (корпускул) – фотонів.

Три розділи оптики. Оптика підрозділяється на три розділи:

1) Геометричною оптикою називається граничний випадок хвильової оптики при $\lambda \rightarrow 0$ (λ – довжина хвилі), в якому закони оптики сформульовані на мові геометрії (закони відбиття, заломлення, і ін.). При цьому світло поширюється вздовж деяких ліній (напрямків), що називаються променями.

2) Хвильова оптика. Цей розділ охоплює коло оптичних явищ, в основі яких лежить хвильова природа світла (інтерференція, дифракція, тощо).

3) Квантова оптика. Цей розділ охоплює коло оптичних явищ, що обумовлені корпускулярною (або квантовою) природою світла (теплове випромінювання, гальмове рентгенівське випромінювання, фотоефект, тощо).

Світлова хвиля. Це електромагнітна хвиля. Як уже згадувалось вище, у електромагнітній хвилі коливається вектор напруженості \vec{E} електричного поля і вектор напруженості \vec{H} магнітного поля. Фотофізіологічна, фотохімічна, фотоелектрична дія світла обумовлена електричною компонентою \vec{E} електромагнітної хвилі. Тому вектор \vec{E} в оптиці називають світовим вектором і позначають \vec{A} .

Тоді формула світлової хвилі

$$a = A \cos(\omega t - kz + \alpha). \quad (6.1)$$

Формула (1) описує світлову хвилю, що поширюється вздовж осі z . Тут використовуються такі позначення:

a – миттєве значення світлового вектора,

A – амплітуда (максимальне значення),

$\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота коливань світлового вектора,

$\nu = 1/T$ – частота коливань,
 $k = \omega/\nu = 2\pi/\lambda$ – хвильове число,
 $\lambda = \nu T$ – довжина хвилі,
 ν – швидкість поширення світлової хвилі.

Перехід через межу розподілу. При переході через межу розподілу двох середовищ частота коливань у хвилі залишається незмінною (вона задається джерелом світла), а змінюється швидкість поширення хвилі і, отже, довжина хвилі.

Розглянемо перехід хвилі з вакууму у речовину. У вакуумі довжина хвилі $\lambda_0 = c/\nu$, c – швидкість світла у вакуумі. У речовині довжина хвилі $\lambda = \nu/\nu$, де ν – швидкість світла у речовині. Введемо абсолютний показник заломлення речовини.

$$n = \frac{c}{\nu}.$$

Тоді довжина хвилі у речовині $\lambda = \lambda_0/n$.

Інтенсивність світла. Природне світло – це накладання (суперпозиція) світлових хвиль з довжинами хвиль у діапазоні

$$\Delta\lambda = (0.40 \div 0.76) \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

або з частотою в діапазоні $\Delta\nu = (0.39 \div 0.75) \cdot 10^{15}$ Гц.

Око людини реєструє середній за часом потік енергії, що переноситься світловою хвилею. Середня за часом густина потоку енергії називається інтенсивністю світла $I = nA^2$.

6.2. Інтерференція світла

Явище інтерференції. Розглянемо накладання двох світлових хвиль однакового напрямку коливань світлового вектора та однакової частоти. В деякій точці простору ці дві хвилі утворюють коливання світлових векторів.

$$a_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$a_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

Результуюче коливання

$$a = A \cos(\omega t + \alpha)$$

де амплітуди

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Або через інтенсивності

$$I^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Якщо різниця фаз $(\alpha_2 - \alpha_1)$ двох світлових хвиль за часом не змінюється, то такі хвилі називаються когерентними.

Для когерентних хвиль у точках, де

1. $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) > 0$ – результуюча інтенсивність $I > I_1 + I_2$,

тобто результуюча інтенсивність при накладанні двох хвиль більше суми інтенсивностей окремих хвиль.

2. $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) < 0$ – результуюча інтенсивність $I < I_1 + I_2$.

Таким чином, при накладанні двох когерентних світлових хвиль відбувається перерозподіл світлового потоку у просторі, який призводить до виникнення максимумів і мінімумів інтенсивності світла, які чергуються у просторі. Це явище називається інтерференцією, а чергування максимумів і мінімумів інтенсивності – інтерференційною картиною. При накладанні двох плоских когерентних хвиль інтерференційна картина являє собою чергування світлих і темних смуг.

Когерентне і некогерентне додавання коливань. Максимуми інтенсивності виникають у точках простору, де $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$. Інтенсивність світла у максимумах

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2. \quad (6.2)$$

І якщо інтенсивності хвиль однакові ($I_1 = I_2$), то

$$I_{\max} = 4I_1, \quad (6.3)$$

Мінімуми інтенсивності виникають у точках простору, де $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -1$. Інтенсивність світла у мінімумі

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2, \quad (6.4)$$

При однакових інтенсивностях хвиль

$$I_{\min} = 0, \quad (6.5)$$

Формули (6.2 – 6.5) визначають так званий закон когерентного додавання хвиль. Для некогерентних світлових хвиль різниця фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ довільно змінюється за часом, середнє значення $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$ і результуюча інтенсивність у всіх точках

$$I = I_1 + I_2, \quad (6.6)$$

А при однакових інтенсивностях хвиль

$$I = 2 I_1, \quad (6.7)$$

Формули (6.6) і (6.7) дають закон некогерентного додавання інтенсивностей хвиль.

Таким чином при накладанні двох когерентних хвиль з однаковими інтенсивностями інтенсивність у максимумі вдвічі більша ніж

результуюча інтенсивність при накладанні двох некогерентних хвиль з однаковими інтенсивностями.

Умови для інтерференційних максимумів і мінімумів. Для спостереження інтерференції потрібні когерентні джерела світла. У природі такі не існують, всі природні джерела світла – некогерентні.

Дві когерентні світлові хвилі можлива отримати розділивши хвилю, що випромінює джерело світла, на дві частини і знову наклавши їх одна на одну.

Нехай перша хвиля поширюється у середовищі з абсолютним показником заломлення n_1 і проходить до точки накладання геометричний шлях S_1 , а друга – в середовищі з абсолютним показником заломлення n_2 і проходить геометричний шлях S_2 (див. рис. 6.1). Оптичним шляхом променя світла називається добуток геометричного шляху на абсолютний показник заломлення. Введемо оптичні шляхи променя

$$L_1 = n_1 S_1, \quad L_2 = n_2 S_2$$

і оптичну різницю ходу променів $\Delta L = L_2 - L_1 = n_2 S_2 - n_1 S_1$.

Тоді максимуми інтенсивності спостерігаються у точках простору, для яких $\Delta L = \pm m \lambda_0$, $m=0,1,2\dots$. Тобто на оптичній різниці ходи променів вкладається ціла кількість довжин хвиль.

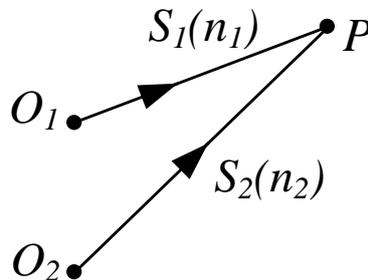


Рис. 6.1

Мінімуми інтенсивності світла спостерігаються у точках простору для яких, виконується умова

$$\Delta L = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda_0, \quad m=0,1,2\dots$$

Таким чином, якщо на оптичній різниці ходи променів для даної точки простору вкладається ціле число довжин хвиль, то коливання в даній точці додаються у фазі і в даній точці спостерігається інтерференційний максимум. А, якщо, на оптичній різниці ходи променів вкладається напівціле число довжин хвиль, то коливання в даній точці додаються у протифазі і у даній точці простору спостерігається інтерференційний мінімум.

Дослід Юнга. Одним з перших дослідів з інтерференції світла був дослід Юнга. У цьому досліді світло падає на екран з двома паралельними щілинами, а інтерференційна картина спостерігається на другому (суцільному) екрані, розташованому позаду першого (див. рис. 6.2)

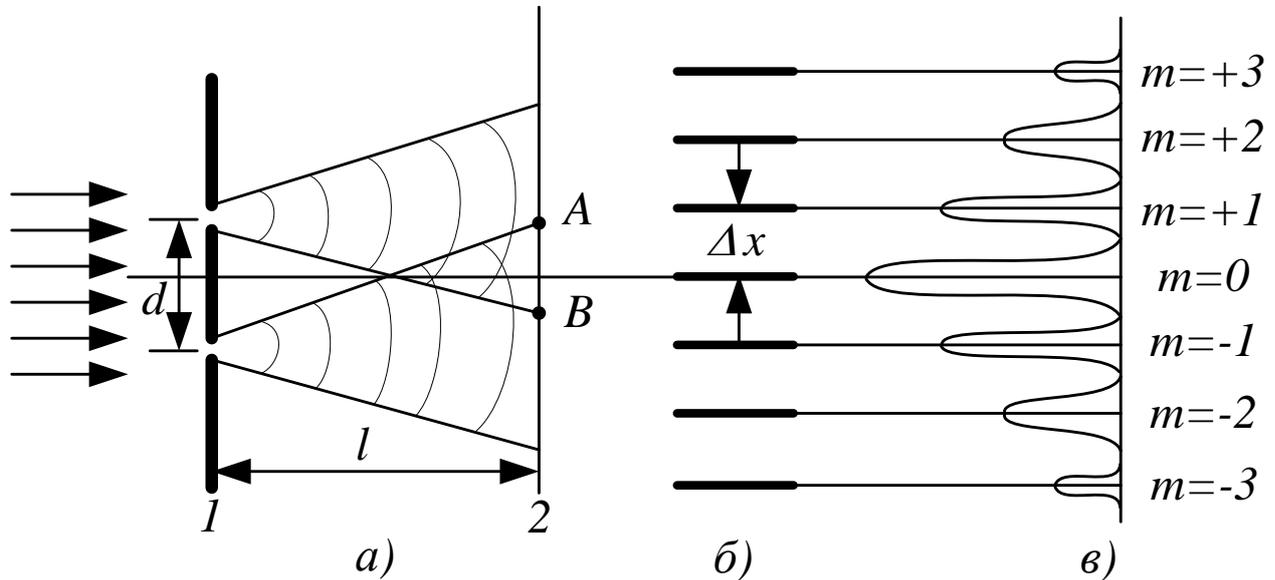


Рис. 6.2

Дві щілини являють собою для напівпростору за ним два джерела когерентних хвиль. Інтерференційна картина являє собою чергування світлих і темних смуг і спостерігається на ділянці AB , де накладаються когерентні хвилі (це, так зване, поле інтерференції). На осі симетрії (координата $x=0$) спостерігається світла смуга (інтерференційний максимум). Координати максимумів і мінімумів інтенсивностей визначаються формулами

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda,$$

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda,$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$ – порядок (тобто порядковий номер) інтерференційного максимуму (або мінімуму), l – відстань від щілин до екрану, d – відстань між щілинами, λ – довжина світлової хвилі. Відстань Δx між двома сусідніми максимумами (або мінімумами) визначається формулою

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda. \quad (6.8)$$

Вимірюючи за допомогою лінійки Δx , l і d , з (6.8) легко визначити довжину хвилі світла λ . Формула (6.8) носить назву формули Юнга, за її допомогою, закриваючи щілини різними світлофільтрами, Юнг визначив з високою ступінню точності довжину хвилі різних кольорів світла.

У білому світлі (що є накладанням світлових хвиль різних довжин) інтерференційна картина розмивається, оскільки положення максимумів і мінімумів залежить від довжини хвилі.

Інтерференція у тонких плівках. Дуже часто на практиці ми зустрічаємося з інтерференцією у тонких плівках. При відбитті від двох меж плівки утворюються два відбитих когерентних променя, які накладаються один на одного і інтерферують (див. рис. 6.3). Якщо товщина плівки задовольняє умовам

$$d = m \frac{\lambda_0}{2} \quad (m=1,2,3\dots),$$

то обидва відбиті промені накладаються у протифазі і спостерігається мінімум інтенсивності відбитого світла. А якщо товщина плівки $d=(m+1/2) \lambda_0/2$ ($m=1,2,3\dots$), то відбиті промені накладаються у фазі (говорять ще синфазно). І спостерігається максимум інтенсивності відбитого світла (λ_0 – довжина світлової хвилі у вакуумі).

Просвітлення оптики. На явищі інтерференції засновано, так зване, просвітлення оптики, тобто ефект при якому унеможливується відбиття світла від поверхні лінз оптичної системи

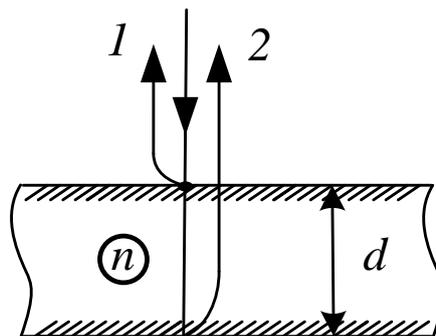


Рис. 6.3

Справа в тому, що при кожному відбитті в оптичній системі втрачається 4% падаючого світлового потоку. Тому світловий потік на виході складної оптичної системи суттєво послаблюється, а крім того при перевідбиттях виникають відблиски на зображенні. Щоб уникнути цього поверхня лінзи покривається тонкою прозорою плівкою (див. рис. 6.4).

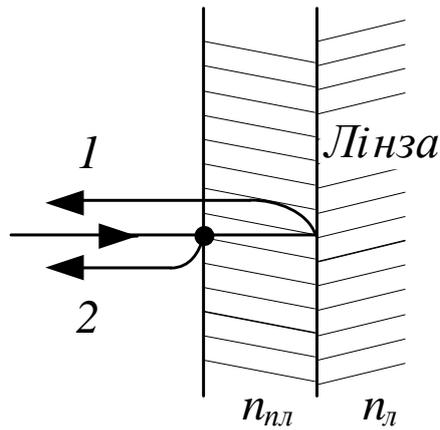


Рис. 6.4

Два відбитих від меж плівки промені 1 і 2 когерентні і інтерферують. Якщо товщина плівки $d = \lambda/4$, то відбиті промені 1 і 2 додаються у протифазі, тобто $I_{\text{від}} = I_1 - I_2$, а якщо при цьому ще виконується умова $n_{\text{пл}} = \sqrt{n_{\text{лінзи}}}$, де $n_{\text{пл}}$ – показник заломлення плівки, $n_{\text{лінзи}}$ – показник заломлення лінзи, то інтенсивності відбитих променів однакові ($I_1 = I_2$) і тоді $I_{\text{від}} = 0$, тобто відбиття світла від поверхні, вкритої такою плівкою, відсутнє.

6.3. Дифракція світла

Огинання хвилями перешкод називається дифракцією. Виникнення дифракції можна пояснити за допомогою принципу Гюйгенса: кожна точка хвильового фронту є джерелом вторинних сферичних хвиль, огинаюча яких дає положення хвильового фронту у наступний момент часу (див. рис. 6.5, а).

Промені світла поширюються по нормалі до хвильового фронту. Тому дифракція світла призводить до проникнення світла у область геометричної тіні і утворення дифракційної картини – світлих і темних ділянок, які чергуються (див. рис. 6.5, б, в).

Дифракція сильно залежить від співвідношення розмірів перешкоди d , по якій відбувається дифракція, і довжини хвилі λ . Дифракція найбільш яскраво виражена при $d \approx \lambda$.

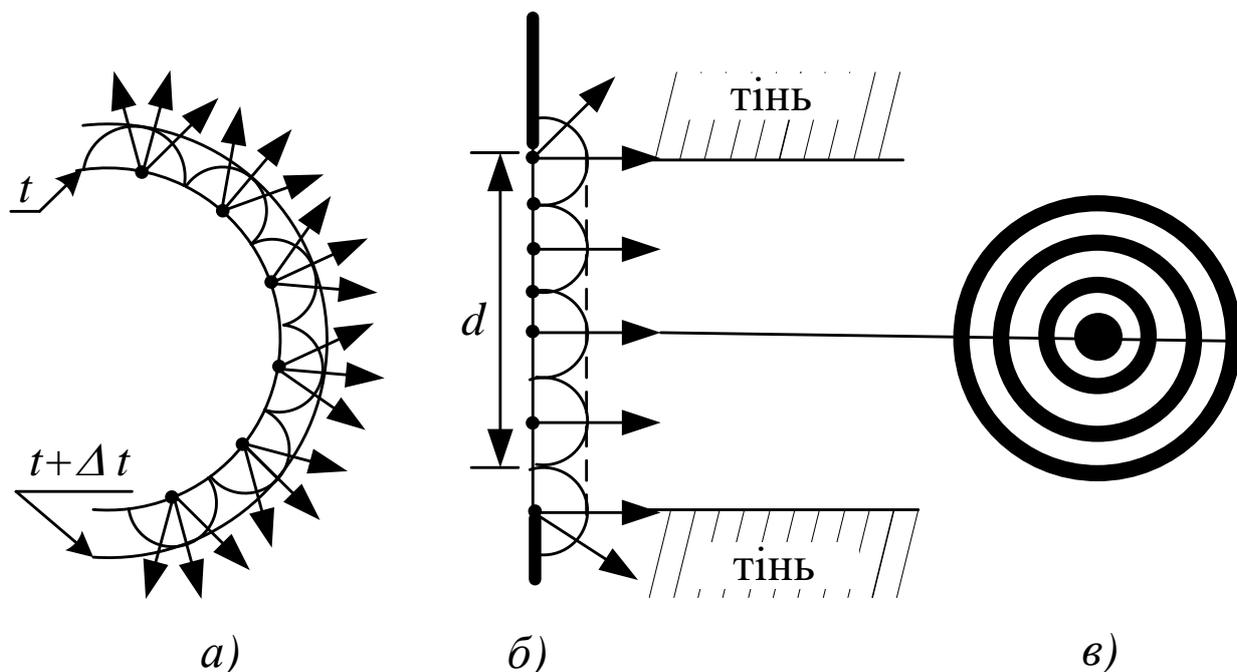


Рис. 6.5

Принцип Гюйгенса-Френеля. Принцип Гюйгенса дозволяє тільки якісно пояснити явище дифракції, але не дозволяє визначити амплітуди розсіяних перешкодою хвиль, які поширюються в різних напрямках. Френель доповнив принцип Гюйгенса уявленням про інтерференцію вторинних хвиль. Врахування амплітуд і фаз вторинних хвиль дозволяє знайти амплітуду розсіяної перешкодою світлової хвилі в будь якій точці простору.

Результуюче коливання в будь якій точці спостереження P являє собою суперпозицію коливань, що проходять від усіх елементів хвильової поверхні S з врахуванням їх амплітуд і фаз

$$a_p = \int_S k(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS, \quad (6.9)$$

де r – відстань від елемента dS хвильової поверхні S до точки спостереження P (див. рис. 6.6), A_0 – амплітуда коливань на елементі dS , $\omega = 2\pi/T$ – циклічна частота коливань, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число. Таким чином, результуюче коливання в точці P дорівнює сумі (тобто інтегралу) коливань, що приходять в точку P від всіх елементів хвильової поверхні S з врахуванням їх амплітуд і фаз. Це і є принцип Гюйгенса-Френеля.

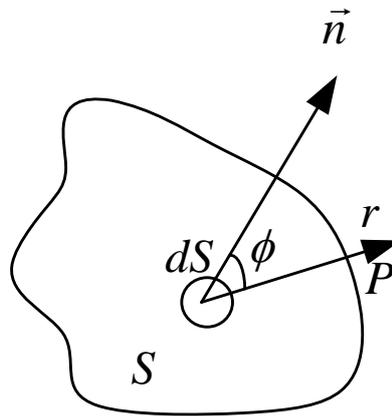


Рис. 6.6

Види дифракцій:

1) Дифракція Фраунгофера, або дифракція в паралельних променях, коли відстані від джерела світла S до перешкоди, на якій відбувається дифракція, і відстань від перешкоди до точки спостереження P великі порівняно з розмірами перешкоди. При цьому, промені, що падають від джерела світлу на перешкоду, і промені, що поширюються від перешкоди в точку спостереження, йдуть практично паралельними пучками (див. рис. 6.7, а).

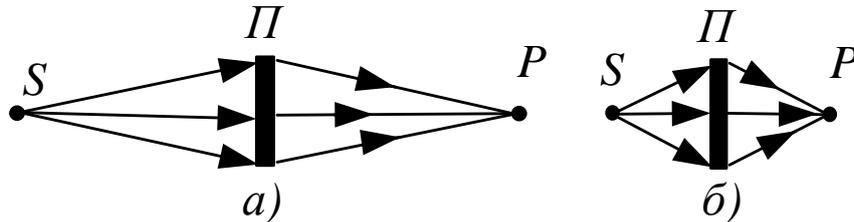


Рис. 6.7.

2) Дифракція Френеля – це дифракція в непаралельних променях, коли джерело світла і точка спостереження лежать недалеко від перешкоди (див. рис. 6.7, б)

Зони Френеля. Принципом Гюйгенса-Френеля (6.9) важко скористатися на практиці, оскільки важко підрахувати інтеграл по хвильовій поверхні S . Для полегшення цього Френель запропонував розбити поверхню інтегрування S (а це хвильова поверхня) на окремі ділянки, різниця ходу променів від меж яких дорівнює $\lambda/2$. Ці ділянки хвильової поверхні отримали назву зон Френеля. Тоді результуючі коливання, що утворюються в точці спостереження P вторинними хвилями від двох сусідніх зон Френеля, знаходяться у протифазі, тобто відрізняються за фазою на π . Тому амплітуда результуючого коливання, що утворюється в точці спостереження P вторинними хвиля-

ми, які прийшли від всієї хвильової поверхні, визначається формулою.

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots, \quad (6.10)$$

де A_m – амплітуда, що утворена вторинними хвилями, які прийшли від m -ї зони Френеля.

Для точкового джерела світла хвильова поверхня сферична і зони Френеля для неї являють собою кільцеві області (крім першої) з радіусом зовнішньої межі.

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda},$$

де a – радіус сферичної хвильової поверхні (див. рис. 6.8), b – відстань від вершини сферичного сегменту (точка O) до точки спостереження P (вимірюється вздовж лінії, яка з'єднує джерело S і точку спостереження P).

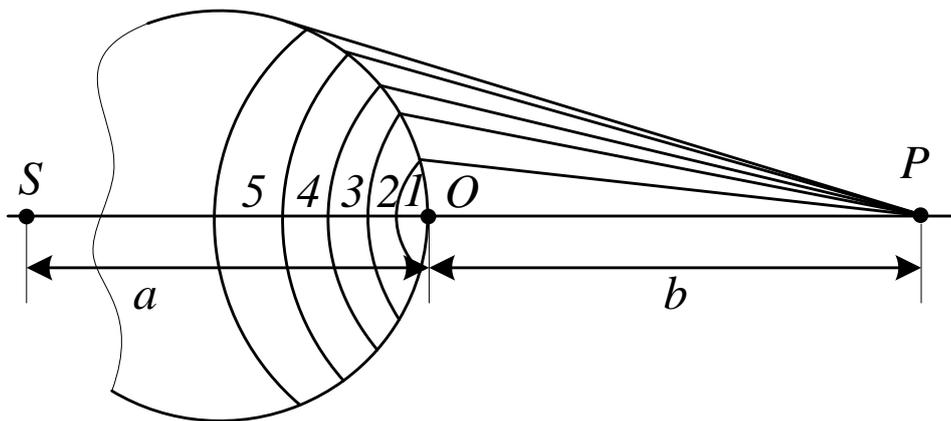


Рис. 6.8

Формулу (6.10) можна переписати у вигляді

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots$$

Для сферичної хвильової поверхні амплітуди A_m утворюють послідовність, що монотонно зменшується. Тому $A_m = (A_{m-1} + A_{m+1})/2$ і у результаті

$$A_p = \frac{A_1}{2}, \quad (6.11)$$

Тобто амплітуда, що утворюється в точці P сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, що утворюється однією центральною зоною.

Дифракція Френеля на круглому отворі. При дифракції сферичної хвилі на круглому отворі радіусом r_0 отвір відкриває

$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ зон Френзеля, де a – відстань від джерела світла до отвору, b – відстань від отвору до точки спостереження. Джерело S і точка спостереження P лежать на осі симетрії отвору. Амплітуда коливань в точці P

$$A_p = \frac{A_l}{2} \pm \frac{A_m}{2},$$

де знак плюс береться, якщо кількість зон Френеля, що відкриває отвір, непарне, а знак мінус – якщо число зон парне. При малої кількості відкритих зон Френеля $A_l \approx A_m$ і

$$A_p = \begin{cases} A_l, & m - \text{непарне,} \\ 0, & m - \text{парне.} \end{cases}$$

За відсутності перешкоди $A_p = A_l/2$ у відповідності до формули (6.11). Таким чином, перешкода з отвором, який відкриває непарну кількість зон Френеля не тільки не послаблює світло, але, навпаки, призводить до збільшення амплітуди коливань в точці P у два рази, а інтенсивності коливань – у 4 рази. Це суттєво хвильовий ефект, який у рамках геометричної оптики пояснити неможна.

При переміщенні точки спостереження у площині, паралельній площині з отвором, спостерігається дифракційна картина у вигляді світлих і темних кілець з максимумом у центрі, якщо отвір відкриває непарну кількість зон Френеля (див. рис. 6.9, а), і з мінімумом, якщо m – парне (див. рис. 6.9, б).

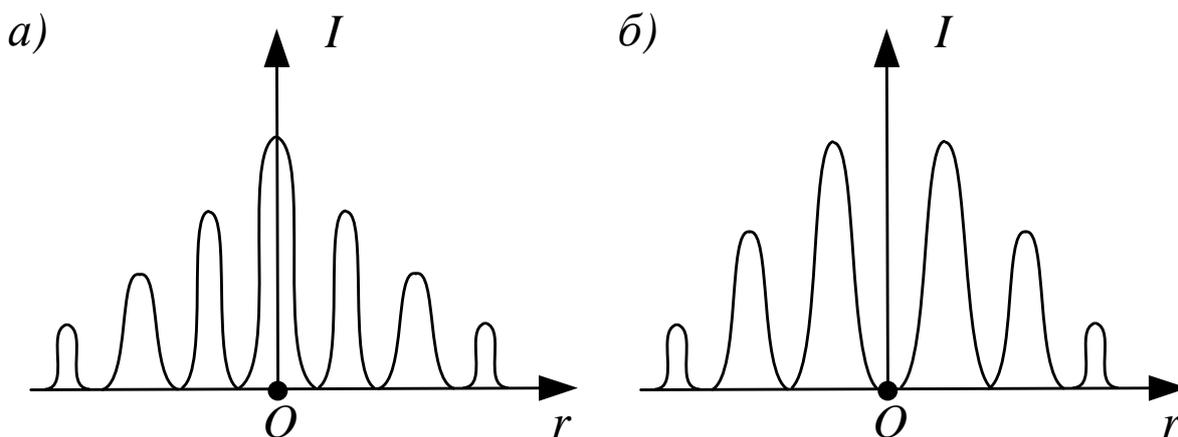


Рис. 6.9.

На рис. 6.9 показані профілі інтенсивності світла в залежності від відстані r від осі отвору. Якщо отвір відкриває не більш однієї зони Френеля, то на екрані розмита світла пляма.

Дифракція Фраунгофера на щілині. При дифракції паралельного пучка променів на щілині в екрані, щілина розсіює промені по всім напрямкам (див. рис. 6.10, а). Промені, які йдуть в одному напрямку інтерферують між собою і в результаті на екрані спостерігається дифракційна картина (див. рис. 6.10, б). При нормальному падінні променів на щілину шириною b , різниця ходу крайніх променів, що йдуть під кутом дифракції φ (відраховується від нормаль до щілин), дорівнює $b \sin \varphi$ (див. рис. 6.10, а).

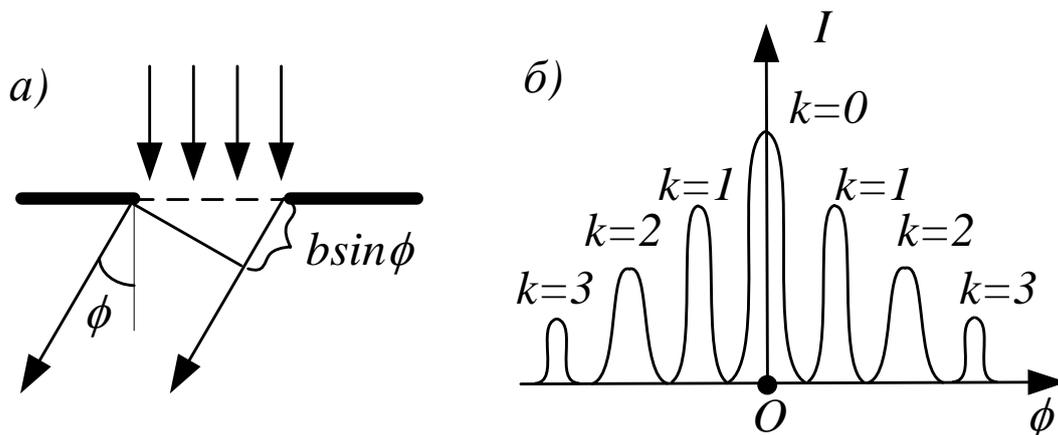


Рис. 6.10.

Якщо виконується така умова:

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad k=1,2,3,\dots, \quad (6.12)$$

то хвильова поверхня на щілині розбивається на $2k$ (парну) кількість зон Френеля. Дії зон попарно компенсують одна одну, і під даним кутом дифракції спостерігається дифракційний мінімум.

Якщо виконується така умова:

$$b \sin \varphi = \pm (k + \frac{1}{2}) \lambda, \quad k=1,2,3,\dots,$$

то на отворі вкладається $2k+1$ (непарна) кількість зон Френеля. Дія однієї зони залишається некомпенсованою і під даним кутом дифракції спостерігаються дифракційні максимуми.

Дифракційна картина являє собою чергування світлих і темних смуг. На рис. 6.10, б показано залежність інтенсивності дифрагованого світла від кута дифракції φ . Під кутом $\varphi = 0$ всі вторинні промені накладаються в однаковій фазі і під цим кутом дифракції спостерігається головний дифракційний максимум ($k=0$). Світлі смуги дифракційної картини відповідають максимумам інтенсивності, а темні – мінімумам

Дифракційні ґратки. Періодична послідовність щілин у екрані утворює дифракційну ґратку. Коливання, що поширюються від різних щілин ґратки є когерентними і інтерферують. Результат накладання (підсумовування) коливань залежить від різниці фаз коливань для двох сусідніх щілин $d \sin \varphi$, де d період дифракційної ґратки, φ – кут дифракції (див. рис. 6.11).

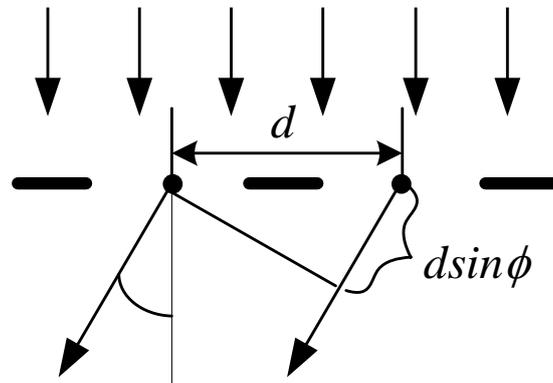


Рис. 6.11

За умови

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (6.13)$$

де $m=0,1,2,\dots$ – максимуми від окремих щілин накладаються у однаковій фазі і підсилюють один одного. Під такими кутами дифракції φ спостерігаються головні дифракційні максимуми для ґратки. Формула (6.13) носить назву формули дифракційної ґратки.

Умова (6.12) для дифракційних мінімумів для окремих щілин є одночасно і умовою для дифракційних мінімумів всієї ґратки.

Дифракційну картину при дифракції на ґратці пучка монохроматичного світла показано на рис. 6.12, а

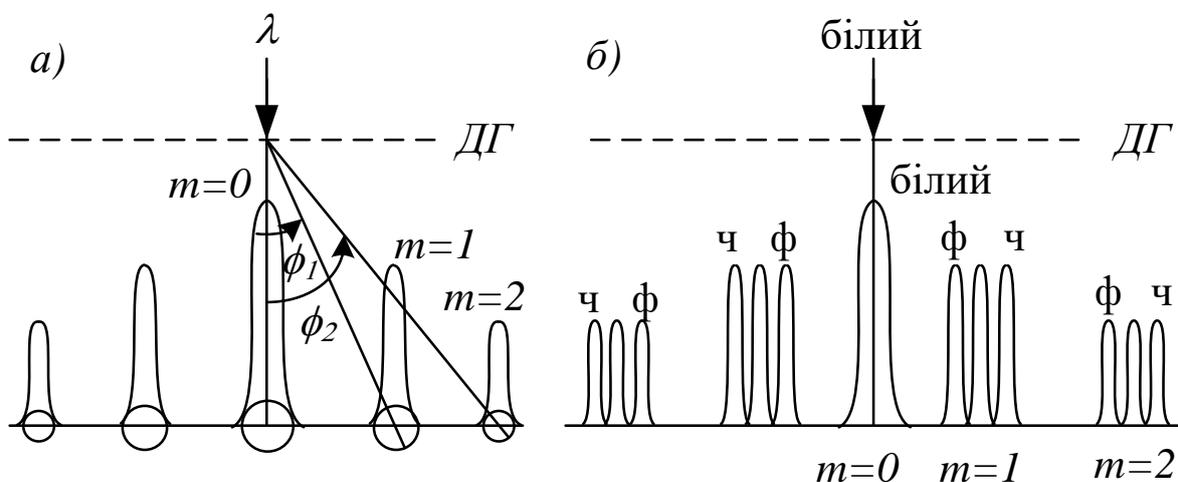


Рис. 6.12

Максимальний порядок (m) головних максимумів знаходиться з умови

$$m \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Так як кут дифракції не може перевершувати $\frac{\pi}{2}$, то кількість максимумів дорівнює $2m+1$.

Положення головних максимумів залежить від довжини хвилі λ . Тому при падінні на дифракційну ґратку білого світла всі максимуми дифракційної картини крім центрального $m=0$ розкладаються у спектр (див. рис. 6.12, б). Амплітуда в головному максимумі дифракційної ґратки $A = N \cdot A_i$, де A_i – амплітуда у максимумі для окремої щілини, N – кількість щілин дифракційної ґратки. Тоді інтенсивність головних максимумів дифракційної ґратки $I = N^2 I_i$. Тому максимуми дифракційної картини для ґратки дуже насичені і дифракційна ґратка вважається кращім спектральним приладом (тобто приладам для розкладання випромінювання у спектр).

6.4. Поляризація

Види поляризації. У природному світлі коливання світового вектора різних напрямків швидко і неупорядковано змінюють одне одного у площині, що поперечна до напрямку поширення світла (див. рис. 6.13, а)

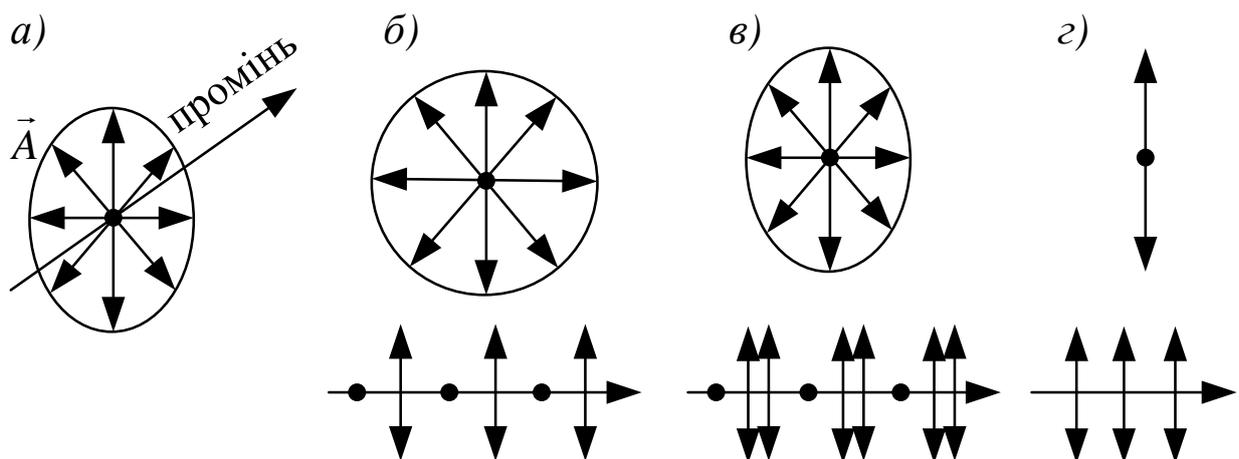


Рис. 6.13

Таке світло називається неполяризованим. Амплітуда коливань світлового вектора \vec{A} у нього по всім напрямкам у площині поперечній до напрямку поширення променя, однакова і, якщо з'єднати кінці світлових векторів різних напрямків, то отримаємо коло (див. рис. 6.13, б).

Світло, у якого напрямком коливань світлового вектора \vec{A} впорядковано якимось чином називається поляризованим. Розрізняють часткову і повну поляризацію.

У частково поляризованого світла амплітуда коливань у якомусь напрямку більш ніж у перпендикулярному тобто є домінуючий напрямок і є часткова впорядкованість в коливаннях світлового вектора. Якщо з'єднати кінці світлових векторів різних напрямків то отримаємо еліпс (див. рис. 6.13, в).

У повністю поляризованого світла коливання світлового вектора повністю впорядковані. На рис. 6.13, г показано повністю поляризоване світло, у якого коливання світлового вектора відбувається в одній площині (плоско поляризоване світло).

Поляризацію променя світла можна зобразити за допомогою двокінцевих стрілок і точок. Стрілки позначають коливання світлового вектора у площині рисунка, а точки – коливання, що перпендикулярні до площини рисунка. Для неполяризованого світла густина стрілок і точок на промені однакова, для частково поляризованого – більша густина або стрілок, або точок, для повністю поляризованого світла на промені або тільки стрілки або тільки точки (в залежності від напрямку коливання світлового вектора).

Мірою поляризації є ступінь поляризації

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де I_{\max} – максимальна інтенсивність, I_{\min} – мінімальна інтенсивність (у поляризованому напрямку) Для неполяризованого світла $I_{\max} = I_{\min}$ і $P = 0$, для частково поляризованого $0 < P < 1$, для повністю поляризованого $I_{\min} = 0$ і $P = 1$.

Поляризатори. Природне неполяризоване світло перетворюється на поляризоване за допомогою поляризаторів. Поляризатори – це пристрої, які пропускають коливання, що паралельні площині поляризатора, і повністю затримують коливання, що перпендикулярні до неї.

Якщо на поляризатор падає поляризоване світло з інтенсивністю I_0 і площина коливань світлового вектора складає кут φ з площиною поляризатора, то інтенсивність світла на виході поляризатора (див. рис. 6.14, а) визначається за формулою:

$$I_{вих} = I_0 \cdot \cos^2 \varphi. \quad (6.14)$$

Формула (6.14) має назву закону Малюса.

Якщо на поляризатор падає неполяризоване світло (див. рис. 6.14, б), то кут φ у формулі (6.14) приймає будь які значення від 0 до 2π і потрібно провести усереднення по всім можливим кутам. Середнє значення $\cos^2 \varphi = 1/2$ і в результаті

$$I_{вих} = \frac{1}{2} I_0.$$

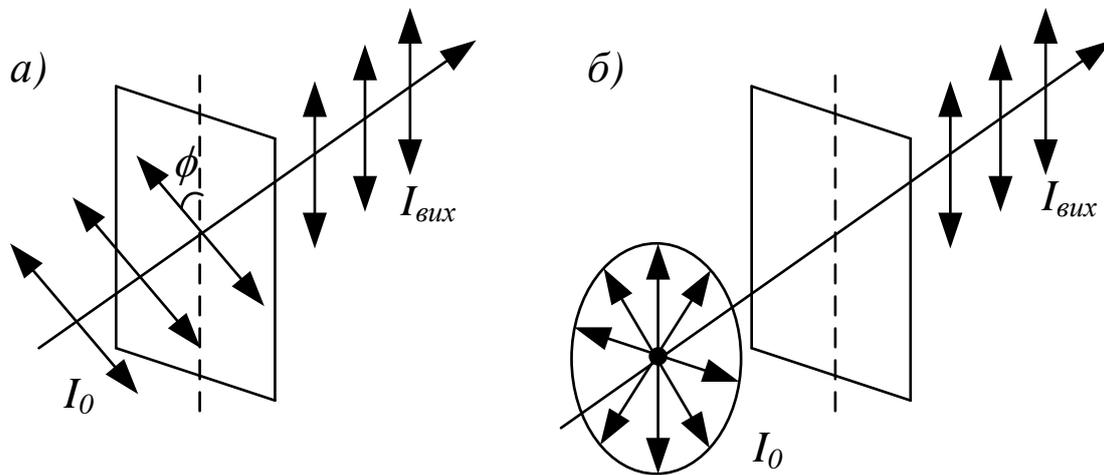


Рис. 6.14

Поляризація при відбитті і заломленні. Якщо на межу розподілу двох середовищ з абсолютними показниками заломлення n_1 і n_2 (1-ше середовище це середовище, в якому поширюється падаючий промінь, 2-ге середовище – де заломлений) падає природний (неполяризований) промінь світла, то відбитий і заломлений промені будуть частково поляризованими. При цьому в відбитому промені домінують коливання перпендикулярні до площини падіння, а у заломленому – паралельні до площини падіння (див. рис. 6.15).

При зміні кута падіння змінюються ступені поляризації відбитого і заломленого променів. При куті i_B , що задовольняє

$$\operatorname{tg}(i_B) = \frac{n_2}{n_1}, \quad (6.15)$$

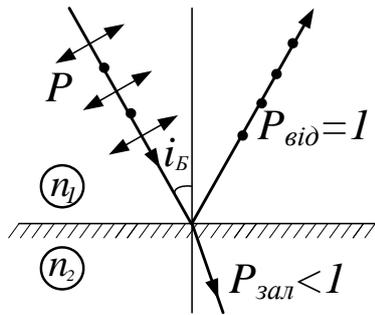


Рис. 6.15

відбитий промінь становиться повністю поляризованим ($P_{відб} = 1$), а ступінь поляризації заломленого досягає максимуму, але менше 1. (тобто залишається частково поляризованим) Формула (6.15) називається законом Брюстера (або законом повної поляризації), а кут i_B – кутом Брюстера (або кутом повної поляризації).

Описане явище поляризації світла при відбитті і заломленні має в своїй основі той факт, що випромінювання зарядів, що коливаються, має направлений характер. У напрямку коливань заряджена частинка не випромінює. При куті падіння Брюстера напрямок паралельних коливань частинок середовища співпадає з напрямком відбитого променя. Тому у відбитому промені залишаються тільки перпендикулярні до площини падання коливання

Поляризація при подвійному променезаломленні. При проходженні через деякі кристали світловий промінь розділяється на два промені. Це явище отримало назву подвійного променезаломлення. Вперше воно спостерігалось у кристалах ісландського шпату ($CaCO_3$). Напрямок у кристалі, поширюючись вздовж якого промінь світла не розділяється на два промені, називається оптичною віссю кристала, а площина, що проходить через оптичну вісь і падаючий промінь – головним перерізом кристала.

Один з заломлених променів задовольняє звичайним законом заломлення і називається звичайним (позначається літерою o), другий не задовольняє і називається незвичайний (позначається літерою e). Коливання світлових векторів у звичайному і незвичайному променях здійснюються у перпендикулярних площинах: у незвичайного променя в головному перерізі кристала, у звичайного – перпендикулярного до нього (див. рис. 6.16).

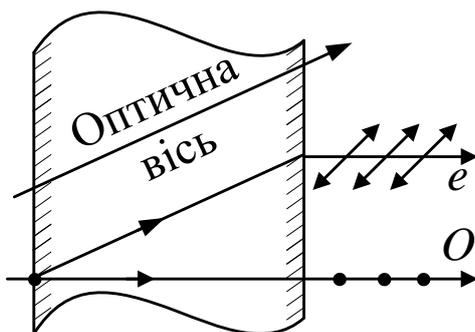


Рис. 6.16

Явище подвійного променезаломлення спостерігається для всіх прозорих кристалів за винятком тих, що належать до кубічної системи. В кристалах не кубічної системи діелектрична проникність ϵ , отже, і абсолютний показник заломлення $n = \sqrt{\epsilon}$, залежать від напрямку

променя, що і призводить до виникнення подвійного променезаломлення.

Призма Ніколя. На використанні явища подвійного променезаломлення заснована дія поляризатора, який називається призмою Ніколя, або просто ніколем. Ніколь являє собою призму виконану з ісландського шпату, розрізану по діагоналі і склеєну прозорим клеєм (див. рис. 6.17).

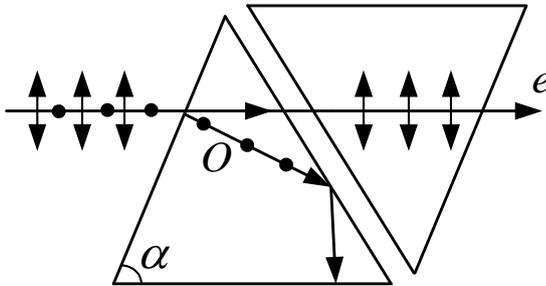


Рис. 6.17

Показник заломлення клею $n_{\text{клею}}$ вибирається так, щоб виконувалася умова

$$n_o > n_{\text{клею}} > n_e,$$

де n_o – показник заломлення для звичайного променя, n_e – для незвичайного. Тоді при падінні на клеєну плівку звичайний промінь падає з середовища оптично більш густого у середовище оптично менш густе і, якщо підібрати кут нахилу призми α так, щоб кут його падання на клеєву плівку був більший куту повного внутрішнього відбиття, то звичайний промінь відбивається від клеєної плівки, а незвичайний – проходить. В результаті при падінні на ніколь неполяризованого світла на виході буде повністю поляризоване.

ку звичайний промінь падає з середовища оптично більш густого у середовище оптично менш густе і, якщо підібрати кут нахилу призми α так, щоб кут його падання на клеєву плівку був більший куту повного внутрішнього відбиття, то звичайний промінь відбивається від клеєної плівки, а незвичайний – проходить. В результаті при падінні на ніколь неполяризованого світла на виході буде повністю поляризоване.