КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

автор: Бондарчук В.М.

Зміст

РОЗДІЛ І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

ГЛАВА 1: Матриці. Визначники матриці. Системи рівнянь першого степеню

§1 Основні поняття

Однією із найважливіших задач математики є дослідження та розв`язок систем рівнянь 1-го степеню. Нехай така система містить m невідомих $X_1$, $X_2$, ..., $X_m$, зв`язаних n рівняннями 1-го степеню (число рівнянь може і не співпадати з числом невідомих). В загальному вигляді цю систему можна записати так:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1m}x_m=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2m}x_m=b_2$…………………………… (1)

$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nm}x_m=b_n$

В системі (1) $b_1, b_2, ..., b_n$ - задані вільні члени, a_{ik} (i=1, 2, ..., n; k=1, 2, ..., m) - задані коефіцієнти при невідомих. При цьому перший індекс у a_{ik} означає номер рівняння в системі, а другий - номер невідомого, при якому стоїть цей коефіцієнт.

Тобто, a_{ik} - коефіцієнт, який стоїть в і-му рівнянні системи при невідомому $X_к$. Аналогічно b_i означає вільний член в і-му рівнянні системи.

Розв`язком системи (1) називається така сукупність чисел $X_1, X_2, ..., X_m$, яка будучи підставлена у всі рівняння системи (1), обертає ці рівняння в числові рівності.

Запишемо таблицю, складену із коефіцієнтів при невідомих в системі (1):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Таку таблицю розглядатимемо як єдине ціле і будемо називати основною матрицею системи.

Таблиця,

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

яка містить і стовпець , складений із вільних членів системи (1), називається *розширеною матрицею системи.*

Очевидно, що саме існування розв`язку системи (1), так і можливі числові значення елементів розв`язку повністю визначаються матрицями (2) і (3). А тому природньо, розглянемо деякі загальні властивості матриць.

Числовою матрицею (або просто матрицею) називається прямокутна таблиця чисел. Окремі числа цієї таблиці називаються елементом матриці. Елементи матриці А позначають символом a_{ik}, де і- номер рядка, а k - номер стовпця, в якому стоїть вибраний елемент.

Якщо матриця містить n рядків і m стовпців, тоді говорять, що матриця має розмірність nxm**.**

Особливо часто доводиться мати справу з матрицями, у яких число рядків дорівнює числу стовпців. Такі матриці називаються *квадратними.*

Число рядків (а, звідси, і число стовпців) квадратної матриці називається *порядком* матриці.

§2 Визначники матриць другого порядку

Для квадратної матриці вводиться нове поняття - визначник матриці. Визначник квадратної матриці будемо позначати символом det A і визначимо його індуктивним шляхом.

Визначником матриці 1-го порядку (тобто матрицею, яка складається із одного елементу, одного числа) називається саме число, яке утворює задану матрицю.

Визначником матриці 2-го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, обчислене по такому правилу: det A=$a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$.

Діагональ квадратної матриці, яка йде від лівого верхнього елементу таблиці до правого нижнього, називається *головною діагоналлю* матриці. Діагональ, яка йде від правого верхнього елементу до лівого нижнього, називається побічною діагоналлю матриці.

Таким чином, для обчислення визначика матриці 2-го порядку потрібно із добутку елементів, які знаходяться на головній діагоналі матриці, відняти добуток елементів, які знаходяться на побічній діагоналі.

Для визначника матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вводиться символ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Таким чином,

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

Як видно із (1), визначник матриці 2-го порядку являє собою алгебраїчну суму двох доданків. Кожний із доданків є добуток двох елементів, при чому до нього входить один елемент першого рядка та один елемент 2-го рядка, один елемент 1-го стовпця та один елемент 2-го стовпця заданої матриці. Зі знаком "+" береться добуток елементів головної діагоналі і зі знаком "-" - добуток елементів побічної діагоналі.

Із визначення (1) легко отримати ряд властивостей визначників матриць.

Властивість 1. *При перестановці рядків матриці на місце стовпців і навпаки визначник матриці не змінюється.*

Нехай задана матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а матриця $A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ отримана із А перестановкою рядків на місце стовпців (така матриця А* називається часто транспонованою по відношенню до матриці А). Тоді

$$\det A^*=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det A$$

Властивість 2. *При перестановці двох стовпців (або рядків) абсолютне значення визначника матриці не змінюється, а знак змінюється на протилежний.*

Нехай задана матриця $A_1=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$, отримана із А перестановкою стовпців. Тоді

$$\det A_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-\det A$$

Властивість 3. *Якщо матриця має два однакових стовпця (рядка), тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Властивість 4. *Якщо всі елементи будь-якого стовпця (рядка) матриці помножить на одне і те ж число, тоді визначник матриці виявиться помноженим на те ж число.*

Властивість 5. *Якщо всі елементи будь-якого стовпця (рядка) матриці дорівнюють нулю, тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Властивість 6. *Нехай всі елементи будь-якого стовпця (рядка) матриці A представляють собою суму двох елементів і нехай відповідні стовпці матриць A_1 і A_2 складаються із таких елементів:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} \\ a_{21} + a_{21}' & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22} \end{pmatrix}$$

тоді

$\det A = \det A_1 + \det A_2$

Таке твердження, як і твердження 3, 4, 5, доводиться безпосередньою перевіркою.

Властивість 7. *Визначник матриці не змінюється, якщо до елементів будь-якого стовпця (рядка) матриці додати величини, пропорційні елементам другого стовпця (рядка).*

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Тоді $\det A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A + k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A$

§3. Визначники матриць третього порядку

Нехай задана будь-яка матриця порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виберемо довільний елемент a_{ik} цієї матриці і викреслимо із матриці A той рядок і той стовпець, в яких міститься цей елемент, (тобто викреслимо i-ий рядок та k-ий стовпець). Тоді отримаємо матрицю (n-1)-го порядку.

Будемо називати її субматрицею матриці А, що відповідає елементу a_{ik} та позначимо її символ $Д_{ik}$

Визначник субматриці $Д_{ik}$ назвемо мінором матриці А, що відповідає елементу a_{ik}, та позначимо символом M_{ik}.

Звідси

$M_{ik}=\det Д_{ik}$. (1)

Нехай вихідна матриця А була матрицею 3-го порядку. Тоді дев`ять її можливих субматриць $Д_{11}$, $Д_{12}$, $Д_{13}$, $Д_{21}$, $Д_{22}$, $Д_{23}$, $Д_{31}$, $Д_{32}$, $Д_{33}$, які відповідають різним елементам матриці А, будуть матрицями 2-го порядку.

-

Визначення. *Визначником матриці 3-го порядку*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

називається число, визначене за таким правилом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \qquad (2)$$

Оскільки для матриці А

$$D_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad D_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad D_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

тоді

$M_{11}=\det D_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$

$M_{12}=\det D_{12}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}$

$M_{13}=\det D_{13}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$

Звідси

$\det A=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$

det A=$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ (3)

Як видно із одержаної формули, визначник матриці 3-го порядку представляє собою алгебраїчну суму шести доданків. Кожний доданок є добутком трьох елементів по одному із кожного рядка і кожного стовпця. Перший із доданків, взятих зі знаком "+", представляє собою добуток елементів, розташованих на головній діагоналі матриці. Останні два містять елементи, розташовані у вершинах трикутників з основою, паралельною головній діагоналі.

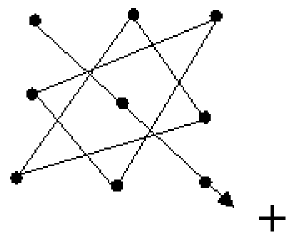

Рис. 1

Добутки, які входять зі знаком "-", містять елементи, розташовані на побічній діагоналі, та елементи, розташовані у вершинах трикутників з основою паралельною побічній діагоналі.

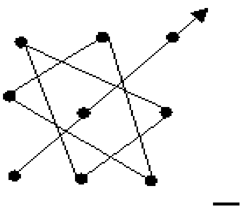

Рис. 2

Безпосередньою перевіркою можна пересвідчитись у тому, що всі властивості, встановлені для визначників матриць 2-го порядку, мають місце і для визначників 3-го порядку.

§ 4 Визначники матриць вищих порядків

Визначники матриць 4-го і більш високих порядків будемо вводити аналогічно визначникам матриць 3-го порядку. Нехай задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначення. *Визначником матриці А порядку n називається число, обчислене за таким правилом:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1n} M_{1n} \quad (1)$$

У відповідності зі сказаним раніше в цій формулі M_{ik} є мінор матриці A, який відповідає елементу a_{ik}, тобто визначник субматриці $Д_{ik}$, одержаний із матриці A викреслюванням **i**-того рядка і **k**-го стовпця.

Правило (1) є очевидним узагальненням правила (2, § 3). Воно дає можливість звести обчислення визначників матриць 4-го порядку до обчислень визначників 3-го порядку і т.ін.

Обчислення визначника матриці високого порядку по формулі (1) - операція досить трудомістка. А тому важливо, використовуючи властивості визначників матриць, скоротити обчислення.

Оскільки визначники матриць введені на основі принципу індукції, тоді природно сподіватися, що властивості визначників матриць вищих порядків будуть ті ж , що визначники 2-го порядку. Приймемо без доведення наступні два твердження про властивості визначників матриць порядку n (ці властивості були перевірені для визначників матриць 2-го порядку, а властивість 1 також і для матриць 3-го порядку)

Властивість 1. *При перестановці рядків матриці на місце стовпців визначник матриці не змінюється*

Властивість 2. *При перестановці двох рядків (або стовпців) матриці абсолютне значення визначника матриці не змінюється, а знак змінюється на протилежний*.

Перша властивість дає можливість всі положення, встановлені для рядків матриці, переносити на її стовпці. Із нього, наприклад, виходить, що можливо визначник матриці обчислювати і по формулі

$\det A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n1}M_{n1}$ (2),

тобто виконувати розклад визначника матриці не тільки по елементах першого рядка, але і по елементах першого стовпця. На основі даних тверджень виведемо основну формулу для розкладу визначника матриці по елементах будь-якого рядка або стовпця:

$\det A=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+...+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}= (-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k}+(-1)^{2+k}a_{2k}M_{2k}+...+(-1)^{n+k} a_{nk}M_{nk}$ (3)

Перша частина твердження представляє собою розклад визначника по елементах i-го рядка, друга половина - розклад по елементах k-го стовпця.

Доведення. Нехай задана матриця n-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Переставимо i-тий і (i-1)-ий рядок матриці A, потім переставимо новий (i-1)-ий рядок з (i-2)-им рядком і т.д. до тих пір, доки вихідний i-ий рядок не стане 1-им рядком. Тоді одержимо нову матрицю.

$$A'=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця A' одержана із A в результаті (i-1) перестановок рядків. Кожна така перестановка у визначника матриці змінює тільки знак. Отже, $(-1)^{i-1}\det A? =\det A$

Субматриця Д' $_{ік}$ матриці A' , яка відповідає елементу $a_{ік}$, повністю співпадає з субматрицею Д$_{ік}$, яка відповідає елементу $a_{ік}$ матриці A.

Тому

$\det D'_{ik} =\det D_{ik}=M_{ik}$,

і на основі означення (1) одержимо

$\det A' =a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+...+(-1)^{n-1}a_{in}M_{in}$

Таким чином

$\det A=(-1)^{i-1}\det A' =(-1)^{i+1}\det A' =(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+...+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$

і перша половина формули (3) одержана.

Другу половину формули одержимо, використовуючи можливість перестановки рядків на місце стовпців.

Для спрощення запису формул розкладу зручно ввести поняття *"алгебраїчне доповнення, яке відповідає заданому елементу матриці"*.

Визначення. *Алгебраїчним доповненням елементу $a_{ік}$ матриці А називається мінор $M_{ік}$ цієї матриці, помножений на $(-1)^{і+к}$:*

Алгебраїчне доповнення елементу $a_{ік}$ матриці А позначається, як правило, символом $A_{ік}$. Отже,

$A_{ік}=(-1)^{і+к}M_{ік}$ (4)

Тепер формулу розкладу (3) можна записати в такому вигляді

$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+...+a_{nk}A_{nk}$ (5)

Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) матриці на відповідне алгебраїчне доповнення.

Для скорочення запису часто вводиться спеціальне позначення суми ряду доданків. Суму $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ будемо записувати символом $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$. Знак α в такому записі є символом підсумовування, запис k=1 під знаком суми і n над знаком α означає, що індекс к у окремих доданках приймає значення від k=1 до k=n. Очевидно, що якщо p будь-яке число, тоді

$$\sum_{k=1}^{n} p\alpha_k = p\sum_{k=1}^{n}\alpha_k ,$$

тобто сталий множник можна винести за знак суми. Вкажемо ще, що

$$\sum_{k=1}^{n}(a_к+b_к)c_к=\sum_{k=1}^{n}a_кc_к+\sum_{k=1}^{n}b_кc_к.$$

Дійсно

$$\sum_{k=1}^{n}$$

$(a_к+b_к)c_к=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+...+(a_n+b_n)c_n=(a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+...+a_nc_n+b_nc_n)=$

$=(a_1c_1+a_2c_2+...+a_nc_n)+(b_1c_1+b_2c_2+...+b_nc_n)=\sum_{k=1}^{n} a_kc_k+\sum_{k=1}^{n} b_kc_k$

З допомогою символу підсумовування формулу (5) записують у вигляді

det A= $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$. (5?)

З допомогою формули розкладу легко встановити інші властивості визначників матриць будь-якого порядку.

Властивість 3. *Якщо матриця має два однакових рядка (або стовпця), тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай в матриці А співпадають ℓ -ий і s-ий рядок. Переставимо в цій матриці s-ий рядок на місце ℓ -го і навпаки. Оскільки ці рядки однакові, тоді ні сама матриця, ні її визначник не зміняться. Але разом з тим при перестановці в матриці двох будь-яких рядків визначник матриці змінить свій знак, тобто det A= -det A, і тому det A=0.

Властивість 4. *Якщо всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) матриці помножить на одне і те ж число, тоді визначник матриці стане помноженим на те ж число.*

Доведення. Розглянемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ pa_{i1} & pa_{i2} & \cdots & pa_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Розкладаючи визначник цих матриць по елементах і-го рядка, одержуємо

detA= $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ det A? = $\sum_{k=1}^{n} pa_{ik}A_{ik}=p\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

Отже, det A' =pdetA.

Властивість 5. *Якщо всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) матриці дорівнюють нулю, тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Розкладаючи визначник матриці по елементах рядка, всі елементи якого дорівнюють нулю, одержимо висловлене твердження.

Властивість 6. *Нехай всі елементи будь-якого рядка (або стовпця) матриці A представляють собою суму двох доданків, і нехай відповідні рядки матриць A_1 і A_2 складаються із цих доданків:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+\alpha_1 & a_{i2}+\alpha_2 & \cdots & a_{in}+\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді $\det A=\det A_1+\det A_2$.

Доведення. Розкладаючи визначники матриць A_1, A_2, A по елементах i-го рядка, одержимо $\det A=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+\alpha_k)A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k A_{ik}=\det A_1+\det A_2$.

Властивість 7. *Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (або стовпця) матриці додати величини, пропорційні елементам другого рядка (стовпця) тієї ж матриці.*

Доведення. Розглянемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+pa_{e1} & a_{i2}+pa_{e2} & \cdots & a_{in}+pa_{en} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (э\ \Omega\ 6)$$

і матрицю В, одержану заміною в матриці А i-го рядка ℓ -им рядком ($i \neq \ell$)

Згідно доведеному раніше $\det A' = \det A + p\det B$. Але в матриці В рядок $a_{\ell 1}$, $a_{\ell 2}$,..., $a_{\ell n}$ входить двічі (на i-му і на ℓ -му місцях), і тому detB=0, тобто detA' =detA.

Встановлені властивості дають практичний метод обчислення визначників матриць високих порядків. Покажемо на декількох прикладах зміст цього методу.

Приклад 1. Задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти det A.

Розв'язок. Перетворимо задану матрицю так, щоб в одному рядку або в одному стовпці всі елементи, крім одного, стали рівними нулю. Перетворення при цьому проводимо такі, щоб визначник матриці не змінювався. Для цього до елементів 1-го і 3-го рядка додаємо подвоєні елементи 2-го рядка.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Розкладаючи визначник по елементах 2-го стовпця по формулі (3), одержимо

$$\det A = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

Приклад 2. Задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайти det A.

Розв'язок. Перетворимо матрицю так, щоб всі елементи 3-го рядка, крім одного, обертались в нуль. Для цього до елементів 1-го стовпця додамо елементи 3-го, помножені на -4, а до елементів 2-го стовпця додаємо елементи 3-го, помножені на 2. Тоді будемо мати

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 13 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Додаємо до елементів першого рядка елементи 2-го рядка, помножені на -2, і до елементів 3-го елементи 2-го, помножені на -3. Тоді

$$\det A = \begin{vmatrix} -20 & 9 & 0 \\ 13 & -4 & 1 \\ -44 & 18 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -20 & 9 \\ -44 & 18 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

Доведемо, на довершення, ще одну суттєву теорему, яку назвемо *теоремою про алгебраїчні доповнення.*

Сума добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) матриці на алгебраїчне доповнення, відповідні елементам другого рядка (або стовпця) цієї ж матриці, дорівнює нулю.

Доведення. Нехай задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \cdots & a_{en} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Розглянемо допоміжну матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

одержану із матриці А заміною елементів ℓ -го рядка числами $h_1, h_2, \dots h_n$.

Розкладаючи det A_1 по елементах ℓ -го рядка, одержимо det $A_1=\sum_{k=1}^{n} h_k A_{\ell k}$

де $A_{\ell k}$ - алгебраїчні доповнення, відповідні елементам ℓ -го рядка як матриці A_1, так і матриці А. Покладаючи $h_k=a_{ik}$, одержимо матрицю, у якої два рядки повністю співпадають. Тому при $i \neq \ell$ визначник цієї матриці, тобто $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{\ell k}$ повинен дорівнювати нулю. Теорема доведена.

Об’єднуючи доведену теорему і формулу (5), можна записати

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{\ell k} = \begin{cases} \det A & i = \ell \\ 0 & i \neq \ell \end{cases} \quad (6)$$

Аналогічно, проводячи розклад по елементах і-го стовпця, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i\ell} = \begin{cases} \det A & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases} \quad (7)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1.1. Обчисліть визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\triangle \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 2$$

1.2. Обчисліть визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Згідно правила трикутника, маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0 + 6 + 1 - 6 - 2 - 0 = -1 \qquad \blacktriangle$$

1.3. Обчисліть визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Розклавши визначник по елементах 1-го рядка, одержимо

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68$$

1.4. Обчисліть попередній приклад інакше, використавши властивості визначників.

До елементів 1-го рядка додамо відповідні елементи 2-го рядка, помножені на 5, а до елементів 3-го рядка - відповідні елементи 2-го рядка, помножені на 7.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}$$

Розклавши визначник по елементах 1-го стовпця, одержимо

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 13 \cdot 34 - 17 \cdot 22 = 68$$

1.5. Обчисліть визначник

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Виконаємо такі дії: 1) до елементів 1-го рядка додамо помножені на -3 відповідні елементи 2-го рядка; 2) до елементів 3-го рядка додамо подвоєні елементи 2-го рядка; 3) до елементів 4-го рядка додамо відповідні елементи 2-го рядка, помножені на -1. Тоді вихідний визначник перетвориться до вигляду.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник по елементах 1-го стовпця, маємо

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Додамо до елементів 1-го рядка елементи 3-го рядка і віднімемо від елементів 2-го рядка елементи 3-го рядка, одержимо

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Розкладемо визначник по елементах 1-го стовпця.

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -70$$

1.6. Обчисліть визначник пʾятого порядку

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 5 & -5 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Для перетворення в нуль всіх елементів (крім одного) будь-якого рядка чи стовпця, вибираємо той рядок або стовпчик, який складається з найменших чисел. У визначнику таким буде другий стовпчик. Залишимо в ньому без змін елемент a_{22}=-1, а всі інші перетворимо в нулі. Для цього виконаємо: (Ір+(-2)* ІІр, ІІІр+3 ІІр, IVр+2 Пр).

Одержимо:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 6 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & 2 \\ -1 & 0 & -9 & -16 & 1 \\ 6 & 0 & -10 & -13 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Розкладемо визначник по елементах другого стовпця.

$$D = (-1)\begin{vmatrix} 10 & 6 & 13 & -1 \\ -1 & -9 & -16 & 1 \\ 6 & -10 & -13 & 6 \\ -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

В одержаному визначнику вже 4-го порядку з найменших елементів складається 4-ий рядок. Перетворимо в нулі всі його елементи, крім a_{42}=-1. Для цього виконаємо

($I_{ст}$+(-3)$II_{ст}$, $III_{ст}$+2 $II_{ст}$, $IV_{ст}$+3 $II_{ст}$). В результаті одержимо:

$$D = -\begin{vmatrix} -8 & 6 & 25 & 17 \\ 26 & -9 & -34 & -26 \\ 36 & -10 & -33 & -24 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Розкладемо визначник по елементах четвертого рядка

$$D = -(-1)\begin{vmatrix} -8 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -8 & 25 & 17 \\ 13 & -17 & -13 \\ 12 & -11 & -8 \end{vmatrix}$$

(Ми винесли за знак визначника спільний множник з елементів другого рядка і спільний множник з елементів третього рядка).

Для зменшення елементів цього визначника додамо перший стовпець до другого та третього:

$$D = 6\begin{vmatrix} -8 & 17 & 9 \\ 13 & -4 & 0 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\left\{(-1)^{1+3}\cdot 9\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 4\begin{vmatrix} -8 & 17 \\ 13 & -4 \end{vmatrix}\right\} = -1122$$

Останній визначник розклали по елементах третього стовпця.

1.7. Обчислити визначник n-го порядку, звівши його до трикутного вигляду:

$$D=\begin{vmatrix}5 & 3 & 3 & \dots & 3\\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3\\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5\end{vmatrix}.$$

Δ Віднімемо I рядок від усіх інших.

$$D=\begin{vmatrix}5 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3\\ -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\end{vmatrix}$$ До I стовпця додамо суму всіх інших.

$$D=\begin{vmatrix}5+3(n-1) & 3 & 3 & 3 & \dots & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\end{vmatrix}=(3n+2)2^{n-1}$$

§5 Розв'язок систем n рівнянь із n невідомими

5.1. Правило Крамера

Встановивши основні властивості і способи обчислення визначників матриць будь-якого порядку, повернемося до основної задачі - розв'язку і дослідження систем рівнянь 1-ого порядку. Почнемо вивчення цього питання із розбору того основного випадку, коли число рівнянь співпадає з числом невідомих.

Нехай задана система:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\quad(1)$$

Будемо вважати, що система (1) має *який-небудь* розв'язок і потрібно тільки знайти його. Позначимо через А основну матрицю системи.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Помножимо всі члени 1-го рівняння системи (1) на A_{11} - алгебраїчне доповнення елементу a_{11} матриці А, всі члени 2-го рівняння системи (1) на A_{21} - алгебраїчне доповнення елементу a_{21}матриці А, нарешті, всі члени n-го рівняння системи (1) на A_{n1} - алгебраїчне доповнення елементу a_{n1} матриці А. Тоді одержимо систему

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}x_1+a_{12}A_{11}x_2+\dots+a_{1n}A_{11}x_n=b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}x_1+a_{22}A_{21}x_2+\dots+a_{2n}A_{21}x_n=b_2A_{21} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}A_{n1}x_1+a_{n2}A_{n1}x_2+\dots+a_{nn}A_{n1}x_n=b_nA_{n1} \end{cases} \quad (1')$$

Додамо почленно всі рівняння системи, одержимо

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}\right)x_1+\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}\right)x_2+\dots+\left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1}\right)x_n=\sum_{i=1}^{n} b_iA_{i1}$$

Згідно теореми про алгебраїчні доповнення маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}=\det A \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}=0, \dots\dots\dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1}=0$$

Тому одержане рівняння можна переписати у вигляді $x_1 \cdot \det A=\sum_{i=1}^{n} b_iA_{i1}$

Розглянемо матрицю

$$B_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

отриману із матриці A заміною елементів 1-го стовпця стовпцем вільних членів рівнянь системи. Розкладаючи det B_1 по елементах 1-го стовпця, одержимо det $B_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1}$, а тому X_1? det A= det B_1

Аналогічно, помноживши рівняння системи (1) відповідно на A_{i2} (i=1, 2, ... n) і додаючи їх, одержимо X_2? det A=det B_2 ,

де

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Поступивши таким чином і в подальшому, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \cdot \det A = \det B_1 \\ x_2 \cdot \det A = \det B_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n \cdot \det A = \det B_n \end{cases} \quad (2)$$

де матриця B_k одержана із A заміною k-го стовпця стовпцем вільних членів. Очевидно, будь-який розв'язок системи (1) є і розв'язком системи (2).

Будемо вважати тепер, що визначник основної матриці системи не дорівнює нулю. Тоді система (2) має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \qquad i = 1,2,\dots,n \quad (3)$$

Нагадаємо, що формули (3) одержані з припущенням, що система (1) має розв'язок. Безпосередньою підстановкою знайдених значень X_i в систему (1) можливо переконатися в тому, що вони є розв'язком системи (1) і, отже, в припущенні, що $\det A \neq 0$, система (1) має розв'язок і до того ж єдиний.

Теорема (теорема Крамера): *якщо визначник основної матриці системи n рівнянь 1-го порядку з n невідомими відмінний від нуля, тоді система має єдиний розв'язок. При цьому значення кожного із невідомих дорівнює частці від ділення визначників двох матриць: в знаменнику стоїть визначник основної матриці системи, а в чисельнику визначник матриці, одержаної із основної матриці системи заміною стовпця, що відповідає вибраному невідомому, стовпцем вільних членів.*

Із цієї теореми виходить, що якщо система рівнянь однорідна, тобто вільні члени у всіх рівняннях системи дорівнюють нулю, і якщо визначник основної матриці системи відмінний від нуля, тоді система має тільки нульовий розв'язок. Дійсно, в такому випадку, матриці, визначники яких стоять в чисельнику формул (3), містять стовпець, який включає в себе лише нулі, і, отже, всі числа X_iдорівнюють нулю. Із доведеного випливає наступна теорема:

Якщо система n однорідних рівнянь 1-го порядку з n невідомими має хоча б один ненульовий розв'язок, тоді визначник основної матриці системи дорівнює нулю. Дійсно, якби цей визначник був не рівний нулю, тоді система мала б тільки нульовий розв'язок, що суперечить умові.

В подальшому ми доведемо, що рівність нулю визначника система є не тільки обов'язкова, необхідна умова існування ненульового розв'язку, але і умова, достатня для існування такого розв'язку. Інакше кажучи, якщо визначник системи однорідних рівнянь дорівнює нулю, тоді система має ненульовий розв'язок (і при цьому нескінченну множину таких розв'язків).

5.2. Розв'язок і дослідження систем рівнянь першого порядку методом повного виключення (Метод Гаусса).

Формули Крамера дають можливість, використовуючи прийом обчислення визначників, знайти числові значення розв'язку системи рівнянь у випадку, коли визначник основної матриці системи відмінний від нуля. Але практичне застосування цих формул в багатьох випадках ускладнено. Перш за все необхідно відмітити, що для знаходження розв'язків за формулами (3) необхідно обчислити n+1 визначник n-го порядку, що представляє собою досить трудомістку роботу, навіть при використанні тих прийомів, які були вказані в §4. Але найголовніше те, що у випадку, коли коефіцієнти рівняння задані наближено (в реальних задачах це буває майже завжди), похибка розв'язку може бути досить велика. Це пояснюється тим, що доданки, які входять у кожний із визначників, через які визначається розв'язок системи, можуть бути досить великі (нагадаємо, вони представляють собою добуток n співмножників - різних коефіцієнтів розширеної матриці системи), а сам визначник, що представляє собою алгебраїчну суму таких доданків, може бути малий. Навіть в тому випадку, коли коефіцієнти в системі вихідних рівнянь відомі точно, але самі обчислення ведуться з урахуванням лише заданого числа значущих цифр, ми з тих же причин зможемо одержати досить великі похибки в результаті. А тому при практичному розв'язку систем рівнянь в більшості випадків використовують не формули Крамера, а інші прийоми обчислень.

В даному курсі ми розглянемо метод повного виключення, стосовно розв'язку систем рівнянь 1-ого порядку також і в тому випадку, коли число рівнянь не співпадає з числом невідомих. Але викладення цього методу почнемо з основного випадку: коли число рівнянь співпадає з числом невідомих.

Таким чином, нехай знову задана система n рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Оскільки хоча б один із коефіцієнтів a_{i1} відмінний від нуля (інакше в систему взагалі не входило б x_1), і рівняння в системі можливо мінять місцями, тоді без будь-якого обмеження загальності можна вважати, що $a_{11} \neq 0$. Поділимо 1-ше рівняння системи на a_{11} і приведемо його до виду $x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$

де

$$a_{1k}^{(1)} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \qquad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Перемножуючи всі члени одержаного рівняння на a_{i1} і віднімаючи із *i*-го рівняння системи (1), одержимо нову систему

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \quad (2)$$

де

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1}a_{1k}^{(1)}, \qquad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_i^{(1)}$$

i=1, 2, ..., n; k=1, 2, ..., n

Оскільки рівняння системи (2) одержані як лінійні комбінації рівнянь системи (1), то будь-який розв'язок системи (1) є також і розв'язком системи (2). Разом з тим оскільки

$$a_{1k} = a_{1k}^{(1)} a_{11}, \qquad b_1 = b_1^{(1)} a_{11}, \qquad a_{ik} = a_{ik}^{(1)} + a_{i1} a_{1k}^{(1)}, \qquad b_i = b_i^{(1)} + a_{i1} b_i^{(1)},$$

то рівняння системи (1) можуть бути одержані як лінійна комбінація рівнянь системи (2). Отже будь-який розв'язок системи (2) є і розв'язком системи (1). Таким чином, система (1) і (2) рівнозначні. (Лінійною комбінацією двох рівнянь $c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n=d_1$ і, $c_{21}x_1+c_{22}x_2+...+c_{2n}x_n=d_2$ будемо називати рівняння

$\lambda_1(c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n)+\lambda_2(c_{21}x_1+c_{22}x_2+...+c_{2n}x_n)=\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2$, де λ_1 та λ_2 - числа)

Порівняємо тепер визначники D_1 і D_2 основних матриць систем (1) і (2). Перший рядок основної матриці системи (2) одержаний із першого рядка основної матриці системи (1) діленням на a_{11}. Така операція відповідає діленню D_1 на a_{11}. Інші рядки одержані відніманням із відповідних рядків основної матриці системи (1) величин, пропорційних першому рядку. Ця операція не змінює величини визначника. Звідси виходить, що визначник D_2 основної матриці системи (2) дорівнює $\frac{D_1}{a_{11}}$. А тому D_2? 0, якщо D_1? 0 і $D_2=0$, якщо $D_1=0$. Відмітимо, нарешті, що обчислення ми проводили тільки з коефіцієнтами рівнянь системи (1), тому немає необхідності писати самі рівняння. Достатньо написати лише розширену матрицю системи і перетворити тільки елементи цієї матриці.

Будемо позначати перехід від однієї розширеної матриці до другої, тобто фактично перехід від однієї системи рівнянь до системи, їй рівнозначної, символом Y або ~. Тоді проведені операції можна записати так:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & b_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} = B_2$$

Будемо вважати спочатку, що визначник D_1 основної матриці системи (1) відмінний від нуля. Тоді, як сказано вище, $D_2 \neq 0$, а тому в крайньому випадку одне з чисел $a_{i2}^{(1)}$ (i=1, 2, ..., n) відмінне від нуля, оскільки, якби всі $a_{i2}^{(1)}$

дорівнювали нулю, дорівнював би нулю і визначник D_2 основної матриці системи (2).

Оскільки рівняння в системі (2) можна міняти місцями, тому, без обмеження, можна вважати, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Поділимо 2-е рівняння системи (2) на $a_{22}^{(1)}$, помножимо $a_{22}^{(1)}$ одержаний рядок на $a_{i2}^{(1)}$ (i=1, 3, 4, ..., n) і віднімемо від i-го рядка.

Тоді будемо мати

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Система рівнянь, що відповідає матриці B_3, рівнозначна системі (2), а тому і вихідній системі (1). Визначник D_3 основної матриці цієї системи відмінний від нуля, оскільки відмінний від нуля визначник D_2. Звідси, в крайньому випадку одне із чисел $a_{i3}^{(2)}$ (i=3, ..., n) відмінне від нуля і можна знову провести ті ж операції, що і раніше. Продовжуючи аналогічні міркування, після n операцій одержимо матрицю

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Відповідна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_1^{(n)} \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \quad (3),$$

її єдиним розв'язком є $x_1 = b_1^{(n)}, \quad x_2 = b_2^{(n)}, \quad \dots \quad x_n = b_n^{(n)}$ (4)

Оскільки система (3) рівнозначна системі (1), має єдиний розв’язок, то має єдиний розв'язок, що визначається формулами (4), і вихідна система(1).

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -17 & 12 & 24 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -17 & 12 & 24 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -44 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=0$; $x_4=2$

Відмітимо, якщо система однорідна, тобто всі числа b_i ($i=1, 2, ..., n$) дорівнюють нулю, тоді дорівнюють нулю і всі числа $b_i^{(n)}$. Тому система (1) має в цьому випадку тільки нульовий розв'язок.

Нехай тепер визначник D_1 основної матриці системи (1) дорівнює нулю. Тоді вже не можна стверджувати, що серед чисел $a_{im}^{(m-1)}$ ($i=m, m+1, ..., n$), одержаних після (m-1)-го етапу перетворень, буде хоча б одне, відмінне від нуля. Більше того, на якомусь етапі всі ці числа обов'язково стануть рівними нулю (інакше ми мали б розібраний випадок). Таким чином, нехай одержана матриця

$$B_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1m}^{(m-1)} & a_{1(m+1)}^{(m-1)} & \dots & a_{1n}^{(m-1)} & b_1^{(m-1)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2m}^{(m-1)} & a_{2(m+1)}^{(m-1)} & \dots & a_{2n}^{(m-1)} & b_2^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m(m+1)}^{(m-1)} & \dots & a_{mn}^{(m-1)} & b_m^{(m-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n(m+1)}^{(m-1)} & \dots & a_{nn}^{(m-1)} & b_n^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

Переставимо m-ий стовпець матриці на місце n-го, а всі наступні за m-м стовпцем, крім стовпця вільних членів $b_i^{(m-1)}$ зсунемо на одне місце вліво (така операція, очевидно, означає перестановку невідомих в рівняннях системи або їх перенумерацію, що, звичайно, не змінює розв'язку системи). В результаті одержимо матрицю

$$B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1m}^{(m)} & \dots & a_{1n}^{(m)} & b_1^{(m)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2m}^{(m)} & \dots & a_{2n}^{(m)} & b_2^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm}^{(m)} & \dots & 0 & b_m^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm}^{(m)} & \dots & 0 & b_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

де

$a_{in}^{(m)} = a_{im}^{(m-1)}, \quad b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)}$, i=1, 2, ..., n;

$a_{i(k+1)}^{(m-1)} = a_{ik}^{(m)}$, k=m, m+1, ..., n.

Продовжуючи ті ж перетворення, що раніше, одержимо в кінцевому рахунку матрицю

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(k+1)}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(k+1)}^{(n)} & \dots & a_{2n}^{(n1)} & b_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k(k+1)}^{(n)} & \dots & a_{kn}^{(n)} & b_k^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Матриці (5) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1' + 0 \cdot x_2' + \dots + 0 \cdot x_k' + a_{1(k+1)}^{(n)} \cdot x_{k+1}' + \dots + a_{1n}^{(n)} \cdot x_n' = b_1^{(n)} \\ 0 \cdot x_1' + 1 \cdot x_2' + \dots + 0 \cdot x_k' + a_{2(k+1)}^{(n)} \cdot x_{k+1}' + \dots + a_{2n}^{(n)} \cdot x_n' = b_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_1' + 0 \cdot x_2' + \dots + 1 \cdot x_k' + a_{k(k+1)}^{(n)} \cdot x_{k+1}' + \dots + a_{kn}^{(n)} \cdot x_n' = b_k^{(n)} \\ 0 \cdot x_1' + 0 \cdot x_2' + \dots + 0 \cdot x_k' + 0 \cdot x_{k+1}' + \dots + 0 \cdot x_n' = b_{k+1}^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_1' + 0 \cdot x_2' + \dots + 0 \cdot x_k' + 0 \cdot x_{k+1}' + \dots + 0 \cdot x_n' = b_n^{(n)} \end{cases} \quad (6)$$

в якій невідомі x_i' відрізняються від невідомих x_i в системі (1) лише нумерацією. Оскільки система (6) рівнозначна системі (1), тоді висновок про розв'язність системи (1) рівносильний висновку про розв'язність системи (6).

Очевидно, що якщо хоча б одне із чисел $b_i^{(n)}$ (i=k+1, ..., n) не дорівнює нулю, тоді рівняння системи (6), а тому і рівняння системи (1), несумісні. Якщо є всі $b_i^{(n)}$ (i=k+1, ..., n) дорівнюють нулю, тоді рівняння сумісні. При цьому невідомим $x_{k+1}', \dots \ x_n'$ можна надати будь-які значення, і система має такі розв'язки:

$$x_1' = b_1^{(n)} - (a_{1(k+1)}^{(n)} t_1 + \ldots + a_{1n}^{(n)} t_e),$$
$$x_2' = b_2^{(n)} - (a_{2(k+1)}^{(n)} t_1 + \ldots + a_{2n}^{(n)} t_e),$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$x_k' = b_k^{(n)} - (a_{k(k+1)}^{(n)} t_1 + \ldots + a_{kn}^{(n)} t_e),$$
$$x_{k+1}' = t_1, \quad x_{k+2}' = t_2, \ldots \quad x_n' = t_e,$$

де $t_1, t_2, \ldots, t_e$ (ℓ =n-k) довільні

Для того, щоб було зручно повертатися до вихідної системи невідомих, корисно над стовпцями матриць, які одержуються при проведенні перетворень, надписувати позначення відповідних невідомих. Вкажемо, крім того, що якщо вихідна система (1) однорідна, тоді всі числа $b_i^{(n)}$ (i=1, 2, ..., n) дорівнюють нулю. Тому мають місце такі два твердження.

1. Система однорідних рівнянь 1-ого порядку завжди сумісна.

2. Якщо визначник системи однорідних рівнянь 1-ого порядку дорівнює нулю, тоді система має нескінченну множину розв 'язків.

Приклад 2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 1 & 3 & -2 & -7 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & -5 & 6 & 5 & 5\\ 0 & -3 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 8 & -7\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 6 & -20 & 20\\ 0 & 0 & 3 & -10 & 10\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 8 & -7\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3}\\ 0 & 0 & 3 & -10 & 10\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Система рівнянь, що відповідає одержаній матриці, має вигляд:

$$\begin{cases}1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+\frac{4}{3}x_4=-\frac{1}{3}\\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3-5x_4=3\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3-\frac{10}{3}x_4=\frac{10}{3}\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0\end{cases}$$

Система сумісна, x_4=t довільно. Система має нескінченну множину розв`язків

$$x_1=-\frac{1}{3}(1+4t)$$
$$x_2=3+5t$$
$$x_3=\frac{10}{3}(1+t)$$
$$x_4=t$$

причому t - довільне число.

Відмітимо, що якби вільні члени в рівняннях були іншими, ніж задано в умові, система могла б бути несумісною. Нехай, наприклад, b_4=1. Тоді перетворена матриця система буде

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

і останнє рівняння системи набуде такого вигляду 0? x_1+0? x_2+0? x_3+0? x_4=1, що не має змісту.

Приклад 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$$

Розв`язок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & -22 \end{pmatrix} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & -22 \end{pmatrix} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Система сумісна, x_2=t довільно; x_1=1-t, x_2=t, x_3=-2, x_4=1.

Розібраний метод без будь-яких змін переноситься і на той випадок, коли число невідомих не співпадає з числом рівнянь.

II. Приклади розв`язку задач

1.20. Розв`язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 - 5x_2 = 40 \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) - 4\cdot 2 = -15 - 8 = -23$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, застосуємо правило Крамера.

Для обчислення визначника $\det B_1$ замінимо стовпець $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ визначника системи стовпцем з вільних членів $\begin{pmatrix} 7 \\ 40 \end{pmatrix}$. Маємо

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 40 & -5 \end{vmatrix} = 7(-5) - 40\cdot 2 = -35 - 80 = -115$$

Визначник $\det B_2$ одержимо заміною стовпця $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ визначника системи стовпцем із вільних членів:

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 40 \end{vmatrix} = 92$$

Згідно правила Крамера знаходимо $x_1 = \dfrac{-115}{-23} = 5$; $x_2 = \dfrac{92}{-23} = -4$

Сукупність чисел (5;-4) являється єдиним розв`язком даної системи.

1.21. Знайти розв`язки системи

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases}$$

Визначник з коефіцієнтів системи відмінний від нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot(-5)+5\cdot(-9)\cdot2+(-8)\cdot4\cdot3-(-8)\cdot3\cdot2-5\cdot4\cdot(-5)-2\cdot3\cdot(-9)=-14\neq0$$

Тому можна застосувати правило Крамера

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -8 \\ 9 & 3 & -9 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -42; \qquad \det B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -8 \\ 4 & 9 & -9 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -28$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

звідси знаходимо $x_1 = \dfrac{-42}{-14} = 3$; $x_2 = \dfrac{-28}{-14} = 2$; $x_2 = \dfrac{-14}{-14} = 1$

Сукупність чисел (3, 2, 1) являється єдиним розв`язком системи.

1.22. Розв`язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 \qquad + 21x_3 + 13x_4 = 3 \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & 3 \end{pmatrix} \text{/IVp+II-I-III/} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Неважко бачити, що визначник з коефіцієнтів системи дорівнює нулю, оскільки 4-ий рядок його складається з нулів. Останній рядок розширеної матриці свідчить про те, що система не сумісна.

1.23. Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & .. & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & .. & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & .. & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & .. & 0 \end{pmatrix}$$ /IIр.-2·I, IIIр.-I, IVр.-II-III/ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & .. & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & .. & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & .. & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & .. & -3 \end{pmatrix} \sim$

/поділимо IIIр. на (-3), IVр. на (-3)/

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & .. & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & .. & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & .. & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$ /IIIр.+2·II/ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & .. & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & .. & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & .. & 1 \end{pmatrix}$

В результаті всіх перетворень дана система лінійних рівнянь звелася до трикутного виду.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_3 = 0 \\ \quad - x_2 - 4x_4 - 5x_3 = 1 \\ \qquad -8x_4 - 7x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Вона має єдиний розв`язок.

$x_3=1$ $x_4=-1$ $x_2=-2$ $x_1=2$ ^

1.24.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

Δ

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\1&4&5&2&2\\2&9&8&3&7\\3&7&7&2&12\\5&7&9&2&20\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&2&2&1&-1\\0&5&2&1&1\\0&1&-2&-1&3\\0&-3&-6&-3&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1&3\\0&1&-2&-1&3\\0&2&2&1&-1\\0&5&2&1&1\\0&-3&-6&-3&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&7&3&-3\\0&1&-2&-1&3\\0&0&6&3&-7\\0&0&12&6&-14\\0&0&-12&-6&14\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{31}{6}\\0&1&0&0&\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{7}{6}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Рівняння сумісні, $x_4=t$ довільно, $x_1=\frac{1}{2}t+\frac{31}{6},\quad x_2=\frac{2}{3},\quad x_3=-\frac{1}{2}t-\frac{7}{6},\quad x_4=t$

1.25. Знайти розв'язки системи

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=1\\x_1+3x_2-x_3+2x_4=-4\\2x_1+x_2-x_3+x_4=-1\end{cases}$$

Δ

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1&1\\1&3&-1&2&-4\\2&1&-1&1&-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&-1&1\\0&1&-2&3&-5\\0&-3&-3&3&-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&5&-7&11\\0&1&-2&3&-5\\0&0&-9&12&-18\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&5&-7&11\\0&1&-2&3&-5\\0&0&1&-\frac{4}{3}&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&1\\0&1&0&\frac{1}{3}&-1\\0&0&1&-\frac{4}{3}&2\end{pmatrix}$$

Система сумісна, $x_4=t$ довільно, $x_1=\frac{1}{3}t+1,\quad x_2=-\frac{1}{3}t-1,\quad x_3=\frac{4}{3}t+2,\quad x_4=t$

1.26. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Δ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & -11 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Система сумісна, x_4=t довільно, x_1=t, x_2=-2t, x_3=0, x_4=t.

§ 6 Ранг матриці, теорема про сумісність систем рівнянь першого порядку

Для дослідження багатьох питань, пов`язаних з розв’язком систем рівнянь 1-ого порядку, часто вводять поняття *ранг матриці.*

Визначення. *Рангом матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля визначника квадратної субматриці, отриманої із заданої матриці викреслюванням деяких рядків і стовпців.*

Розглянемо, наприклад, матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Викресленням будь-якого числа рядків і стовпців неможливо із заданої матриці одержати квадратну матрицю порядку вище 3-го. Звідси, ранг її не може бути більше трьох. Але, викреслюючи один із стовпців, ми будемо одержувати квадратні матриці, які мають два однакових рядка, а тому їх визначники дорівнюють нулю. Звідси, ранг вихідної матриці менше 3-х. Викресливши, наприклад, 3-й і 4-й стовпець і 3-й рядок, одержимо квадратну матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, визначник якої не дорівнює нулю. Таким чином, всі визначники субматриці 3-го порядку дорівнюють нулю, але серед визначників матриць 2-го порядку є відмінний від нуля. Тим самим ранг вихідної матриці дорівнює двом.

Доведемо теорему: *ранг матриці не змінюється при лінійних операціях з її рядками.*

Дійсно, лінійні операції з рядками якої-небудь матриці приводять до тих же лінійних операцій з рядками будь-якої субматриці. Але, як вказано вище, при лінійних операціях з рядками квадратних матриць визначники цих матриць одержуються один із другого множенням на число, відмінне від нуля. Звідси, нульовий визначник залишається нульовим, а відмінний від нуля - відмінним від нуля, тобто не може змінитися найвищий порядок відмінного від нуля визначника субматриць. Не впливає, очевидно, на ранг матриці і перестановка стовпців, оскільки така перестановка може впливати лише на знак відповідних визначників.

Із доведеної теореми виходить, що розглянуті в минулому параграфі перетворені матриці мають той же ранг, що і вихідні. Тому ранг основної матриці системи рівнянь першого порядку дорівнює числу одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці.

Доведемо тепер теорему про сумісність систем рівнянь 1-ого порядку (теорема Кронекера-Капеллі): *для того щоб система рівнянь 1-ого порядку була сумісна, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці співпадав з рангом основної матриці.*

Нехай ранг основної матриці системи дорівнює k. Якщо ранг розширеної матриці системи також дорівнює k, тоді це означає, що або система містить тільки k рівнянь, або - всі числа $b_i^{(n)}$ (i= k+1, ..., k) в перетвореній матриці дорівнюють нулю (в противному випадку ранг розширеної матриці перетвореної, а тому і вихідної системи був би k +1)

Нехай ранг перетвореної (а тому і вихідної) розширеної матриці системи більше k, тобто більше, ніж число одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці. Тоді існує хоча б одна субматриця (k+1)-го порядку, визначник якої не дорівнює нулю. Така субматриця може бути одержана тільки додаванням до одиничної матриці порядку k (що знаходиться в лівому верхньому куту перетвореної матриці) якого-небудь одного рядка і стовпця, який складається із перших k вільних членів рівнянь перетвореної системи і будь-якого одного вільного члена із наступних n-k рівнянь. Щоб визначник вказаної субматриці був відмінний від нуля, відмінним від нуля повинен бути і цей останній доданий елемент, тобто число $b_i^{(n)}$ (i=k+1, ..., k). Але, як було доведено раніше, в цьому випадку **(при $b_i^{(n)} \neq 0$)** система несумісна. Отже, система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці співпадає з рангом розширеної матриці.

II. Приклади розв`язку задач

1.39. Обчислити ранг матриці з допомогою елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} IIIp - 2 \cdot I, II\,cm : 2, \text{Icт} - 3 \cdot \text{II}, \text{IIIcI} - \text{II}, \text{IVcт} - 2 \cdot \text{II} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$ де

знак $\Rightarrow$ вказує, що з`єднані ним матриці одержуються одна із другої елементарними перетвореннями, а тому мають один і той же ранг.

Додамо далі до IIIр+3∗ II, Iст:2, додаючи його до IIIст і віднімаючи із Ivст, і переставивши, нарешті, місцями перші два стовпця, будемо мати

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці А дорівнює 2, тобто r=2.

1.40. За допомогою елементарних перетворень обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \mid IIp - 3 \cdot I, IIIp - II, IVp - I \mid \Rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mid IVp \text{ відкинемо, оскільки } IV = II + III \mid \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

r=3**,** бо визначник трикутної матриці з перших трьох стовпців не дорівнює нулю.
^

Обчислення рангу матриці методом облямування

Вибираємо в даній матриці мінор другого порядку, відмінний від нуля. Потім обчислюємо мінори третього порядку, які облямовують (містять в собі) вибраний, поки не знайдемо серед них відмінного від нуля. Далі обчислюємо мінори четвертого порядку, які облямовують відмінний від нуля мінор ІІІ-го порядку, поки не знайдемо серед них відмінний від нуля, і т.д. Якщо знайшли відмінний від нуля мінор r-го порядку, а всі облямовуючі його мінори (r+1)-го порядку дорівнюють нулю або їх вже нема, то ранг матриці дорівнює r.

1.41. Обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{7} \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Викреслили ІІІр., оскільки 2· ІІр.+І є ІІІр.

Виберемо, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Обчислимо мінори ІІІ-го порядку, які облямовують його

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & -3\\ 7 & 7 & 9\end{vmatrix} = |\text{IIст.} - 3\cdot \text{I}, \text{IIIст.} - 5\cdot \text{I}| \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -7 & -13\\ 7 & -14 & -26\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7 & 13\\ 14 & 26\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 4\\ 7 & 7 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$ мінор III-го порядку відмінний від нуля.

Він міститься у визначнику IV порядку заданої матриці, який дорівнює нулю. Отже, r=3. ^

1.42. Розв`язати системи рівнянь

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2\\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2\\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4\\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4\\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4\\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4\\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6 \end{cases}$$

а) Тут r(A)=3, r(B)=3; система сумісна, визначена.

Оскільки $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix} = 14 = 0$

тоді із перших трьох систем, наприклад, згідно формул Крамера знаходимо

x_1=-1, x_2=0, x_3=1

b) Тут r(A)=2, r(B)=2; система сумісна, але не визначена.

Визначник $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$

і із перших двох рівнянь системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

Знаходимо

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4, \qquad x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4,$$

де невідомим x_3 і x_4 можна надавати будь-які значення.

в) в цьому випадку r(A)=2, r(B)=3; і система несумісна.

1.43. Методом Гаусса (послідовного виключення невідомих) розв`язати однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

і знайти її фундаментальну систему розв`язків.

Випишемо розширену матрицю системи (при цьому нульовий стовпець можна, звичайно, не писати). Після зрозумілих перетворень будемо мати

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -19 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто задана система рівнозначна наступній:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0 \\ \qquad\qquad -x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Тут r=3, і три невідомих можна виразити через останні, наприклад, так:

$x_4=x_5$

$x_2=-2x_3-3x_4-9x_5=-2x_3-12x_5$

$x_1=-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5=x_3+15x_5$

Фундаментальну систему можна одержати, якщо вільним невідомим x_3, x_5 надавати значення $x_3=1$, $x_5=0$ (тоді $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_4=0$) і значення $x_3=0$, $x_5=1$ (тоді $x_1=15$, $x_2=-12$, $x_4=1$). Це дає фундаментальну систему розв`язків:

$e_1=(1, -2, 1, 0, 0)$, $e_2=(15, -12, 0, 1, 1)$

З використанням фундаментальної системи часто записують загальний розв`язок у вигляді лінійної комбінації розв'язків e_1 та e_2, тобто:

$e=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2=(\alpha_1+15\alpha_2,\ \ -2\alpha_1-12\alpha_2,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_2, \alpha_3)$

1.44. Знайти фундаментальну систему розв`язків системи лінійних рівнянь та записати її загальний розв`язок

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-7x_3+3x_4=0\\2x_1-3x_2-3x_3+5x_4=0\\2x_1+9x_2-11x_3+x_4=0\\4x_1+6x_2-14x_3+6x_4=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&-7&3\\2&-3&-3&5\\2&9&-11&1\\4&6&-14&6\end{pmatrix}\Rightarrow$$

IVр. відкинемо (пропорційно до I),

або IVр.=II+III, IIр.-I, IIIр.-I

$$\begin{pmatrix}2&3&-7&3\\0&-6&4&2\\0&6&-4&-2\end{pmatrix}$$

Третій рядок відкинемо. Система звелась до драбинчастої з головними невідомими x_1, x_2 і вільними x_3, x_4:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=7x_3-3x_4\\ \quad\ -6x_2=-4x_3-2x_4\end{cases}$$

З останнього рівняння $x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$. З першого $x_1 = \frac{1}{2}(5x_3 - 4x_4) = \frac{5}{2}x_3 - 2x_4$

Вільних невідомих 2. Тому беремо визначник ІІ порядку з одиничними елементами головної діагоналі і нульовими - побічної: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Будемо вважати $x_3=1$, $x_4=0$. Тоді $x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$

Одержимо вектор $e_1 = (\frac{5}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 1, \quad 0)$

Далі будемо вважати $x_3=0$, $x_4=1$. Одержимо вектор $e_2 = (-2, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad 1)$

Вектори e_1 і e_2 являють собою фундаментальну систему розв`язків.

Тепер загальний розв`язок можна записати у вигляді

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (\frac{5}{2}\alpha_1 - 2\alpha_2, \ \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \ \alpha_1, \ \alpha_2)$$

Надаючи коефіцієнтам α_1, α_2 будь-які (довільні) числові значення будемо одержувати різноманітні частинні розв`язки.

1.45.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{/від усіх рядків віднімемо IV/} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

II, III, V рядки, які пропорційні до I-го, викреслимо. В одержаній матриці переставимо I і II стовпці:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Ранг матриці дорівнює 2.

Головні невідомі x_2 і x_1. Вільні - x_3, x_4, x_5. Система тепер має вигляд:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_3 + x_4 - 2x_5 \\ x_1 = x_3 - 2x_4 + x_5 \end{cases}$$

Надаючи вільним невідомим послідовно значення, що дорівнюють елементам стовпців визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1) $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=0$; 2) $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=0$; 3) $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=1$

одержимо:

1) $x_2=1$, $x_1=1$; 2) $x_2=1$, $x_1=-2$; 3) $x_2=-2$, $x_1=1$

тобто вектори $C_1=(1, 2, 1, 0, 0)$

$C_2=(-2, 1, 0, 1, 0)$

$C_3=(1, -2, 0, 0, 1)$

складають фундаментальну систему розв`язків. Загальний розв`язок системи тепер залишиться.

$c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 = (\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3,\ \ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \alpha_3)$

1.46.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$$ має ранг r=2 (перевірте).

Виберемо за базисний мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Тоді вкорочена система має вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

Звідки, вважаючи $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $x_5=c_3$, знаходимо

$$x_1 = -\frac{19}{8}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3$$
$$x_2 = -\frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3$$

Загальний розв`язок системи

$$e=\begin{pmatrix} -\frac{19}{8}c_1 & -\frac{3}{8}c_2 & +\frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{7}{8}c_1 & +\frac{25}{8}c_2 & -\frac{1}{2}c_3 \\ & c_1 & \\ & c_2 & \\ & c_3 & \end{pmatrix}$$

Із загального розв`язку знаходимо фундаментальну систему розв`язків

$$e_1(1,0,0)=\begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2(0,1,0)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_3(0,0,1)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

З використанням фундаментальної системи загальний розв`язок може бути записаний

$e=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$

§ 7 Основні операції з матрицями

В попередньому параграфі широко застосовувались лінійні операції з рядками і стовпцями різних матриць. Але в деяких питаннях лінійної алгебри доводиться розглядати операції з матрицями як з єдиним об`єктом.

В основі вивчення операцій з матрицями лежить поняття рівності матриць. Будемо виходити з такого **визначення**: *дві матриці однієї і тієї ж розмірності називаються рівними, якщо рівні всі їх відповідні елементи.*

Отже, матриці A і B однієї і тієї ж розмірності $n_x m$ рівні тоді і тільки тоді, коли $A_{ik}=B_{ik}$ i=1, 2,..., n; k=1, 2,..., m. При цьому ще раз підкреслимо, що порівнювати можна лише матриці однієї і тієї ж розмірності.

Сумою двох матриць A і B однієї і тієї ж розмірності $n_x m$ називається матриця C тієї ж розмірності така, що

$(C)_{ik}=(A)_{ik}+(B)_{ik}$ (1)

Отже, при додаванні матриць (додавати можна тільки матриці однієї і тієї ж розмірності) треба складати всі їх відповідні елементи.

Оскільки додавання матриць зводиться до додавання чисел - елементів цих матриць, очевидно, має місце комутативна і асоціативна властивість.

A+B=B+A; (A+B)+C=A+(B+C) (2)

Добутком матриці A на число λ (або числа λ на матрицю A) називається матриця B така, що

$(B)_{ik}=\lambda\ (A)_{ik}$ (3),

тобто при множенні матриці на число (або числа на матрицю) необхідно всі елементи матриці помножити на це число. Нагадаємо, що при множенні на число визначника матриці достатньо було помножити на це число лише елементи будь-якого рядка (або стовпця).

Легко перевірити, що при множенні матриці на число має місце розподільча властивість:

$\lambda\ (A+B)=\lambda\ A+\lambda\ B;\ (\lambda\ +\eta\ )=\lambda\ A+\eta\ B$ (4)

Визначимо тепер добуток двох матриць. Нехай дана матриця A розмірності $n_x m$ і матриця B розмірності $m_x p$.

Визначення. Добутком матриці A розмірності nxm на матрицю B розмірності mxp називається матриця C розмірності $n_x p$ така, що

$$(C)_{ik} = \sum_{i=1}^{m} (A)_{ie} (B)_{ek} \quad (5),$$

інакше кажучи, для одержання елементу, що знаходиться в i-ому рядку і в k-ому стовпцю матриці добутку, потрібно обчислити суму добутків елементів i-го рядка першого множника і відповідних елементів k-го стовпця другого множника. Отже, для того щоб можливо було скласти вказану суму, потрібна рівність числа стовпців в першій матриці (тобто число елементів в кожному рядку) числу рядків у другій (тобто числу елементів в кожному стовпці).

Приклад 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Знайти А∗ В

Розв`язок. Матриця А має розмірність 3х2, матриця В 2х2; добуток існує - це матриця розмірності 3х2.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 2\\ 2\cdot 2+0(-1) & 2\cdot 1+0\cdot 2\\ -1\cdot 2+1(-1) & (-1)\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

Добуток матриць не має переставної властивості: А∗ В, взагалі кажучи, не дорівнює В∗ А.

По-перше, із того, що можна обчислити А∗ В, зовсім не виходить, що має зміст В∗ А. Наприклад, в тільки що розібраному прикладі перестановка множників, тобто множення В на А неможливе оскільки не можна матрицю розмірності 2х2 помножити на матрицю розмірністю 3х2 - число стовпців першої матриці тут не дорівнює числу рядків другої. Але навіть якщо добуток В∗ А існує, то нерідко $AB \neq BA$. Розглянемо приклад.

Нехай $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Тоді

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot 2+3(-1) & 1\cdot 1+3\cdot 0\\ -1\cdot 2+2(-1) & -1\cdot 1+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\cdot 1+1(-1) & 2\cdot 3+1\cdot 2\\ -1\cdot 1+0(-1) & -1\cdot 3+0\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

Отже $AB \neq BA$

Разом з тим можливо довести (таке доведення ми рекомендуємо провести читачу), що

(А∗ В)∗ С=А(В∗ С) (6)

A∗ (B+C)=AB+AC

(звичайно приймається до уваги, що всі ці добутки мають зміст).

У відповідності із визначенням добутку матриць завжди можливо множення квадратних матриць одного порядку, при цьому добуток буде матрицею того ж порядку. Відмітимо без доведення одну із властивостей добутку квадратних матриць одного порядку: ***визначник добутку двох матриць одного і того ж порядку дорівнює добутку визначників матриць, що перемножуються.***

Дуже часто доводиться розглядати добуток матриці розмірності nxm на матрицю розмірності mx1, тобто на матрицю з одним стовпцем. Очевидно, ми повинні одержати в результаті матрицю розмірності nx1, тобто також матрицю з одним стовпцем. Нехай, наприклад, необхідно помножити матрицю

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ на матрицю $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

В результаті одержимо матрицю $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, елементи якої обчислюються за формулами:

$$b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}x_k$$

$$b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{2k}x_k$$

…………………………………………………

$$b_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k$$

Але це означає, що систему рівнянь 1-ого порядку, розглянуту в попередньому параграфі, можна записати в дуже зручній матричній формі: AX=B.

Суттєву роль в різних застосуваннях матричної алгебри відіграє квадратна матриця, у якої всі діагональні елементи (тобто елементи, які знаходяться на головній діагоналі) дорівнюють 1, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Така матриця називається одиничною матрицею. Очевидно, що визначник одиничної матриці

$$\det E = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Характерні наступні властивості одиничної матриці: нехай задана квадратна матриця А порядку n і Е-одинична матриця того ж порядку. Тоді АЕ=ЕА=А.

Дійсно $(AE)_{ik} = \sum_{e=1}^{n} (A)_{ie}(E)_{ek}$ але $(E)_{ek} = \begin{cases} 0 & e \neq k \\ 1 & e = k \end{cases}$

Тому в сумі $\sum_{e=1}^{n} (A)_{ie}(E)_{ek}$ відмінні від нуля тільки ті складові, для яких e=k. Отже, $(AE)_{ік}=(A)_{ік}$, і звідси АЕ=А. Аналогічно одержуємо і для добутку ЕА.

Приклади розв\`язку задач

1.61. Знайти добуток А∗ В та В∗ А двох матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добуток А∗ В не існує, бо число стовпців матриці А не дорівнює числу рядків матриці В. Число стовпців матриці В дорівнює числу рядків матриці А. Отже існує добуток В? А:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3 + 3(-2) & 4(-1) + 2\cdot 0 + 1\cdot 4 + 3\cdot 5 & 4\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1(-3) + 3\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 2(-2) & (-1)(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 4 + 2\cdot 5 & (-1)2 + 1\cdot 4 + 0(-3) + 2\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 15 & 13 \\ -2 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

1.62. Знайти матрицю 2A+5B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 5B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A + 5B = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 34 \\ 14 & 13 & -10 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

§ 8 Обернена матриця, розв`язок матричних рівнянь

При розгляді дій з матрицями не вводиться операція ділення. Але можливо ввести поняття, яке дозволяє дати деякий еквівалент цій дії.

Визначення. *Квадратна матриця В називається оберненою квадратній матриці А, якщо добуток А· В є одинична матриця.*

Доведемо, що для будь-якої квадратної матриці А, визначник якої відмінний від нуля, існує одна і тільки одна обернена матриця, і приведемо спосіб її обчислення.

Нехай задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ і } \det A \neq 0$$

Нехай

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

є шукана матриця і $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця того ж порядку n**.**

Згідно умови A· B=E, тому для визначення n^2 елементів $b_{ік}$ матриці B ми маємо n систем рівнянь першого порядку, кожна з яких містить n рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \dots + a_{nn}b_{n2} = 0 \end{cases}$$

Такі системи мають одну і ту ж основну матрицю A.

Згідно припущення $\det A \neq 0$, тому кожна система має єдиний розв`язок, який можливо обчислити за формулами Крамера. Оскільки в правій частині в кожній системі тільки один елемент дорівнює одиниці, а всі інші дорівнюють нулю, тоді

$$b_{11} = \frac{A_{11}}{\det A}, \quad b_{21} = \frac{A_{12}}{\det A}, \quad \dots\dots, \quad b_{n1} = \frac{A_{1n}}{\det A},$$

$$b_{12} = \frac{A_{21}}{\det A}, \quad b_{22} = \frac{A_{22}}{\det A}, \quad \dots\dots, \quad b_{n2} = \frac{A_{n2}}{\det A}$$

і взагалі $b_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A}$, i,k=1,2,...,n.

Отже, матриця B, обернена матриці A, яка позначається частіше символом A^{-1}, має вигляд

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Раніше було вказано, що взагалі кажучи, для довільних матриць A і B $A \cdot B \neq BA$. Але можливо довести, що $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$.

Дійсно $\left(A^{-1} \cdot A\right)_{ik} = \sum_{e=1}^{n} (A^{-1})_{ie} \cdot (A)_{ek} = \sum_{e=1}^{n} \frac{A_{ie}}{\det A} a_{ek} = \frac{1}{\det A} \sum_{e=1}^{n} a_{ek} A_{ei}$

Але сума добутків елементів будь-якого рядка матриці на алгебраїчне доповнення відповідних елементів другого рядка дорівнює нулю, а сума добутків елементів будь-якого рядка матриці на відповідні алгебраїчні доповнення елементів того ж рядка дорівнює самому визначнику.

Тому $(A^{-1} \cdot A)_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$

і отже, $A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$

Поняття "обернена матриця" може бути використано для розв`язку матричних рівнянь.

Нехай, наприклад, задане рівняння AX=B, де A і B - задані квадратні матриці порядку n, а X - шукана квадратна матриця того ж порядку. Нехай $\det A \neq 0$. Тоді обчислюємо матрицю A^{-1} і помножимо ліву і праву частини заданого рівняння зліва на A^{-1}:

$A^{-1} * (A * X) = A^{-1} * B$

Оскільки

$A^{-1}*(A*X)=(A^{-1}*A)*X$

(згідно асоціативної властивості множення матриць), тоді

$A^{-1}*(A*X)=E*X=X$

і одержуємо

$X=A^{-1}*B$

Для обчислення матриці A^{-1} **,** оберненої матриці А, можливо, звичайно, використати формули (1). Але, як правило, значно вигідніше використати для цього метод повного виключення. Це доцільно ще і тому, що всі n систем рівнянь, які служать для визначення стовпців матриці A^{-1} , відрізняються тільки правими частинами. Тому процес перетворення розширених матриць цих систем можна проводити одночасно для всіх матриць.

6. Як розв`язується система лінійних рівнянь у матричному вигляді з використанням оберненої матриці?

II. Приклади розв`язку задач

1.67. Знайти матрицю, обернену матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Розглянемо матрицю

$$B^*=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Перші три стовпці цієї матриці - стовпці заданої матриці А, наступні три стовпці, відділені рискою і складають разом одиничну матрицю, - стовпці вільних членів для систем рівнянь, які визначають елементи оберненої матриці.

Проводимо звичайні операції методу повного виключення:

$$B^* \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Матриця, відокремлена рискою, і є шукана, оскільки кожний її стовпець є розв`язком відповідної системи рівнянь, тобто

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1.68. Знайти матрицю, обернену матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Розглянемо матрицю

$$B^* = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & -2 & -1 & -6 \\ -11 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Другий спосіб знаходження оберненої матриці.

1.69. Знайти обернену A^{-1} матрицю до матриці A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = / Ip + (III - II) / \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Матриця A неособлива, оскільки

detA=-1≠0.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24$$

Згідно формули (1) записуємо A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

1.70. Знайти матрицю обернену до даної

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Запишемо обернену матрицю у вигляді

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Згідно правила множення матриць одержимо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 & \beta_1 + 2\beta_3 & \gamma_1 + 2\gamma_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 & -\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & \beta_2 - \beta_3 & \gamma_2 - \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для знаходження елементів матриці A^{-1} запишемо системи

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0\end{cases} \begin{cases}\beta_1 + 2\beta_3 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 1 \\ \beta_2 - \beta_3 = 0\end{cases} \begin{cases}\gamma_1 + 2\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \\ \gamma_2 - \gamma_3 = 1\end{cases}$$

Розв`язки цих систем і дають нам елементи оберненої матриці

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1.71. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Помножимо обидві частини рівняння з лівого боку на матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Згідно попереднього прикладу $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

В лівій частині рівняння в силу асоціативного закону маємо:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = EX = X$

У правій частині буде

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -1 & \frac{13}{5} \\ \frac{21}{5} & 1 & \frac{16}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = X$$

Зауваження. Оскільки множення матриць некомутативне A? B? B? A, то в задачах такого типу потрібно уважно визначати, з якого боку слід множити, обидві частини рівняння на матрицю, обернену до однієї з даних.

1.72. Розв`язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 \qquad = -3 \end{cases}$$

представивши її у вигляді матричного рівняння.

Перепишемо систему у вигляді AX=B, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Розв`язок матричного рівняння має вигляд $X=A^{-1}B$. Знайдемо A^{-1}. Маємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2 \neq 0$$

Обчислимо алгебраїчне доповнення елементів цього визначника.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Згідно (1)

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -25+30-9 \\ 5-6+3 \\ 55-78+21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тобто $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$

§9. Модель багатогалузевої економіки

В макроекономіці виникає питання пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути обсяг виробництва кожної із *"n"* галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякою продукції, з іншого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, рік). Введемо такі позначення:

x_i – загальний (валовий) обсяг продукції *i-ої* галузі ($i=1, 2 \ldots n$);

x_{ij} – обсяг продукції *i-ої* галузі, що споживається в *j*-ій галузі в процесі виробництва ($i, j=1, 2 \ldots n$);

y_i – обсяг кінцевої продукції *i-ої* галузі для невиробничого споживання.

Оскільки валовий обсяг продукції будь-якої *i-ої* галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, що споживається *"n"* галузями, і кінцевої продукції, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad (1)$$

Рівняння (1) називається **співвідношенням балансу**. Будемо розглядати **вартісний міжгалузевий баланс**, коли всі величини, які входять в (1), мають вартісне вираження.

Введемо **коефіцієнти прямих затрат**

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad (i, j = 1, 2 \ldots n) \qquad (2)$$

які показують витрати продукції *i-ої* галузі на виробництво одиниці продукції *j-ої* галузі.

Можна вважати, що на деякому проміжку часу коефіцієнти a_{ij} будуть сталими і залежними від технології виробництва, що склалася. Отже це визначає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad (i, j = 1, 2, \ldots\ldots n) \qquad (3)$$

внаслідок чого, побудована на цій основі модель міжгалузевого балансу одержала назву лінійної.

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

де X – вектор валового випуску, Y – вектор кінцевого продукту, A – матриця прямих затрат. Тоді систему можна записати в матричному вигляді:

$X=AX+Y$ (5)

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих затрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Перепишемо рівняння (5) у вигляді:

$(E-A)X=Y$ (6)

Якщо матриця *(E-A)* невироджена. Тобто $|E-A| \neq 0$, то

$X = (E-A)^{-1}Y$ (7)

Матриця $S = (E-A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат, кожний елемент S_{ij} якої є величина валового випуску продукції *i*-ої галузі, необхідного для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту *j*-ої галузі $y_j = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots n)$.

У відповідності з економічним змістом задачі, значення x_i повинні бути невід'ємними при невід'ємних значеннях $y_i \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0$, де $i, j = 1, 2 \ldots\ldots n$.

Матриця $A \geq 0$ називається продуктивною, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (2). В цьому випадку і модель називають продуктивною.

Існує декілька критеріїв продуктивності матриці *A*. Один із них говорить про те, що матриця продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1, 2 \ldots\ldots n$, і максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці

$$\max_{j=1,2\ldots n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$$

причому хоча б для одного із стовпців сума елементів строго менше одиниці

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$$

1.73. Методом Жордана-Гауса розв'язати, у випадку сумісності, систему лінійних рівнянь. Указати вільні змінні, базисні зміни та базисний розв'язок, який їм відповідає. Перевірити цей розв'язок підстановкою.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 \quad + 2x_4 = 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок. Розв'яжемо систему методом Жордана-Гауса. Розрахунки за цим методом представимо у вигляді таблиці 1, в яку заносимо розширену матрицю системи.

Таблиця 1.

№ інтеграції	x_1	x_2	x_3	x_4	a_{ik}
0	1	1	-1	1	2
	1	-2	1	-1	-3
	2	1	0	2	5
	5	-2	1	1	1
1	2	-1	0	0	-1
	1	-2	1	-1	-3
	2	1	0	2	5
	4	0	0	2	4
2	4	0	0	2	4
	5	0	1	3	7
	2	1	0	2	5
	4	0	0	2	4
3	2	0	0	1	2
	-1	0	1	0	1
	-2	1	0	0	1
	0	0	0	0	0
3'	2	0	0	1	2
	-1	0	1	0	1
	-2	1	0	0	1

На кожній ітерації вибираються ведучий рядок та ведучий стовпчик, на перетині яких знаходиться ведучий елемент.

Для спрощення обчислень зручно за ведучий елемент вибирати елемент, який дорівнює 1, та за ведучий стовпчик вибирати стовпчик, який містить якомога більше нулів.

1 ітерація. Вибираємо третій ведучий стовпчик і другий ведучий рядок. На їх перетині стоїть ведучий елемент a_{23}, який ми виділимо рамкою. Тут і надалі через a_{qp} ми позначимо елемент, який стоїть на перетині рядка з номером q і стовпчика з номером p.

Далі перераховуємо елементи ведучого рядка за формулою:

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}} \quad (1)$$

де k=0,1,2,...; q - номер ведучого рядка, p - номер ведучого стовпчика, a'_{qk} елементи нової матриці, яка відповідає першій ітерації.

Оскільки для даного прикладу $a_{qp}=a_{23}=1$, то, згідно з формулою (1), всі елементи ведучого рядка необхідно поділити на 1, а отже, переписати без зміни.

Елементи інших рядків обчислюються за формулою

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{qk}}{a_{qp}} a_{ip}$$

або за формулою

$a'_{ik}=a_{ik}-a'_{qk}\,a_{ip}$ (2)

де i=1,2,...; k=0,1,2,...; q - номер ведучого рядка (q=2); p - номер ведучого стовпчика (p=3).

Оскільки $a_{33}=0$, то третій рядок, згідно з формулою (2), перепишеться без зміни. Для елементів першого рядка маємо:

$a'_{11}=a_{11}-a'_{21}a_{13}=1-1*(-1)=2;$

$a'_{12}=a_{12}-a'_{22}a_{13}=1-(-2)*(-1)=-1;$

$a'_{13}=a_{13}-a'_{23}a_{13}=0$

$a'_{14}=a_{14}-a'_{24}a_{13}=1-(-1)*(-1)=0;$

$a'_{10}=a_{10}-a'_{20}a_{13}=2-(-3)*(-1)=-1;$

Елементи четвертого рядка обчислюються аналогічно: $a'_{41}=4$, $a'_{42}=0$, $a'_{43}=0$, $a'_{44}=2$, $a'_{40}=4$

Після цих обчислень ведучий стовпчик має перетворитись в одиничний.

Зауважимо, що на наступних ітераціях ні другий рядок, ні третій стовпчик вже не можуть бути вибраними за ведучі.

2 ітерація. За ведучий вибираємо елемент $a'_{32}=1$ (ведучий рядок - третій, ведучий стовпчик - другий) Проводимо обчислення, аналогічні першій ітерації.

3 ітерація. $a''_{14}=2$ - ведучий елемент

На третій ітерації з’явився нульовий рядок, який можна відкинути (крок 3’).

В останній таблиці жоден рядок не може бути вибраний за ведучий, отже, розрахунки закінчені.

Так як ми отримали - три лінійно незалежних одиничних стовпчика при чотирьох змінних, то дана система рівнянь невизначена. Змінні, які відповідають лінійно незалежним одиничним стовпчикам, можуть бути вибрані за базисні. Для даного прикладу x_2, x_3, x_4 - базисні змінні. Усі інші (тобто x_1) - вільні.

Оскільки остання таблиця відповідає системі

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad + x_4 = 2 \\ -x_1 \qquad + x_3 \qquad = 1 \\ -2x_1 \quad + x_2 \qquad\qquad = 1 \end{cases}$$

то загальний розв’язок вихідної системи має вигляд (базисні змінні виражаються через вільні):

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2x_1 \\ x_3 = 1 + x_1 \\ x_4 = 2 - 2x_1 \end{cases}$$

Прирівнявши всі вільні змінні до нуля (тобто $x_1=0$), знайдемо базисний розв’язок:

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=2$.

Перевіримо цей розв’язок підстановкою у вихідну систему:

$$\begin{cases} 0+1-1+2=2 \\ 0-2\cdot 1+1-2=-3 \\ 2\cdot 0+1+2\cdot 2=-5 \\ 5\cdot 0-2\cdot 1+1+2=1 \end{cases}$$

Отже, це дійсно є розв’язок.

1.74. Для виробництва продукції створено 3 фірми, кожна з яких випускає один вид продукції. В таблиці задані:

- коефіцієнти прямих витрат a_{ik}, тобто кількість одиниць продукції i-ї фірми, яка використовується як проміжний продукт для випуску одиниці продукції k-ї фірми;
- кількість одиниць y_i продукції i-ї фірми, розрахованих на реалізацію (кінцевий продукт).

Визначити:

а) коефіцієнт повних витрат;

б) валовий випуск (план) для кожної фірми;

в) коефіцієнти непрямих витрат.

Таблиця 2.

Фірми	Прямі витрати a_{ik}			Кінцевий продукт
	I	II	III	y_i
I	0.1	0.2	0	10
II	0.1	0	0.2	30
III	0	0.2	0	20

Розв'язок. Нехай $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - виробнича програма фірм, де x_i - валовий випуск продукції i-ї

фірми (i=1,2,3).

Позначимо через $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ - план випуску товарної продукції (розрахованої на реалізацію). Матрицю коефіцієнтів прямих витрат позначимо через $A=\|a_{ik}\|$. Вектор Y та матриця А задано в таблиці.

Згідно з умовою задачі i-а фірма віддає рівно $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3$ одиниць продукції на внутрішні потреби фірм. Тоді виробничі зв'язки фірм можуть бути представлені за допомогою системи трьох рівнянь $x_i=y_i+a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3$, i=1,2,3.

Іншими словами, валовий випуск продукції x_i складається з випуску товарної продукції y_i та випуску продукції для внутрішніх потреб.

В матричній формі цю рівність можна переписати:

$Y+AX=X$ або $X\text{-}AX=Y$.

Якщо Е - одинична матриця третього порядку, то останнє рівняння перепишеться у вигляді $(E\text{-}A)X=Y$.

Його розв'язок у матричній формі має вигляд

$X=(E\text{-}A)^{-1}Y$ (3)

де $(E\text{-}A)^{-1}$ - обернена матриця.

а) Елементи матриці $(E\text{-}A)^{-1}$ є не що інше, як шукані коефіцієнти повних витрат. Позначимо $S=E\text{-}A$, тобто,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю S^{-1} методом Жордана-Гауса.

Розрахунки представимо у вигляді таблиці 3, в лівій частині якої записуємо вихідну матрицю S, праворуч - матрицю Е.

Відповідні перетворення рядків таблиці проводимо так само, як і при розв'язку системи рівнянь (див. табл.1), намагаючись отримати одиничні стовпчики (ітерації 1-3). Якщо вихідна матриця невироджена, то після проведення n ітерацій (n-порядок системи) отримаємо n одиничних стовпчиків. Якщо вихідна матриця вироджена, то після деякої ітерації в лівій частині таблиці з'явиться нульовий рядок. Це буде свідчити про те, що оберненої матриці не існує.

Для нашого прикладу ми отримали 3 одиничних стовпчика. На останньому кроці (3') шляхом перестановки рядків утворюємо в лівій частині таблиці одиничну матрицю. Тоді в правій частині таблиці буде записана обернена матриця.

Таблиця 3

№ ітерації	**матриця S**			**матриця Е**		
0	0.9	-0.2	0	1	0	0
	-0.1	1	-0.2	0	1	0
	0	-0.2	1	0	0	1
1	0.9	-0.2	0	1	0	0

	-0.1	0.96	0	0	1	0.2
	0	-0.2	1	0	0	1
2	0	8.44	0	1	9	1.8
	1	-9.6	0	0	-10	-2
	0	-0.2	1	0	0	1
3	0	1	0	0.12	1.07	0.21
	1	0	0	1.15	0.27	0.02
	0	0	1	0.02	0.21	1.04
3’	1	0	0	1.15	0.27	0.02
	0	1	0	0.12	1.07	0.21
	0	0	1	0.02	0.21	1.04

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат має такий вигляд:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1.15 & 0.27 & 0.02 \\ 0.12 & 1.07 & 0.21 \\ 0.02 & 0.21 & 1.04 \end{pmatrix}$$

Таким чином, наприклад, для випуску одиниці продукції I, II та III фірмами необхідно витратити, відповідно, 1.15; 0.27 та 0.02 одиниць продукції I фірми.

б) Для визначення валового випуску продукції використовуємо рівність (3):

$$X = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.15 & 0.27 & 0.02 \\ 0.12 & 1.07 & 0.21 \\ 0.02 & 0.21 & 1.04 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 37.5 \\ 27.3 \end{pmatrix}$$

Отже, x_1=20, x_2=37.5, x_3=27.3.

в) Коефіцієнти непрямих витрат знайдемо як різницю між повними витратами S^{-1} та прямими витратами А, або, в матричній формі.

$$S^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.07 & 0.02 \\ 0.02 & 1.07 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 1.04 \end{pmatrix}$$

ГЛАВА ІІ: Векторна алгебра

§1 Основні поняття

Розглядаючи різні процеси та явища, ми зустрічаємося з об‘єктами та величинами різної природи. Деякі із фізичних величин – такі як маса, температура, об‘єм, потенціал характеризуються одним числом. Вони називаються *скалярними* величинами або просто *скаляром*. Поряд зі скалярами існують величини, для характеристики яких необхідно вказати також і напрямок. Такі, наприклад, сила, швидкість, переміщення, напруження та інші. Ці фізичні величини називаються *векторними величинами* або *векторами*.

Геометричною моделлю векторної величини являється прямолінійний відрізок із вибраним на ньому напрямком.

В нашому курсі ми і будемо мати справу в основному з цією моделлю, а тому прямолінійний відрізок, для якого вказано, яка із обмежуючих його точок вважається початком, яка кінцем, будемо називати геометричним вектором або просто вектором.

Якщо A – початок вектора, B – його кінець, тоді сам вектор будемо позначати символом $\overline{AB}$. Символ $\overline{BA}$ буде, очевидно, позначати вектор, початок якого знаходиться в точці B, а кінець - в точціA. Під довжиною вектора будемо розуміти відстань між початком і кінцем вектора. Довжину, або, як часто говорять, модуль вектора $\overline{AB}$, позначають символом $\left|\overline{AB}\right|$. Очевидно, вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ мають однакову довжину (тобто $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BA}\right|$) і протилежні напрямки.

Вище було вказано, що вектор повністю визначається своїм початком та кінцем. Він може бути заданий також початком, довжиною та напрямком. Але для цілого ряду питань точка прикладання (початок вектора) не обов‘язкова – має значення лише довжина вектора та його напрямок. Такі вектори називаються *вільними*. Оскільки точка прикладання (початок вектора) будь-яка, тоді вектор можна переносити, зберігаючи його довжину і напрямок, в будь-яку точку простору. А тому вектори, які мають рівні довжини та однакові напрямки, називаються рівними векторами. Тобто,***вектори рівні, якщо при паралельному переносі векторів і співпаданні їх початків будуть співпадати і їх кінці.***

Оскільки для вільних векторів можна не вказувати початок, тоді вони часто визначаються одною буквою: вектор $\bar{a}$, вектор $\bar{b}$ і т.д. Довжина вектора $\bar{a}$ позначається символом $|\bar{a}|$.

Введемо ще три терміни, які часто зустрічаються у векторній алгебрі.

Колінеарними називаються вектори, які лежать на паралельних прямих. Або, вектори колінеарні, якщо при паралельному їх переносі та співставленні їх початків вони лежать на одній прямій.

Компланарними називаються вектори, які лежать на паралельних площинах. Тобто, вектори компланарні, якщо при паралельному їх переносі і співставленні початків вони лежать в одній площині. Очевидно, що два вектори завжди компланарні.

Нульовим вектором являється вектор, у якого початок співпадає з кінцем. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрямок довільний, а тому нульовий вектор можна вважати колінеарним будь-якому іншому вектору. Позначати нульовий вектор будемо символом $\bar{0}$.

§2 Лінійні операції з векторами.

Вводячи різні операції з векторами, збережемо прийняті в алгебрі чисел терміни “додавання” та “множення”. Але необхідно взяти до уваги, що оскільки поняття “вектор” та “число” суттєво різні, тоді і зміст вказаних операцій може не співпадати з відповідними операціями алгебри чисел. А тому необхідно дослідити основні правила цих по суті нових операцій та перевірити виконання встановлених в алгебрі чисел законів: комутативного, асоціативного та дистрибутивного.

Визначення. *Сумою двох векторів називається третій вектор, початок якого є початком 1-го вектора, кінцем – кінець 2-го, при чому початок 2-го вектора співставлений з кінцем 1-го.*

Із введеного визначення випливає, що при додаванні векторів має місце комутативна властивість, тобто

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (1)

Дійсно, доповнимо трикутник, складений із векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b}$ до паралелограма (рис.3). Оскільки $\bar{a} = \overline{OA} = \overline{CB}$, $\bar{b} = \overline{AB} = \overline{OC}$ і згідно визначення суми векторів $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ і $\overline{OC} + \overline{CB} = \overline{OB}$, тоді $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

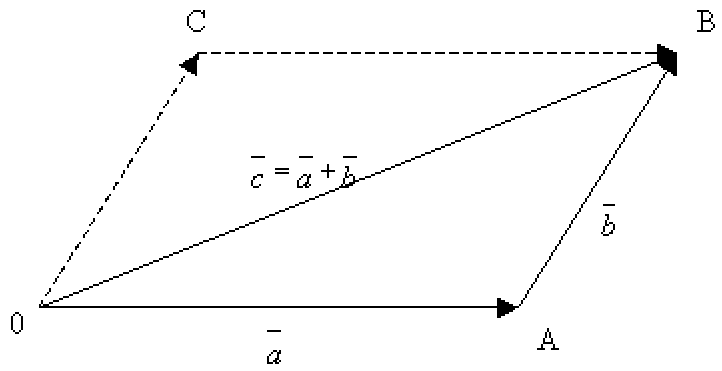

Рис.3

Із наведених міркувань випливає, що суму двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ можна визначити як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, які виходять із загального початку заданих векторів.

Легко перевірити, що при додаванні векторів має місце асоціативна властивість, тобто

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (2)

а тому суму трьох векторів можна записати просто у вигляді $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Дійсно, побудуємо із векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ вектор $\bar{a} + \bar{b}$; побудуємо також суму векторів $\bar{a} + \bar{b}$ та вектора $\bar{c}$ (рис.4).

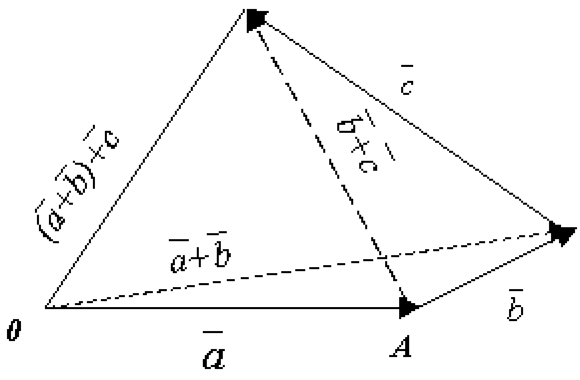

Рис. 4

Відмічений пунктиром вектор $\overline{AC}$ згідно визначення і є сумою векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$. Разом з тим $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$, таким чином, $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

Проведені міркування дають прийом додавання будь-якого числа векторів. Нехай задані *k* векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_k$, і необхідно знайти їх суму. До кінця вектора $\bar{a}_1$ прикладемо початок вектора $\bar{a}_2$, до кінця побудованого вектора $\bar{a}_2$ приставимо початок вектора $\bar{a}_3$ і т.д. Нарешті, до кінця вектора $\bar{a}_{k-1}$ приставимо початок вектора $\bar{a}_k$ (рис.5).

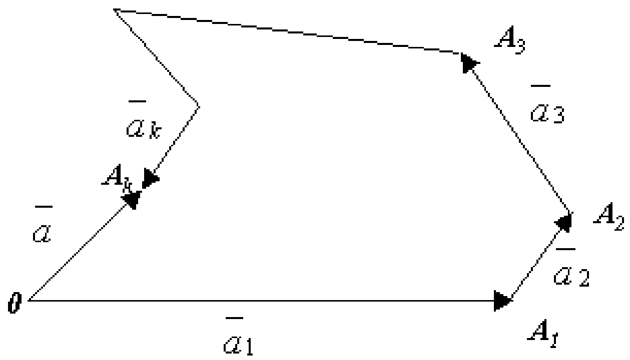

Рис. 5

Тоді вектор $\bar{a}$, початком якого є початок вектора $\bar{a}_1$, а кінцем – кінець вектора $\bar{a}_k$, і буде сумою векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_k$: $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots\dots + \bar{a}_k$. При цьому байдуже, в якому порядку нумеруються задані вектори.

Таким чином, сума декількох векторів представляє собою вектор, який замикає ламану, побудовану на заданих векторах. Може статися, що кінець останнього вектора співпаде з початком першого, і, отже, у замикаючого вектора кінець співпаде з початком. В цьому випадку сума векторів є нульовим вектором.

Визначення. *Добутком вектора* $\bar{a}$ *на число* λ *(або числа* λ *на вектор* $\bar{a}$ *) називається вектор* $\bar{b}$*, довжина якого в* $|\lambda|$ *раз більше довжини вектора* $\bar{a}$ *і напрямок співпадає з напрямком вектора* $\bar{a}$*, якщо* $\lambda > 0$*, та протилежний напрямку* $\bar{a}$*, якщо* $\lambda < 0$**.**

Оскільки ділення на число $k \neq 0$ представляє собою множення на число $\frac{1}{k}$, то можна виконувати і ділення вектора на відмінне від нуля число.

Нехай $\bar{a}$ ненульовий вектор. Оскільки $\frac{1}{|\bar{a}|}$ - додатне число, тоді вектор $\bar{e} = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ направлений так, як і вектор $\bar{a}$. Довжина вектора $\bar{e}$ дорівнює, очевидно, 1. Вектор $\bar{e}$, який має довжину рівну 1 і направлений так, як і вектор $\bar{a}$, називається *ортом вектора* $\bar{a}$.

Добуток вектора $\bar{a}$ на число –1 (або, що теж саме, добуток числа –1 на вектор $\bar{a}$), тобто вираз $(-1) \cdot \bar{a}$ (або $\bar{a} \cdot (-1)$), записують як $-\bar{a}$. Оскільки вектори $\bar{a}$ та $(-1) \cdot \bar{a}$ мають у відповідності з визначенням однакові довжини та протилежні напрямки, тоді

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = 0 \quad (3)$$

Як і в алгебрі чисел, в алгебрі векторів немає потреби розглядати окремо дію віднімання. Відняти від вектора $\bar{a}$ вектор $\bar{b}$ означає додати до вектора $\bar{a}$ вектор $-\bar{b}$: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$. А тому у векторних рівностях вектори можна переносити із однієї частини рівності в другу, змінюючи знак, який стоїть перед вектором, на протилежний. Тобто, якщо $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$, тоді $\bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$.

Неважко переконатись, що при множенні вектора на число має місце асоціативна та дистрибутивна властивості. Покажемо, по-перше , що

$\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$ (4)

(тобто має місце асоціативна властивість по відношенню до числових множників).

Дійсно, оскільки довжина вектора $\mu\bar{a}$ дорівнює $|\mu|\ |\bar{a}|$, довжина вектора $\lambda(\mu\bar{a})$ дорівнює $|\lambda|\ |\mu\bar{a}| = |\lambda|\ |\mu|\ |\bar{a}|$ та довжина вектора $(\lambda\mu)\bar{a}$ дорівнює $|\lambda\mu|\ |\bar{a}| = |\lambda|\ |\mu|\ |\bar{a}|$, тоді довжина векторів $\lambda(\mu\bar{a})$та $(\lambda\mu)\bar{a}$ однакова. Далі, якщо, наприклад, числа λ та μ додатні, тоді вектори $\mu\bar{a}$, $\lambda(\mu\bar{a})$, $(\lambda\mu)\bar{a}$ направлені так, як і вектор $\bar{a}$, а тому усі вони мають однакові напрямки. Якщо $\lambda > 0$ та $\mu < 0$, тоді вектори $\mu\bar{a}$, $\lambda(\mu\bar{a})$, $(\lambda\mu)\bar{a}$ направлені всі протилежно вектору $\bar{a}$, а тому також однаково направлені.

Аналогічні міркування проводяться і у всіх інших випадках.

Доведемо тепер, що

$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (5)

нехай $\bar{a} = \overline{OA},\ \bar{b} = \overline{AB},\ \lambda\bar{a} = \overline{OA_1},\ \lambda\bar{b} = \overline{A_1B_1}$ (рис. 6 при $\lambda > 0$ та рис.7 при $\lambda < 0$).

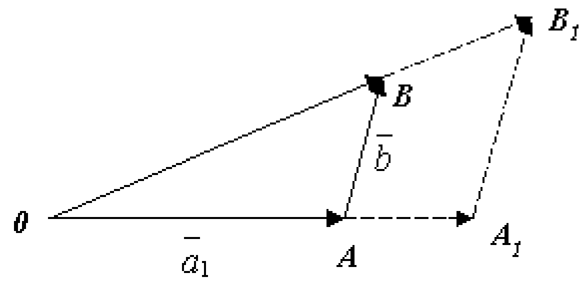

Рис. 6

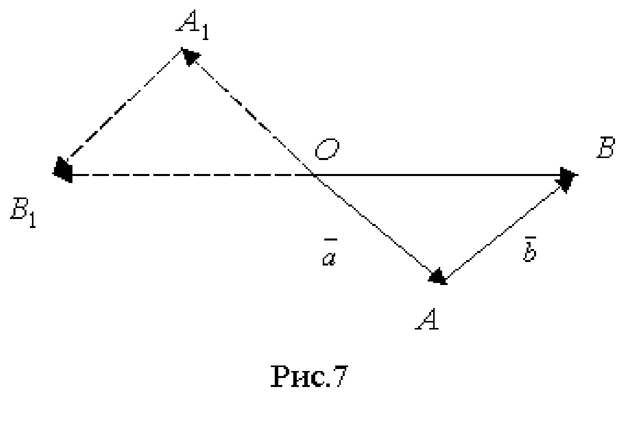

Рис.7

Оскільки $\overline{AB} \| \overline{A_1B_1}$, тоді кути *OAB* та *OA₁B₁* рівні.
Оскільки $\left|\overline{OA_1}\right| / \left|\overline{OA}\right| = \lambda, \quad \left|\overline{A_1B_1}\right| / \left|\overline{AB}\right| = \lambda$, тоді трикутники *OAB* та OA_1B_1 подібні.
Звідси, точки *O, B,* B_1 лежать на одній прямій і $\left|\overline{OB_1}\right| / \left|\overline{OB}\right| = \lambda$, а тому $\overline{OB_1} = \lambda \cdot \overline{OB}$.
Але $\overline{OB_1} = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}, \quad \overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$ і твердження доведене.

Очевидно, має місце також співвідношення

$$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a} \quad (6)$$

Розглянуті операції – додавання векторів та множення вектора на число – називаються *лінійними операціями*, а вектор

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \ldots + \lambda_k\overline{a_k} \quad (7),$$

отриманий в результаті проведення декількох лінійних операцій, лінійною комбінацією векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_k}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ називаються коефіцієнтами цієї лінійної комбінації.

§ 3 Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів

Нехай задано **k** векторів: $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_k}$. Назвемо таку задану множину векторів *системою векторів.*

Визначення*. Система векторів називається лінійно-залежною, якщо хоча б один із векторів системи може бути виражений як лінійна комбінація останніх.*

Таким чином система векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_k}$ лінійно-залежна, якщо, наприклад,

$$\overline{a_k} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \ldots + \alpha_{k-1}\overline{a_{k-1}} \quad (1)$$

де $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ - деякі числа.

Відмітимо, якщо в задану систему (множину) векторів включений нульовий вектор, тоді система обов‘язково лінійно-залежна. Дійсно, завжди можна написати що $\overline{a_k} = 0 = 0 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + \ldots + 0 \cdot \overline{a_{k-1}}$, тобто виражати нульовий вектор як лінійну комбінацію (з нульовими коефіцієнтами) останніх векторів системи.

Наведене визначення лінійної залежності системи векторів виділяє із інших один якийсь вектор системи. Щоб уникнути такого виділення, часто вводять друге визначення лінійної залежності.

Визначення. *Система векторів* $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_k}$ *називається лінійно-залежною, якщо існують числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$*, із яких хоча б одне відмінне від нуля, такі що*

$$\overline{a_k} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_{k-1} \overline{a_{k-1}} \quad (2)$$

Таке визначення, звичайно, рівнозначне попередньому. Дійсно, якщо маємо рівність

$$\overline{a_k} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_{k-1} \overline{a_{k-1}},$$

тоді, переносячи $\overline{a_k}$ в праву частину,
отримаємо $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_{k-1} \overline{a_{k-1}} + (-1)\overline{a_k}$ =0, і, отже, маємо рівність (2) при $\lambda_1 = \alpha_1, \ \lambda_2 = \alpha_2, \ldots \lambda_{k-1} = \alpha_{k-1}, \ \lambda_k = -1 \neq 0$. Навпаки, якщо виконана умова (2) і, наприклад, $\lambda_k \neq 0$, тоді

$$\overline{a_k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\overline{a_2} - \ldots \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\overline{a_{k-1}},$$

і тим самим виконана умова (1).

В повній відповідності зі сказаним можна ввести і визначення лінійної незалежності систем векторів, як заперечення лінійної залежності.

Визначення. *Система векторів називається лінійно-незалежною, якщо вона не є лінійно-залежною.*

Наведемо інші, рівнозначні визначення:

система векторів називається лінійно-незалежною, якщо ні один із векторів системи не може бути виражений як лінійна комбінація останніх;

система векторів називається лінійно-незалежною, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації можлива тільки тоді, коли всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю.

Найпростішим прикладом лінійно-залежних векторів є пара колінеарних векторів. Нехай задані два колінеарних ненульових вектора $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$. Позначимо через α відношення довжин цих векторів, тобто число $\left|\overline{a_2}\right| / \left|\overline{a_1}\right|$. Очевидно, що вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ при зробленому виборі числа α мають однакові довжини. Отже, якщо $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ однаково направлені, тоді $\overline{a_2} = \alpha\overline{a_1}$, якщо ж вони направлені в протилежні сторони, тоді $\overline{a_2} = -\alpha\overline{a_1}$. Таким чином, два колінеарних вектора завжди лінійно залежні. Ясно, що вірне і обернене твердження: якщо два вектори лінійно залежні, тоді вони колінеарні.

Таким чином, умова

$\overline{a_2} = \alpha\overline{a_1}$ (3),

тобто умова лінійної залежності двох ненульових векторів, є умова, необхідна і достатня для колінеарності цих векторів.

Доведемо тепер, що лінійна залежність трьох векторів є умова необхідна і достатня для їх компланарності.

Нехай задані три компланарні ненульові вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$. У відповідності з визначенням при співставленні початків цих векторів вони опиняться в одній площині (рис. 8).

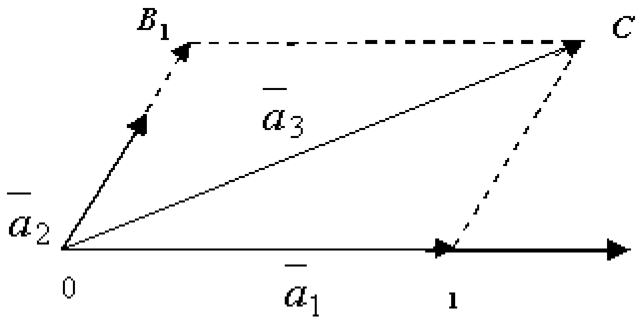

Рис. 8

Будемо вважати, що вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ не колінеарні (в противному випадку вони лінійно залежні). Через кінець вектора $\overline{a_3}$ (точку *C*) проведемо прямі, паралельні векторам $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$. Ці прямі перетнуть прямі, на яких лежать вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$, в точках A_1 *і* B_1. Вектори OA_1 і $\overline{a_1}$, очевидно, колінеарні. А тому $\overline{OA_1} = \lambda_1 \overline{a_1}$, і аналогічно $\overline{OB_1} = \lambda_2 \overline{a_2}$. Але $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} = \overline{OC} = \overline{a_3}$. Таким чином, $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$, і, отже, вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ лінійно залежні.

Справедливе і обернене твердження: якщо вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ лінійно залежні, то вони компланарні. Дійсно, нехай $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$. Якщо вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ не колінеарні, то вони визначають деяку площину. В тій же площині лежать, очевидно, вектори $\lambda_1 \overline{a_1}$ і $\lambda_2 \overline{a_2}$, а тому і їх сума – вектор $\overline{a_3}$. Якщо ж вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ колінеарні, тоді на тій же прямій лежить і вектор $\overline{a_3}$, і три заданих вектора не тільки компланарні, але і колінеарні.

Із наведених міркувань випливає, що якщо на площині задана пара неколінеарних векторів, то будь-який третій вектор, який лежить в тій же площині, може бути представлений як лінійна комбінація двох заданих.

Визначення. *Впорядкована пара (якщо вказано, який вектор пари вважається першим, а який другим) неколінеарних векторів називається базисною системою векторів (базисом) на площині, визначеної заданими векторами.*

Теорема розкладу. Будь-який вектор на площині може бути представлений як лінійна комбінація базисної системи векторів, це представлення (розклад по базисній системі) єдине.

Нехай вектори $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ базисні. Тоді, як показано вище, будь-який вектор $\overline{a}$ може бути представлений у вигляді $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2}$. Залишається довести єдинність розкладу.

Будемо вважати, що існує ще один розклад вектора по тій же базисній системі:

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{e_1} + \beta_2 \overline{e_2}$$

при цьому хоча б одне із чисел β_1 та β_2 відмінне від чисел α_1 та α_2. Тоді отримаємо $(\beta_1 - \alpha_1)\overline{e_1} + (\beta_2 - \alpha_2)\overline{e_2} = 0$. Отже вектори $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ лінійно залежні, а тому колінеарні. Але це суперечить твердженню, що $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ утворюють базисну систему. Таким чином, розклад заданого вектора по заданій базисній системі єдиний.

Проведені міркування легко переносяться і на вектори, задані в просторі.

Визначення. *Впорядкована трійка (якщо вказано, який вектор трійки вважати першим, який другим і який третім) некомпланарних векторів називається базисною системою векторів (базисом) в просторі.*

Теорема розкладу. Будь-який вектор може бути представлений як лінійна комбінація базисної системи векторів; таке представлення (“розклад по базисній системі”) єдине.

Доведення. Нехай задана базисна система векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3,$ і $\bar{a}$ - довільний вектор. Нехай 0 – загальний початок цих векторів. Через точку *D* – кінець вектора $\bar{a}$ (рис. 9) – проведемо пряму *DE*, паралельну вектору $\bar{e}_3$, і нехай *E* - точка перетину цієї прямої з площиною, визначену векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$.

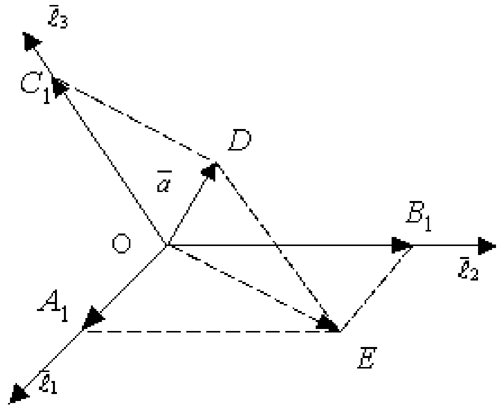

Рис.9

Через точку E проведемо прямі, паралельні векторам $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, нехай B_1 і A_1 – точки перетину цих прямих з прямими, на яких лежать вказані вектори. Нарешті, через точку *D* проведемо пряму, паралельну *OE* до перетину в точці C_1 з прямою, на якій лежить вектор $\bar{e}_3$.

$$\overline{OE} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}, \qquad \bar{a} = \overline{OD} = \overline{OE} + \overline{OC_1},$$

Маємо

$$\overline{OA_1} = \alpha_1\bar{e}_1, \quad \overline{OB_1} = \alpha_2\bar{e}_2, \quad \overline{OC_1} = \alpha_3\bar{e}_3$$

Тому

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}$$

Одержаний розклад єдиний, оскільки, якби існував ще один розклад

$$\overline{a} = \beta_1\overline{e_1} + \beta_2\overline{e_2} + \beta_3\overline{e_3},$$

то виконувалась би рівність

$$(\beta_1 - \alpha_1)\overline{e_1} + (\beta_2 - \alpha_2)\overline{e_2} + (\beta_3 - \alpha_3)\overline{e_3} = 0,$$

при цьому хоча б одне із чисел $\beta_1 - \alpha_1,\ \beta_2 - \alpha_2,\ \beta_3 - \alpha_3,$ було б відмінне від нуля. Це означало б що вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ були б лінійно залежні, а тому і компланарні, що суперечить умові теореми.

Із доведеного випливає також, що будь-які чотири вектори лінійно залежні.

Введемо ще одне суттєво важливе поняття.

Визначення. *Координатами вектора в заданому базисі називаються коефіцієнти розкладу вектора по базисній системі векторів.*

Отже, якщо задана базисна система векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ і $\overline{a} = \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}$ то координатами вектора $\overline{a}$ в заданому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ називаються числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Записуються координати вектора в заданому базисі у вигляді рядка: $\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Зустрічається також запис у вигляді стовпця

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Таким чином, якщо заданий базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, і в цьому базисі $\overline{a} = \{3, 1, -2\}$, тоді $\overline{a} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} - 2\overline{e_3}$.

Очевидно, якщо заданий деякий базис, то задання координат вектора в цьому базисі повністю визначає сам вектор, і , отже, два вектора рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати в якому-небудь заданому базисі.

Використовуючи правила лінійних операцій, отримаємо такі теореми:

При множенні вектора на число всі його координати в заданому базисі перемножуються на це число.

При додаванні векторів складаються відповідні координати цих векторів.

Дійсно, нехай заданий базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, і в цьому базисі два вектори:

$\overline{a_1} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\overline{a_2} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Тоді

$$\lambda\overline{a_1} = \lambda\left(\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}\right) = \lambda\alpha_1\overline{e_1} + \lambda\alpha_2\overline{e_2} + \lambda\alpha_3\overline{e_3} = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\};$$

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} = \left(\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}\right) + \left(\beta_1\overline{e_1} + \beta_2\overline{e_2} + \beta_3\overline{e_3}\right) =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overline{e_3} = \{\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \alpha_3 + \beta_3\}$$

Відмітимо, що в просторі можливо вибрати нескінченну множину базисних систем векторів, і один і той вектор в різних базисних системах буде мати різні координати. В багатьох задачах корисно переходити від однієї базисної системи до другої і встановлювати співвідношення між координатами вектора в різних системах. Покажемо це на прикладах.

ПРИКЛАДИ РОЗВ‘ЯЗКУ ЗАДАЧ

1.88. В базисній системі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ задані три вектори

$\overline{a_1} = \{1, 2, 0\}$, $\overline{a_2} = \{-1, 1, 1\}$, $\overline{a_3} = \{2, 0, 1\}$.

В базисній системі $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ вектор $\overline{a}$ має координати $\{-1, 2, 1\}$.

Знайти координати вектора $\overline{a}$, в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

Δ

$$\overline{a} = -\overline{a_1} + 2\overline{a_2} + \overline{a_3};$$
$$\overline{a_1} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2};\ \overline{a_2} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3};\ \overline{a_3} = 2\overline{e_1} + \overline{e_3}$$
$$\overline{a} = -\left(\overline{e_1} + 2\overline{e_2}\right) + 2\left(-\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}\right) + \left(2\overline{e_1} + \overline{e_3}\right) = -\overline{e_1} + 0\cdot\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$$

Отже

$\overline{a} = \{-1,\ 0,\ 3\}$ в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. ∧

1.89. Встановити, являються вектори $\overline{a} = \{1,\ -2,\ 0\},\ \overline{b} = \{1,\ 2,\ -1\},\ \overline{c} = \{-1,\ -6,\ 2\}$, задані своїми координатами в якій-небудь базисній системі, лінійно-залежними, і , якщо так, тоді виразити один із векторів через інші.

Δ У відповідності з визначенням лінійної залежності відшукуються такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, щоб $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = 0$. Оскільки при рівності векторів повинні бути рівні їх координати, то

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 & \lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{array}\Bigg\}$$

Третє рівняння є наслідком двох інших. Вибираємо $\lambda_3 = 1$.
Тоді $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ -\overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c} = 0,\ \overline{a} = 2\overline{b} + \overline{c}$ ∧

1.90. В базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ задані чотири вектори

$\overline{a}_1 = \{0,1,-2\}$, $\overline{a}_2 = \{2,1,1\}$, $\overline{a}_3 = \{1,0,1\}$, $\overline{a}_4 = \{2,1,3\}$.

Знайти координати вектора $\bar{a}_4$ в базисі $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

Δ Оскільки чотири вектора завжди лінійно залежні, то $\overline{a_4} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3}$.
Порівнюючи координати векторів, одержимо:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = -4 \\ \bar{a} = \{-2,\ 3,\ -4\} \end{array}$$

∧

1.91. З‘ясувати, являється система векторів

$\bar{\alpha}_1 = \{1;\ -1;\ 2;\ 1\},\ \bar{\alpha}_2 = \{1;\ -1;\ 1;\ 2\},\ \bar{\alpha}_3 = \{1;\ -1;\ 4;\ -1\}$ лінійно залежною.

Δ Нехай

$$c_1\bar{\alpha}_1 + c_2\bar{\alpha}_2 + c_3\bar{\alpha}_3 = 0$$

де c_1, c_2, c_3 - деякі числа.

Підставляємо в цю рівність вирази векторів

$$c_1(1;\ -1;\ 2;\ 1) + c_2(1;\ -1;\ 1;\ 2) + c_3(1;\ -1;\ 4;\ -1) = 0.$$

Після множення векторів на числа c_1, c_2, c_3 і додавання векторів отримаємо, що

$$(c_1 + c_2 + c_3,\ -c_1 - c_2 - c_3,\ 2c_1 + c_2 + 4c_3,\ c_1 + 2c_2 - c_3) = 0$$

Звідки $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 - c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$

Цю систему лінійних однорідних рівнянь розв‘язуємо методом Гауса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Одержали трапецеїдальну систему. Отже, задана система є невизначеною, а тому, крім нульового розв‘язку $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ має і ненульовий розв‘язок. Таким чином, розглянута системи векторів $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3$ - лінійно залежна. Можна знайти коефіцієнти c_1, c_2, c_3 лінійно залежної системи векторів $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3$. Для цього розв‘язуємо одержану систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \quad c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Вільними невідомими можна вважати c_3. Виражаючи головні невідомі c_1 і c_2 через вільне невідоме c_3, знаходимо що $c_2 = 2c_3,\ c_1 = -3c_3$.

Надамо c_3 довільного значення, відмінного від нуля, наприклад –1.
Одержуємо: $c_1 = 3,\ c_2 = -2,\ c_3 = -1$, тобто $3\overline{\alpha}_1 - 2\,\overline{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_3$ =0. ^

§4 Проекція вектора на вісь

Будемо називати віссю пряму з вибраним на ній напрямком.

Нехай заданий вектор $\overline{AB}$ і вісь *L*. Розглянемо вектор, початком якого є точка A_1 – проекція точки *A* на вісь *L*, а кінцем – точка B_1 – проекція точки *B* на ту ж вісь.

Визначення. *Проекцією вектора* $\overline{AB}$ *на вісь L називається довжина вектора* $\overline{A_1B_1}$, *взята зі знаком “+”, якщо напрямок* $\overline{A_1B_1}$ *співпадає з напрямком осі L, та з знаком “-”, якщо напрямок* $\overline{A_1B_1}$ *протилежний напрямку осі L.*

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь *L* позначається $np_L \overline{AB}$. Будемо називати *ортом осі L вектор* $\overline{L_0}$, напрямок якого співпадає з напрямком осі *L* і довжина дорівнює 1.

Визначення. *Кутом між двома векторами (або між вектором та віссю) називається найменший кут, на який потрібно повернути один із векторів, щоб його напрямок співпав з напрямком другого вектора.*

При цьому немає значення, який із двох векторів повертається: вектор $\bar{a}$ до співпадання з напрямком вектора $\bar{b}$ або вектор $\bar{b}$ до співпадання з напрямком вектора $\bar{a}$. Іншими словами, кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є разом з тим і кутом між векторами $\bar{b}$ і $\bar{a}$. Звідси випливає, що кут між двома векторами не може бути від‘ємним і не може бути більше π радіан.

§5 Прямокутна декартова система координат в просторі

Виберемо в просторі яку-небудь точку *O*, проведемо через неї три взаємно перпендикулярні осі, і на кожній із них візьмемо одиничний вектор, направлений по цій осі (орт осі). Вісь з вибраним на ній початком відліку та одиницею довжини називається *координатною віссю*, а впорядкована система трьох взаємно перпендикулярних координатних осей із загальним початком відліку і загальною одиницею довжини називається *прямокутною декартовою* системою координат в просторі.

У вибраній впорядкованій системі координатних осей першу ось назвемо *віссю абсцис* (або віссю *x*), другу – *віссю ординат* (або віссю *y*), третю – віссю *аплікат* (або віссю *z*). Оскільки на кожній осі вибраний орт осі, то маємо також базисну трійку векторів. Вектори цієї базисної трійки взаємно перпендикулярні. Таку базисну систему векторів називають ортогональною. Крім того, довжини усіх трьох наших базисних векторів дорівнюють одиниці. Така система векторів називається *нормованою* (в багатьох випадках довжину вектора називають *нормою*).

Таким чином, вибрана система базисних векторів – “координатний базис” – є ортогональною і нормованою, або, як часто говорять, *ортонормованою*. Перший вектор базисної трійки, направлений по першій осі (по осі абсцис), позначається символом $\bar{i}$, другий вектор, направлений по другій осі (по осі ординат), - символом $\bar{j}$, третій вектор, направлений по третій осі (по осі аплікат), - символом $\bar{k}$.

Базисні, тобто некомпланарні трійки векторів в просторі поділяються на два типи. Якщо при спостереженні від кінця 3-го вектора базисної трійки коротший поворот від 1-го вектора до 2-го проводиться проти часової стрілки – базисна система називається *правою*. Якщо при спостереженні від кінця 3-го вектора найкоротший поворот від 1-го вектора до 2-го проводиться по часовій стрілці – трійка векторів називається – *лівою.*

Прямокутна декартова система координат називається відповідно правою, якщо правою є трійка її базисних векторів, і лівою, якщо трійка її базисних векторів ліва. Ми будемо використовувати тільки праву систему координат.

Як було показано раніше, будь-який вектор може бути розкладений і при тому єдиним чином по базисній трійці векторів. А тому будь-який вектор $\bar{a}$ може бути записаний у вигляді: $\bar{a} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$. Оскільки початок вектора $\bar{a}$ завжди можна помістити в початок координат (рис. 10), то числа α_1, α_2, α_3, тобто координати вектора $\bar{a}$ в базисній трійці $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являються одночасно проекціями вектора $\bar{a}$ на ці осі.

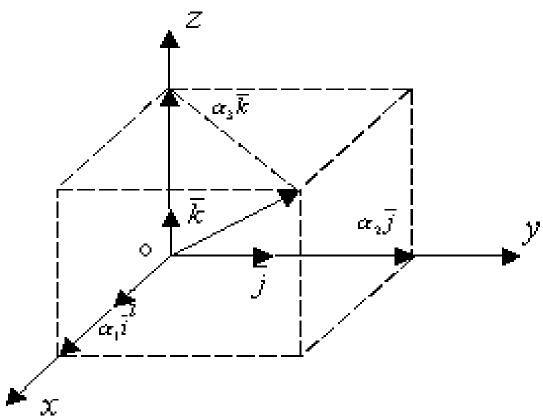

Рис.10

Для скорочення запису замість $пр_x\bar{a},\ пр_y\bar{a},\ пр_z\bar{a}$ застосовують символи $a_x,\ a_y,\ a_z$. А тому вектор $\bar{a}$ можна записати у вигляді

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\} \quad (1)$$

Оскільки вектор $\bar{a}$ внаслідок взаємної перпендикулярності координат осей є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, тоді

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2)$$

Кути, утворені вектором $\bar{a}$ з координатними осями, можуть бути обчислені за формулами:

$$\cos(\bar{a},x)=\frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos(\bar{a},y)=\frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos(\bar{a},z)=\frac{a_z}{|\bar{a}|} \quad (3)$$

Візьмемо в просторі із заданою прямокутною системою координат довільну точку *M*. Радіусом-вектором цієї точки будемо називати вектор $\overline{OM}$ з початком на початку координат і кінцем в заданій точці (рис. 11).

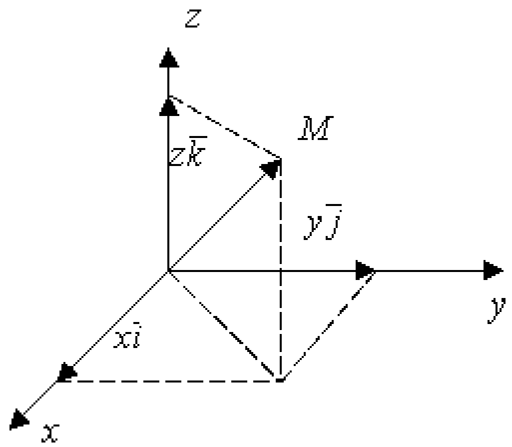

Рис.11

Визначення. *Координатами точки в заданій прямокутній декартовій системі координат називаються проекції радіус-вектора цієї точки на координатні осі.*

Координати заданої точки *M* в заданій прямокутній декартовій системі координат записуються, як правило, у вигляді *(x, y, z)*, де

$$x=пр_x\overline{OM},\ y=пр_y\overline{OM},\ z=пр_z\overline{OM} \quad (4),$$

і називаються відповідно абсцисою, ординатою та аплікатою точки *M*.

Три площини визначені парами координатних осей, розбивають весь простір на 8 частин – октантів. Площини ці називаються координатними площинами. На площині *xy* (яка проходить через осі*x* і *y*) апліката будь-якої точки дорівнює нулю, на площині *xz* (яка проходить через осі *x* і *z*) ордината будь-якої точки дорівнює нулю, на площині *yz* (яка проходить через осі *y* і *z*) абсциса будь-якої точки дорівнює нулю.

Очевидно, в заданій системі координат координати будь-якої фіксованої точки визначаються єдиним чином, і задання координат будь-якої точки (тобто задання впорядкованої трійки дійсних чисел) єдиним чином визначає положення самої точки. Іншими словами, в заданій системі координат має місце взаємно-однозначна відповідність між точками в просторі і впорядкованими трійками дійсних чисел. Оскільки вектор повністю визначається заданням положення його початку і його кінця, то можна виразити координати в ортонормованому базисі через координати його кінців.

Нехай в заданій прямокутній декартовій системі координат початок вектора знаходиться в точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а кінець – в точці $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 12). Як відомо, $\overline{OM}_1 + \overline{M_1M_2} = \overline{OM}_2$. Але вектор $\overline{OM_1}$ є радіус-вектор точки M_1, а $\overline{OM}_2$ - радіус-вектор точки M_2.

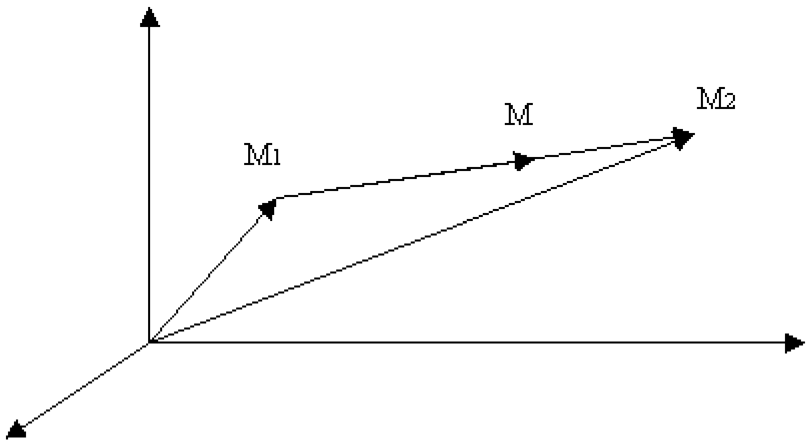

Рис.12

Тому

$$\overline{OM}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \quad \overline{OM}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$$

Отже,

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

(5)

Можна використати і другу систему запису

$$\overline{OM_1} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\},\ \overline{OM}_2 = \{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$.

Апарат векторної алгебри і метод координат з успіхом використовується для розв‘язку багатьох геометричних задач.

Задача 1.

Знайти відстань між двома заданими точками $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Розв‘язок.

Вектор $\overline{M_1M_2}$ має координати $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$. Раніше було доведено, що довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат в ортонормованому базисі. А тому

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (6)$$

Задача 2. Задані дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайти координати точки, яка лежить на відрізку $\overline{M_1M_2}$ і ділить довжину цього відрізка у відношенні $\frac{m}{n} = \lambda$.

Розв‘язок. Нехай точка $M(x, y, z)$ – шукана (рис. 12). Вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$, очевидно, колінеарні і однаково направлені. Тому вони можуть відрізнятися тільки довжиною. З умови

$$\frac{\left|\overline{M_1M}\right|}{\left|\overline{MM_2}\right|} = \frac{m}{n} = \lambda$$

Отже

$$\left|\overline{M_1M}\right| = \lambda\left|\overline{MM_2}\right|$$

При рівності векторів повинні бути рівні їх координати.
Оскільки $\overline{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$, $\overline{MM_2} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}$, тоді

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ \ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ \ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

одержимо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}; \quad (7)$$

В частинному випадку, якщо ***n=m*** $\lambda = 1$, тобто точка *M* лежить в середині даного відрізка M_1M_2 то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}; \quad (8),$$

і, отже, координати середини відрізка дорівнюють напівсумам відповідних координат його кінців.

Очевидно, що всі отримані результати можна перенести і на випадок прямокутної системи координат на площині. Векторами, які утворюють ортонормований базис, тут будуть $\bar{i}$ та $\bar{j}$, а тому будь-який вектор в площі *xy* може бути записаний у вигляді $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} = \{a_x,\ a_y\}$.

Щоб отримати із виведених формул відповідні формули в прямокутній декартовій системі координат на площі, достатньо вважати рівними нулю всі проекції на вісь *z*.

§6 Скалярний добуток векторів

У фізичних, технічних економічних застосуваннях математики велике значення має розв‘язок задачі про визначення роботи, яку виконує задана стала сила при переміщенні матеріальної точки. Якщо точка переміщується прямолінійно, то, як відомо, робота дорівнює добутку величини сили на величину переміщення і на косинус кута між напрямком сили і напрямком переміщення. Позначимо силу $\overline{F}$, а переміщення $\overline{AB}$, отримаємо для обчислення роботи вираз:

$$W = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{AB}\right|\cos\left(\overline{F},\ \overline{AB}\right)$$

Оскільки подібна операція з двома векторами зустрічається досить часто, то для неї введена спеціальна назва, спеціальне позначення і вивчені всі нові властивості.

Визначення. *Скалярним добутком двох векторів називається добуток їх довжин і косинуса кута між ними.*

Скалярний добуток двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначимо символом $\overline{a}\cdot\overline{b}$. У відповідності з визначенням

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\left(\overline{a},\ \overline{b}\right) \quad (1)$$

Безпосередньо із визначення випливає, що скалярний добуток двох векторів є скаляр.

Кут між двома векторами не залежить від того, який вектор вибирається першим і який другим, тому

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a} \quad (2),$$

тобто скалярний добуток має комутативну властивість.

Оскільки $\left|\overline{b}\right|\cos\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$ є проекція вектора $\overline{b}$ на вісь, направлену так, як і вектор $\overline{a}$, $\left|\overline{a}\right|\cos\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$ є проекція вектора $\overline{a}$ на вісь, направлену по вектору $\overline{b}$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right| np_{a}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| np_{B}\overline{a} \quad (3)$$

Тепер легко показати, що скалярний добуток векторів має розподільчу властивість, тобто

$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (4)

Дійсно

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| np_a (\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| (np_a \bar{b} + np_a \bar{c}) = |\bar{a}| np_a \bar{b} + |\bar{a}| np_a \bar{c}$$

Але $|\bar{a}| np_a \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad |\bar{a}| np_a \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c}$.

Отже

$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.

Неважко перевірити, що скалярний добуток має асоціативну властивість по відношенню до скалярного множника.

$\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b})$ (5)

Із визначення скалярного добутку векторів випливає, що

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$$

Отже, скалярний добуток вектора на самого себе дорівнює квадрату довжини вектора. Зокрема

$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1, \quad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1, \quad \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$ (6)

Якщо два вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Навпаки, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, але ні один із векторів не є нуль, то в нуль повинен обертатися косинус кута між векторами, а тому вектори повинні бути перпендикулярні.

Отже, для того щоб два вектори були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.

Оскільки напрямок нульового вектора вважається довільним, то можна вважати нульовий вектор перпендикулярним будь-якому вектору. Тому в наведеній умові перпендикулярності двох векторів немає необхідності особливо вказувати, що ні один із векторів не повинен бути нульовим.

Із умови перпендикулярності отримаємо, зокрема, що

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=0,\quad \bar{i}\cdot\bar{k}=0,\quad \bar{j}\cdot\bar{k}=0 \quad (7)$$

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$, то, використовуючи розподільчу і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості скалярного добутку, одержимо:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=a_xb_x\bar{i}\cdot\bar{i}+a_xb_y\bar{i}\cdot\bar{j}+a_xb_z\bar{i}\cdot\bar{k}+a_yb_x\bar{j}\cdot\bar{i}+a_yb_y\bar{j}\cdot\bar{j}+$$

$$+a_yb_z\bar{j}\cdot\bar{k}+a_zb_x\bar{k}\cdot\bar{i}+a_zb_y\bar{k}\cdot\bar{j}+a_zb_z\bar{k}\cdot\bar{k}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \quad (8)$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків одноіменних координат цих векторів.

Із визначення скалярного добутку двох векторів безпосередньо знаходиться формула для обчислення косинуса кута між двома векторами

$$\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|} \quad (9)$$

§7 Векторний добуток векторів

Визначення. *Векторним добутком двох векторів називається третій вектор, який має довжину, чисельно рівну площі паралелограма, що побудований на заданих векторах, перпендикулярний площині цих векторів і утворює з впорядкованою парою заданих векторів праву трійку.*

Позначається векторний добуток заданих векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ символом $\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]$ (іноді позначають $\left[\bar{a}\bullet\bar{b}\right]$.

Оскільки площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, дорівнює добутку довжини цих векторів і синуса кута між ними, то

$$\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\left(\bar{a},\bar{b}\right) \quad (1)$$

Вкажемо на основні властивості векторного добутку векторів. Відмітимо передусім, що

$$\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]=-\left[\bar{b}\times\bar{a}\right] \quad (2)$$

Дійсно, нехай

$$\bar{c}=\left[\bar{a}\times\bar{b}\right] \ i \ \bar{c}'=\left[\bar{b}\times\bar{a}\right]$$

Оскільки

$$\bar{c}=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\left(\bar{a},\bar{b}\right) \text{ і } \left|\bar{c}'\right|=\left|\bar{b}\right|\left|\bar{a}\right|\sin\left(\bar{b},\bar{a}\right), \qquad \left|\bar{c}\right|=\left|\bar{c}'\right|$$

Вектори $\bar{c}$ і $\bar{c}'$ перпендикулярні одній і тій же площині (площина, визначена векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$). Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}'$ утворюють праву трійку. Праву ж трійку утворюють і вектори $\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$`, тому вектори $\bar{c}$ і $\bar{c}'$ мають однакові довжини, перпендикулярні одній і тій же площині і направлені в протилежні сторони. Це означає, що $\bar{c}=-\bar{c}'$. Отже, при перестановці векторів, що перемножуються, напрямок векторного добутку змінюється на протилежний, а довжина не змінюється.

Можна довести, що векторний добуток двох векторів має сполучну властивість по відношенню до третього – скалярного – співмножника.

$$\lambda\bullet\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]=\left[\left(\lambda\bar{a}\right)\times\bar{b}\right]=\left[\bar{a}\times\left(\lambda\bar{b}\right)\right] \quad (3)$$

і має розподільчу властивість:

$$\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\right]=\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]+\left[\bar{a}\times\bar{c}\right] \quad (4)$$

Із визначення векторного добутку векторів випливає, що векторний добуток колінеарних векторів є завжди нульовий вектор. Зокрема, завжди

$$\left[\bar{a}\times\bar{a}\right]=0.$$

Оскільки вектори $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ взаємно перпендикулярні, мають одиничні довжини і утворюють праву трійку, то

$$\begin{array}{lll}
\left[\bar{i}\times\bar{i}\right]=0 & \left[\bar{i}\times\bar{j}\right]=\bar{k} & \left[\bar{i}\times\bar{k}\right]=-\bar{j} \\
\left[\bar{j}\times\bar{i}\right]=-\bar{k} & \left[\bar{j}\times\bar{j}\right]=0 & \left[\bar{j}\times\bar{k}\right]=\bar{i} \\
\left[\bar{k}\times\bar{i}\right]=\bar{j} & \left[\bar{k}\times\bar{j}\right]=-\bar{i} & \left[\bar{k}\times\bar{k}\right]=0
\end{array} \quad (5)$$

Використовуючи розподільчу і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості векторного добутку, можна отримати формули для обчислення векторного добутку векторів, заданих шляхом розкладу по ортонормованому базису:

$$\begin{aligned}
\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]&=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\times\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=a_xb_x\left[\bar{i}\times\bar{i}\right]+a_xb_y\left[\bar{i}\times\bar{j}\right]+a_xb_z\left[\bar{i}\times\bar{k}\right]+a_yb_x\left[\bar{j}\times\bar{i}\right]+\\
&+a_yb_y\left[\bar{j}\times\bar{j}\right]+a_yb_z\left[\bar{j}\times\bar{k}\right]+a_zb_x\left[\bar{k}\times\bar{i}\right]+a_zb_y\left[\bar{k}\times\bar{j}\right]+a_zb_z\left[\bar{k}\times\bar{k}\right]=a_xb_y\bar{k}+a_xb_z\left(-\bar{j}\right)+a_yb_x\left(-\bar{k}\right)+\\
&+a_yb_z\bar{i}+a_zb_x\bar{j}+a_zb_y\left(-\bar{i}\right)=\bar{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\bar{j}\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\bar{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right),\\
\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]&=\bar{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\bar{j}\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\bar{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)
\end{aligned} \quad (6)$$

Важливою геометричною задачею, яка розв’язується з допомогою введеної операції, є обчислення площини трикутника по координатах його вершин.

Нехай задані координати вершин трикутника *A, B, C*. Знаючи їх, знаходимо $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Площа трикутника *ABC* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Отже,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\right| \quad (7)$$

Приклад. *A(1, -2,0); B(2, 1, -1); C(0, 3, 1).* Знайти S_{ABC}.

Розв'язок

$$\overline{AB}=\{1,\ 3,\ -1\};\quad \overline{AC}=\{-1,\ 5,\ 1\}$$

$$\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]=\left[3\cdot 1-(-1)\cdot 5\right]\bar{i}+\left[(-1)\ (-1)-1\cdot 1\right]\bar{j}+\left[1\cdot 5-3(-1)\right]\bar{k}=8\bar{i}+8\bar{k},$$

$$\left|\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\right|=8\sqrt{2}$$

$$S_{ABC}=4\sqrt{2}$$

Нарешті, формулу для обчислення векторного добутку векторів (6) зручніше записувати через визначник

$$\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\quad (8),$$

розкладаючи який по елементах першого рядка, отримаємо формулу (6).

§8 Мішаний добуток векторів

Оскільки векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є вектор, то можливо розглядати і скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на $\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]$ і векторний добуток $\bar{a}$ на $\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]$. В нашому курсі ми розглянемо тільки перший із цих добутків.

Визначення. *Скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.*

Отже, мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є вираз $\bar{a}\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]$ і представляє собою, очевидно, скаляр.

З'ясуємо геометричний зміст введеного поняття. Нехай точка *O* є загальний початок трьох некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

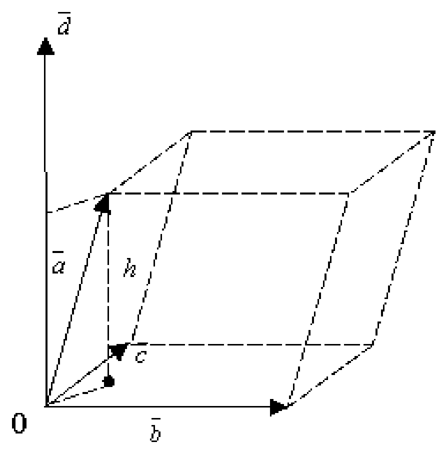

Рис.13

Побудуємо на заданих векторах паралелепіпед (рис.13) і знайдемо вектор $\bar{d} = [\bar{b} \times \bar{c}]$. Із визначення скалярного добутку векторів, отримаємо

$$\bar{a}[\bar{b} \times \bar{c}] = \bar{a}\bar{d} = |\bar{d}| np_{\bar{d}} \bar{a}$$

Але оскільки вектор $\bar{d}$ перпендикулярний площині векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, то проекція вектора $\bar{a}$ на вісь, направлену по вектору $\bar{d}$, або дорівнює висоті паралелепіпеда, якщо ця проекція додатна (тобто, якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку), або дорівнює висоті, взятій зі знаком мінус, якщо ця проекція від‘ємна (тобто, якщо три заданих вектора утворюють ліву трійку).

Отже, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об‘єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, якщо вони утворюють праву трійку, і дорівнює об‘єму паралелепіпеда, взятому зі знаком мінус, якщо вектори утворюють ліву трійку.

Якщо у вибраній трійці їх переставити, то паралелепіпед, побудований на цих векторах, очевидно, не зміниться. Зокрема, не зміниться і абсолютна величина мішаного добутку. Легко відмітити, що при круговій перестановці векторів права трійка векторів залишається правою, а ліва лівою. Тому при круговій перестановці векторів мішаний добуток векторів не змінюється.

Отже,

$$\bar{a}[\bar{b} \times \bar{c}] = \bar{c}[\bar{a} \times \bar{b}] = \bar{b}[\bar{c} \times \bar{a}] \quad (1)$$

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\},\quad \bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

$$\bar{d} = \{b_y c_z - b_z c_y,\ b_z c_x - b_x c_z,\ b_x c_y - b_y c_x\},$$

$$\bar{a}\left[\bar{b}\times\bar{c}\right] = a_x\left(b_y c_z - b_z c_y\right) + a_y\left(b_z c_x - b_x c_z\right) + a_z\left(b_x c_y - b_y c_x\right)$$

Якщо задані три вектора компланарні, то їх мішаний добуток, очевидно, дорівнює нулю. Навпаки, якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то ці вектори обов'язково компланарні. Дійсно, якщо скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{d}$ дорівнює нулю, то вектор $\bar{d}$ перпендикулярний вектору $\bar{a}$; але $\bar{d}$ перпендикулярний також площині векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Таким чином вектор $\bar{a}$ лежить в площині векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Звідси, вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні.

Отже, рівність нулю мішаного добутку трьох векторів є необхідна і достатня умова їх компланарності.

Формулу (2) можна записати, використовуючи визначник третього порядку

$$\bar{a}\left[\bar{b}\times\bar{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3),$$

розкладаючи який по елементах 1-го рядка, отримаємо формулу (2).

II. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ

1.102. В трикутнику *ABC* сторона *AB* точками *M* і *N* розділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{NB}\right|$. Знайти вектор $\overline{CM}$, якщо $\overline{CA} = \bar{a},\ \overline{CB} = \bar{b}$.

Δ Маємо $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$. Звідси, $\overline{AM} = \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{3}$.

Отже $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, тоді $\overline{CM} = \bar{a} + \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{3} = \dfrac{\bar{b} + 2\bar{a}}{3}$.

1.103. В трикутнику *ABC* пряма *AM* є бісектрисою кута *BAC*, причому точка *M* лежить на стороні *BC*. Знайти $\overline{AM}$, якщо $\overline{AB} = \bar{b},\ \overline{AC} = \bar{c}$.

Δ Маємо $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. Із властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника випливає, що $|BM| : |MC| = |\bar{b}| : |\bar{c}|$, тобто $|\overline{BM}| : |\overline{BC}| = |\bar{b}| : (|\bar{b}| + |\bar{c}|)$.

Звідси одержуємо $$\overline{BM} = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}(\bar{c} - \bar{b}).$$

Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, тоді $$\overline{AM} = \bar{b} + \frac{|\bar{b}|}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}(\bar{c} - \bar{b}) = \frac{|\bar{b}|\bar{c} + |\bar{c}|\bar{b}}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}.$$

1.104. Задані точки *A(1, 2, 3)* і *B(3, -4, 6)*. Знайти довжину, напрямок і норму вектора $\bar{a} = \overline{AB}$.

Δ Проекціями вектора $\overline{AB}$ на осі координат є різниця відповідних координат точок *B* і *A*: $a_x=3-1=2$, $a_y=-4-2=-6$, $a_z=6-3=3$. Звідси $\bar{a} = \overline{AB} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}$.
Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$ $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\bar{a}x}) = \frac{2}{7};\ \cos\beta = \cos(\widehat{\bar{a}y}) = -\frac{6}{7};\ \cos\gamma = \cos(\widehat{\bar{a}z}) = \frac{3}{7}$$

Шуканий одиничний вектор має вигляд $$\overline{a_0} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}}{7} = \frac{2}{7}\bar{i} - \frac{6}{7}\bar{j} + \frac{3}{7}\bar{k}.$$

1.105. Заданий трикутник: *A(1, 1, 1), B(5, 1,-2), C(7, 9, 1)*. Знайти координати точки *D* перетину бісектриси кута *A* зі стороною *CB*.

Δ Знайдемо довжини сторін трикутника, що утворюють кут *A*:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5$$

Звідси $|CD| : |DB| = 10 : 5 = 2$, оскільки бісектриса ділить сторону *CB* на частини, пропорційні прилеглим сторонам. Таким чином,

$x_D = \dfrac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \dfrac{7 + 2\cdot 5}{1+2} = \dfrac{17}{3},\ y_D = \dfrac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \dfrac{9 + 2\cdot 1}{1+2} = \dfrac{11}{3},\ z_D = \dfrac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \dfrac{1 + 2(-2)}{1+2} = -1$
шукана точка *D(17/3, 11/3, -7).*

1.106. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A(2; -4; 5)* і *B(-3; 2; 7).*

Δ Нехай *M* – шукана точка. Тоді $|AM| = |MB|$. Оскільки точка *M* лежить на осі *x*, то її координати *(x, 0, 0)*.

Отже $|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2},\ |MB| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}$ $(x-2)^2+41=(x+3)^2+53$;
або $10x=-17$, тобто $x=-1,7$.

Звідси *M(-1,7; 0; 0).*

1.107. Задані вектори $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k},\ \bar{b} = 6\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

Обчислити скалярні добутки:

$1)\ \bar{a}\cdot\bar{b},\ 2)\ \sqrt{\bar{a}^{-2}},\ 3)\ \sqrt{\bar{b}^{-2}},\ 4)\ (2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b}),\ 5)\ (\bar{a}+\bar{b})^2$

Δ Знаходимо:

$1)\ \bar{a}\cdot\bar{b} = 4\cdot 6 + (-2)(-3) + (-4)(2) = 24 + 6 - 8 = 22;$

$2)\ \overline{a^2} = \bar{a}\cdot\bar{a} = 4\cdot 4 + (-2)(-2) + (-4)(-4) = 16 + 4 + 16 = 36;\quad \sqrt{\bar{a}^{-2}} = 6$

$3)\ \overline{b^2} = \bar{b}\cdot\bar{b} = 6\cdot 6 + (-3)(-3) + 2\cdot 2 = 36 + 9 + 4 = 49;\quad \sqrt{\bar{b}^{-2}} = 7$

$4)\ (2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b}) = 2\bar{a}^{-2} + 4\bar{a}\bar{b} - 3\bar{a}\bar{b} - 6\bar{b}^{-2} = 2\bar{a}^{-2} + \bar{a}\bar{b} - 6\bar{b}^{-2} =$
$= 2\cdot 36 + 22 - 6\cdot 49 = 2(36 + 11 - 147) = -200$

$5)\ (\bar{a}+\bar{b})^2 = \bar{a}^{-2} + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^{-2} = 36 + 2\cdot 22 + 49 = 129.$ ∧

1.108. Обчислити, при якому значенні α вектори $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}\ \ i\ \ \bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \alpha\bar{k}$
взаємно перпендикулярні.

Δ Знаходимо скалярний добуток цих векторів: $\bar{a}\cdot\bar{b} = \alpha - 6 - 2\alpha$; Оскільки $\bar{a}\perp\bar{b}$, тоді $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$.

Звідси $-\alpha-6=0;\ \alpha=-6$.

1.109. Обчислити кут між векторами $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}$ і $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+6\bar{k}$.

Δ Оскільки $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$, тоді $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

Маємо $\bar{a}\cdot\bar{b}=2(-3)+(-4)2+4\cdot 6=10$

$|\bar{a}|=\sqrt{4+16+16}=6;\ |\bar{b}|=\sqrt{9+4+36}=7$. Отже $\cos\varphi=\dfrac{10}{6\cdot 7}=\dfrac{5}{21}$, і $\varphi=\arccos\dfrac{5}{21}$. ^

1.110. Знайти вектор $\bar{x}$, який перпендикулярний до векторів $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}$ і $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+6\bar{k}$ та відповідає умові $\bar{x}\left(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}\right)=-6$.

Δ Оскільки $\bar{x}\perp\bar{a}$ і $\bar{x}\perp\bar{b}$, тоді $\bar{x}\cdot\bar{a}=0$ і $\bar{x}\cdot\bar{b}=0$. Шуканий вектор $\bar{x}$ має координати $\bar{x}=x_1\bar{i}+x_2\bar{j}+x_3\bar{k}$.

Отже

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1-2x_2+3x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=-6\end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему, маємо

$\bar{x}=\{-3,\ 3,\ 3\}$ тобто $\bar{x}=-3\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$.

1.111. Задані вектори $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k},\ \bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$,

2) $\left[\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\bar{b}\right]$

3) $\left[\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\right]$.

Δ Знаходимо:

1) $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k};$

2) $\left[\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\bar{b}\right]=\left[2\bar{a}\cdot\bar{b}\right]+\left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]=2\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=10\bar{i}+2\bar{j}+14\bar{k};$

3) $\left[\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\right]=4\left[\bar{a}\cdot\bar{a}\right]+2\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]-2\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]-\left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]=4\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=20\bar{i}+4\bar{j}+28\bar{k};$ ∧

1.112. Задані вершини трикутника *A(1; 2; 0), B(3; 0; -3)* і *C(5; 2; 6)*.

Обчислити його площу.

Δ Знаходимо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

$$\overline{AB}=(3-1)\bar{i}+(0-2)\bar{j}+(-3-0)\bar{k}=2\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}$$
$$\overline{AC}=(5-1)\bar{i}+(2-2)\bar{j}+(6-0)\bar{k}=4\bar{i}+6\bar{k}$$

Площа трикутника *ABC* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, а тому знаходимо векторний добуток цих векторів

$$\left[\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k}$$

Звідси

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{144+576+64}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=14\ \textit{кв.од.}$$

1.113. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1,\ (\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = 30^0$.

Δ Маємо

$$\left[(\bar{a}+3\bar{b})(3\bar{a}+\bar{b})\right] = 3\left[\bar{a}\bar{a}\right] + \left[\bar{a}\bar{b}\right] + 9\left[\bar{b}\bar{a}\right] + 3\left[\bar{b}\bar{b}\right] = 3\cdot 0 + \left[\bar{a}\bar{b}\right] - 9\left[\bar{a}\bar{b}\right] + 3\cdot 0 = -8\left[\bar{a}\bar{b}\right]$$

(оскільки $\left[\bar{a}\bar{a}\right] = \left[\bar{b}\bar{b}\right] = 0$ $\qquad$ $\left[\bar{b}\bar{a}\right] = -\left[\bar{a}\bar{b}\right]$)

Звідси $S = 8\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right| = 8\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30^0 = 4\,кв.од.$ ∧

1.114. Знайти мішаний добуток векторів

$\bar{a} = \{1;\ -1;\ -3\},\ \bar{b} = \{-2;\ 2;\ 1\},\ \bar{c} = \{3;\ -2;\ 5\}$.

Δ $$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 13 + 6 = 5$$

1.115. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами *A(-1; 0; 2), B(2; 1; 1), C(3; 0; -1), D(3; 2; 2).*

Δ Знайдемо вектори $\overline{AB},\ \overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які співпадають з ребрами піраміди і сходяться у вершині *A*: $\overline{AB} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k},\ \overline{AC} = 4\bar{i} - 3\bar{k},\ \overline{AD} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$. Знаходимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2. \qquad V_{парал.} = 2.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ паралелепіпеда (рис.14), побудованого на векторах $\overline{AB},\ \overline{AC}$ і $\overline{AD}$, тоді

$$V_{пірам.} = \frac{1}{3}$$

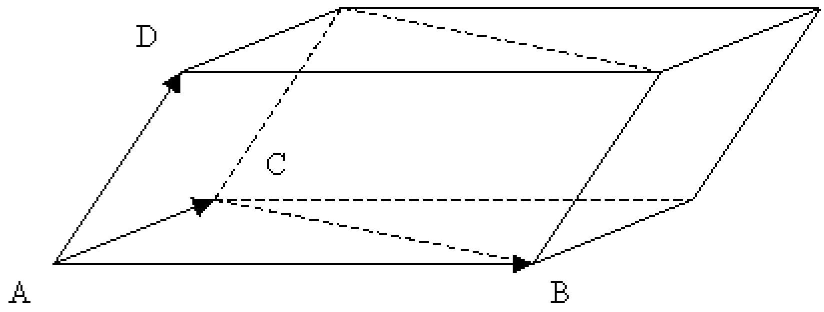

Рис.14

1.116. Показати, що вектори $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k},\ \overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k},\ \overline{c} = \overline{i} + 9\overline{j} - 11\overline{k}$ компланарні.

Δ Знаходимо мішаний добуток векторів

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -32 + 42 - 10 = 0$$

Оскільки $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, тоді задані вектори компланарні.

Глава III: Аналітична геометрія

§1 Відповідність між геометричними образами та рівняннями

Як вже відомо із елементарного курсу математики, метод координат дає можливість встановити відповідність між деякими геометричними образами та рівняннями або їх нерівностями. В шкільних курсах розглядалась прямокутна декартова система координат на площині *xy* (тобто на площині, для всіх точок якої *z=0*) і говорилося про рівняння прямої, про рівняння параболи, про графік $y = \frac{1}{x}$ і т.д. Тепер, після введення прямокутної декартової системи координат в просторі, розглянемо це питання з більш загальних позицій.

Нехай в просторі задана прямокутна декартова система координат і потрібно встановити залежність між координатами будь-якої точки, що знаходиться на заданій відстані *R* від загальної точки*C(a, b, c).*

Нехай *Q* є множина таких точок, тобто множина точок сфери *S* з центром в *C* і радіусом *R*. Нехай *M(x, y, z)* – довільна точка множини *Q*.
Тоді $\left|\overline{CM}\right| = R, \quad \overline{CM} = \{x-a, y-b, z-c\}$, і тому

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Кожна точка множини *Q*, тобто кожна точка сфери, має координати, які відповідають рівнянню (1). Якщо точка *N* лежить не на сфері, а всередині неї, то $\left|\overline{CN}\right| < R$, якщо точка *N* ззовні сфери, то $\left|\overline{CN}\right| > R$. Рівняння (1) називається тому рівнянням, що відповідає заданій сфері, або просто рівнянням заданої сфери.

Визначення. *Рівнянням, що відповідає заданій множині точок, називається рівняння, якому відповідають координати всіх точок множини, і не відповідають координати точок, що не належать заданій множині.*

Визначення. *Множиною точок, що відповідає заданому рівнянню, називається множина тих, і тільки тих точок, координати яких відповідають заданому рівнянню.*

Розглянемо множину точок, які знаходяться на рівних відстанях від точки *A(1, 3, -2)* і від точки *B(-1, 1, 0)* (ця множина точок є площина, яка проходить через середину відрізку *AB* і перпендикулярна до вектора $\overline{AB}$). Нехай *M(x, y, z)* довільна точка заданої множини. Згідно умови $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BM}\right|$, і тому $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2}$. Піднесемо обидві частини в квадрат і приведемо подібні члени, одержимо $x + y - z - 3 = 0$.

Якщо точка *N* не належить заданій множині точок $\left|\overline{AN}\right| \neq \left|\overline{BN}\right|$, тоді

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2} \neq \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2}$$

і

$$x + y - z - 3 \neq 0$$

Таким чином, рівнянням, що відповідає заданій множині, є рівняння $x + y - z - 0 = 0$.

Розглянемо множину *Q* точок, що знаходяться на заданій відстані *R* від осі *Z*. Задана множина точок є нескінченна циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі *Z* і знаходяться від неї на відстані*R* (рис.15).

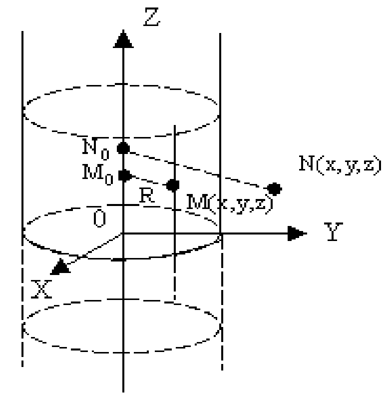

Рис.15

Складемо рівняння цієї поверхні. Нехай точка *M(x, y, z)* довільна точка множини *Q*; точка M_0 – проекція точки *M* на вісь *Z* – має координати *(0, 0, Z)*. Згідно умови

$\left|\overline{M_0M}\right| = R$ і тому $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ або

$x^2 + y^2 = R^2$ (2)

Отже, координати будь-якої точки множини *Q* задовольняють рівнянню (2). Нехай тепер точка *N* - яка-небудь точка, що не належить множині *Q*, і N_0 її проекція на вісь *Z*. Тоді $\left|\overline{N_0N}\right| \neq R$, і тому $x^2 + y^2 \neq R^2$. Ми довели тим самим, що рівняння (2) є рівнянням, що відповідає множині *Q*, тобто рівнянням нескінченної циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі *Z* і знаходяться від неї на відстані *R*.

Розглянемо множину *Q* точок площини, перпендикулярної осі *Z*, що проходить через точку *M0(0, 0, 2)*. Оскільки ця площина паралельна площині *XY*, то всі її точки мають одну і ту ж аплікату *Z=2*. Якщо ж візьмемо яку-небудь точку *N(x, y, z)*, що не лежить на заданій площині, то для неї $Z \neq 2$. Таким чином рівняння *Z=2* є рівнянням заданої поверхні.

Із наведених прикладів видно, що рівнянням, в які входять три, дві і навіть одна невідома, в просторі відповідає деяка поверхня. Виключенням є випадки, коли поверхня “вироджується” в окремі точки, в лінію або взагалі представляє собою пусту множину точок. Так, наприклад, рівнянню $x^2+y^2+z^2=0$ відповідає одна точка – початок координат, рівнянню $x^2+y^2=0$ відповідає вісь *Z*, рівнянню $x^2+y^2+z^2+1=0$ - пуста множина точок.

Оскільки будь-яка лінія може бути представлена як перетин двох поверхонь, то лінія в просторі може бути задана системою двох рівнянь. Так, наприклад, системі рівнянь

$$\begin{cases} Z=0 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

відповідає множина точок, що належить як площині *Z=0*, так і нескінченній циліндричній поверхні $x^2+y^2=R^2$, тобто коло радіусом *R*, яке має центр на початку координат і лежить в площині*Z=0*.

В багатьох задачах, особливо в задачах, пов’язаних з рухом, лінії задаються дещо по іншому. Нехай матеріальна точка рухається по якійсь лінії. Кожному моменту часу *t* в процесі руху відповідає деяке визначене положення точки *M*, що рухається. Нехай в просторі задана прямокутна декартова система координат. Тому кожному значенню *t* в процесі руху відповідає деякий радіус – вектор $\overline{OM}=\bar{\varphi}(t)$. Тим самим задана векторна функція $\bar{\varphi}(t)$. Векторне рівняння $\bar{r}=\bar{\varphi}(t)$ називають параметричним векторним рівнянням траєкторії.

Нехай $\bar{r}=\{x,y,z\}$ і $\bar{\varphi}(t)=\{\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \varphi_3(t)\}$. Тоді для координат точки *M(x, y, z)*, що рухається, маємо параметричне скалярне рівняння.

$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t)$ (3)

Виключаючи *t* із перших та із останніх двох рівнянь системи (3), одержимо два рівняння, які зв’язують координати *x, y, z* довільної точки траєкторії, тобто рівняння двох поверхонь, що перетинаються по цій траєкторії.

В нашому прикладі параметром (допоміжною змінною), через яку виражався радіус-вектор будь-якої точки лінії, був час. Але параметром може бути не тільки час, але і довжина пройденої матеріальною точкою дуги, кут повороту і інші фізичні чи геометричні змінні. Важливо тільки те, щоб по кожному (в деякому проміжку, що розглядається) значенню параметра повністю визначалось положення змінної точки.

В цілому ряді задач поряд із завданням поверхонь і ліній необхідно розглядати і області, обмежені цими поверхнями або лініями.

Як правило, ці області можуть бути задані з допомогою одної або декількох нерівностей.

Нехай розглядається множина точок, які їй належать, в середині сфери радіусом R з центром в $M_0(a, b, c)$ і нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї множини. Очевидно

$$\left|\overline{M_0M}\right| < R$$

і тому

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < R^2$$

Всі точки заданої множини і тільки точки, які їй належать, мають координати, що відповідають одержаній нерівності. Тому вона може бути названа нерівністю, яка відповідає заданій множині точок.

Множині точок, які знаходяться між двома площинами, що перпендикулярні осі x і перетинають цю вісь в точках $A(1, 0, 0)$ і $B(3, 0, 0)$, відповідає система нерівностей $1<x<3$. Множині точок, які знаходяться між концентричними колами з центром на початку координат, радіусами $R_1=2$ *і* $R_2=3$ і лежать в площині xy, відповідає система умов:

$z = 0, \quad 4 < x^2 + y^2 < 9$ і т.д.

§ 2 Лінійні образи - площина і пряма

Вивчення геометричних образів з допомогою метода координат природно почати з найпростіших об`єктів - площин і прямих. Покажемо по-перше, що цим об`єктам відповідає рівняння 1-го степеню.

Теорема. Будь-якій площині в просторі із заданою прямокутною декартовою системою координат відповідає рівняння 1-го степеню і будь-якому рівнянню 1-го степеню в просторі відповідає деяка площина.

Доведення. Нехай в просторі із заданою прямокутною декартовою системою координат вибрана деяка площина Q. Візьмемо на цій площині будь-які три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, які не лежать на одній прямій. Як відомо, такі точки повністю визначають площину, що розглядається. Нехай $M(x,y,z)$ - довільна точка площини Q. Розглянемо три вектори $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$. Оскільки вони лежать в одній площині Q, то їх змішаний добуток повинен дорівнювати нулю для всіх точок M, що належать площині Q (і тільки для цих точок).

Таким чином, рівняння

$\overline{M_1M} \cdot [\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}] = 0$ (1)

є рівнянням площини Q, що розглядається. Оскільки точки M_1, M_2, M_3 не лежать на одній прямій, то вектори $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ не колінеарні, і векторний добуток не може бути нульовим вектором. Позначимо цей векторний добуток через $\overline{N}$={A,B,C}. Як було вказано вище, хоча б одне із чисел A,B,C відмінне від нуля. Разом з тим вектор $\overline{N}$ перпендикулярний до площини векторів і, отже, представляє собою вектор, перпендикулярний площині Q (вектор нормалі до заданої поверхні). Оскільки $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ (2)

Перша половина теореми вже доведена: будь-якій площині відповідає рівняння 1-го степеню. Ще раз зазначимо, що в цьому рівнянні (x_1,y_1,z_1) - координати заданої точки площини, (x,y,z) - координати довільної (змінної) точки площини, A,B,C - коефіцієнти при змінних координатах - координати вектора, перпендикулярного площині.

Рівняння (2) можна переписати у вигляді

$Ax+By+Cz+D=0$ (3)

Це рівняння називається *загальним рівнянням площини*.

Доведемо тепер, що будь-якому рівнянню 1-го степеню з трьома невідомими в просторі із заданою прямокутною декартовою системою координат відповідає деяка площина.

Нехай задане загальне рівняння 1-го степенz з трьома невідомими Ax+By+Cz+D=0, причому хоча б одне із чисел A,B,C відмінне від нуля. Нехай, наприклад, $C \neq 0$, Задамо довільно два числа x_0і y_0 і знайдемо z_0 так, щоб виконувалась рівність

$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Тоді $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Підставляючи у початкове рівняння обчислене значення D, одержимо рівність

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Побудуємо вектор $\overline{N}=\{A,B,C\}$ і через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ проведемо площину, перпендикулярну вектору $\overline{N}$. Нехай M(x,y,z) - довільна точка цієї площини. Оскільки вектор $\overline{M_0M}$ для будь-якої точки M, що лежить на побудованій площині (і тільки для точок цієї площини), перпендикулярний $\overline{N}$,
тоді $\overline{M_0M}\cdot\overline{N}=0$, і , отже, рівняння

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

а тому і рівнозначне йому рівняння.

$Ax+By+Cz+D=0$ є рівнянням площини.

Таким чином, ми не тільки довели, що початковому рівнянню відповідає площина, але також встановили, що це за площина: це площина, перпендикулярна вектору $\overline{N}=\{A,B,C\}$ і проходить через точку (x_0,y_0,z_0) таку, що $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Відмітимо деякі частинні випадки загального рівняння площини. Якщо C=0, тобто загальне рівняння площини має вигляд Ax+By+D=0, тоді проекція вектора $\overline{N}$ на вісь Z дорівнює нулю і , отже, вектор $\overline{N}$ перпендикулярний осі Z. Але $\overline{N}$ перпендикулярний заданій площині Q. Звідси, задана площина паралельна осі Z. Аналогічно, рівнянню Ax+Cz+D=0 відповідає площина, паралельна осі*y*, рівнянню By+Cz+D=0 - площина, паралельна осі x.

Якщо D=0, тобто рівняння має вигляд Ax+By+Cz=0, тоді задана площина проходить через початок координат.

Якщо A=B=0, тобто рівняння має вигляд Cz+D=0, тоді площина, як показано вище, паралельна осі *x* та осі *y*, а тому паралельна площині *xy* (і, отже, перпендикулярна осі *z*).

Якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт $D\neq0$, то, розділивши всі члени рівняння на -D, рівняння площини можна привести до вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (3')$$

(де a=-D/A, b=-D/B, c=-D/C). Це рівняння називається рівнянням площини у відрізках: в ньому a,b,c - відповідно абсциса, ордината і апліката точок перетину площини з осями 0x, 0y, 0z.

Так само можна розглянути і всі інші можливі частинні випадки.

Тепер розглянемо задачу про обчислення кута між двома площинами. Кут між двома площинами, точніше один із суміжних кутів між двома площинами, може бути обчислений як кут між нормалями до цих площин. Якщо площини задані своїми загальними рівняннями:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

тоді їх нормальні вектори мають вигляд $\overline{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\overline{N}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ і тому кут θ між площинами знаходиться по формулі:

$$\cos\theta=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Площини паралельні тоді і тільки тоді, коли $\overline{N_2}=\lambda\overline{N_1}$ і, отже, $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2=\lambda C_1$,

або

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

Площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}=0$ і, отже

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Пряма лінія в просторі може бути визначена у відповідності із вказаним у минулому параграфі, як перетин двох площин, тобто як множина точок, які визначаються системою двох рівнянь 1-го степеню

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\quad(5)$$

Виділимо особливо той випадок, коли одна із цих площин є площина xy, і , отже, пряма, що розглядається, лежить в площині *xy*. В цьому випадку система (5) може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} z = 0 \\ Ax + By + D = 0 \end{cases} \quad (6)$$

і представляє собою перетин площини *xy* з площиною Ax+By+D=0, паралельною осі z.

Розглянемо вектор $\overline{N}$={A,B,0}, що лежить в площині *xy* і перпендикулярний до площини Ax+By+D=0. Цей вектор перпендикулярний до прямої, що визначається системою (6), і називається нормальним вектором цієї прямої.

Будемо тепер розглядати тільки точки площини *xy* і розв`язувати задачі, що відносяться тільки до геометричних образів, які лежать на цій площині. Тоді можна треті координати точок і векторів навіть і не записувати, приймаючи до уваги, що вони повинні дорівнювати нулю.

Як уже відзначалося вище, рівнянню Ax+By+D=0 в площині z=0 відповідає пряма. А тому в аналітичній геометрії на площині рівняння

Ax+By+D=0 (7)

називають загальним рівнянням прямої. Нормальний вектор цієї прямої запишемо тепер у формі $\overline{N}$={A,B}.

Якщо A=0, тоді пряма паралельна осі абсцис, якщо B=0 - осі ординат.

Нехай $B \neq 0$ *. Тоді загальне рівняння прямої приводиться до вигляду* $y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$*. Вважатимемо* $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{D}{B} = b$*, одержимо рівняння прямої у вигляді*

y=k*x*+b (8)

З`ясуємо геометричний зміст коефіцієнтів k і b. Розглянемо вектор $\bar{s}$={-B,A}. Оскільки $\bar{s} \cdot \overline{N} = (-B) \cdot A + AB = 0$, то вектор $\bar{s}$ направлений вздовж прямої Ax+By+D=0. Він називається направляючим вектором прямої. Позначимо через φ кут між вектором $\bar{s}$ і віссю x (рис.16).

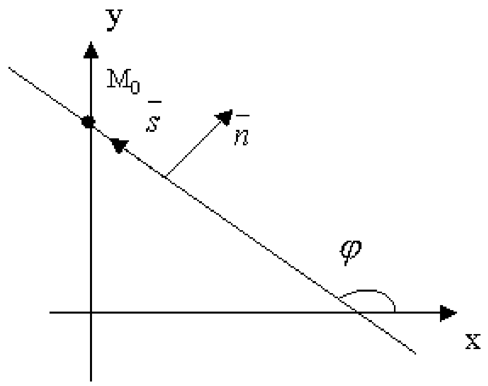

рис.16

Тоді

$$np_x\bar{s} = |\bar{s}|\cos\varphi = -B, \quad np_y\bar{s} = |\bar{s}|\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = |\bar{s}|\sin\varphi = A$$

звідси

$$tg\varphi = -\frac{A}{B} \quad i \quad k = -\frac{A}{B} = tg\varphi$$

Знайдемо точку M_0 перетину прямої (8) з віссю ординат. Оскільки абсциса точки M_0 дорівнює нулю, то її ордината дорівнює b.

Таким чином, в рівнянні (8) коефіцієнт k є тангенс кута, між заданою прямою і віссю абсцис (вибирається кут у верхній напівплощині), а вільний член b - ордината точки перетину прямої з віссю ординат. Число k називається **кутовим коефіцієнтом** прямої, а b - **початковою ординатою**. Саме ж рівняння (8) називається рівнянням прямої (яка лежить в площині xy) з кутовим коефіцієнтом.

Оскільки при виводі рівняння (8) ми вважали тільки, що $B \neq 0$, то в такому вигляді можна записати рівняння будь-якої прямої (в площину xy), крім прямих, паралельних осі ординат.

Найпростішими і разом з тим основними задачами, пов`язаними з прямими лініями на площині, є визначення точки перетину двох прямих та обчислення кута між прямими. Оскільки будь-якій прямій на площині xy відповідає рівняння 1-го степеню з двома невідомими, і точка перетину двох прямих повинна належати кожній із цих прямих, то для визначення точки перетину двох прямих необхідно, очевидно, розв`язати відповідну систему рівнянь.

Для обчислення кута між двома прямими, що лежать в площині xy, можна використати методи обчислення кута між двома векторами.

Нехай прямі задані своїми загальними рівняннями:

$A_1x+B_1y+D_1=0$, $A_2x+B_2y+D_2=0$

Як було показано вище, направляючими векторами цих прямих є вектори

$\overline{s_1}=\{-B_1,A_1\}$ і $\overline{s_2}=\{-B_2,A_2\}$

А тому косинус кута між прямими (точніше косинус одного із кутів між прямими) обчислюємо по формулі

$$\cos\theta = \frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{|\overline{s_1}||\overline{s_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \quad (9)$$

Зокрема, якщо дві прямі взаємно перпендикулярні, то $\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}=0$ або в скалярній формі

$A_1A_2+B_1B_2=0$

Вірне, звичайно, і обернене твердження: якщо $A_1A_2+B_1B_2=0$, то $\cos\theta=0$, і прямі перпендикулярні.

Таким чином, рівність $A_1A_2+B_1B_2=0$ є умова, необхідна і достатня для перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі паралельні, то $\overline{s_2}=\lambda\overline{s_1}$ і тоді $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, тобто коефіцієнти при змінних координатах в рівняннях паралельних прямих відповідно пропорційні

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

Якщо прямі задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$,

то

$A_1=k_1$, $B_1=-1$, $A_2=k_2$, $B_2=-1$,

і умова перпендикулярності двох прямих набуває вигляду:

$k_1k_2=-1$ або $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (10)

Таким чином, для перпендикулярності двох прямих (не паралельних осям координат) необхідно і достатньо, щоб їх кутові коефіцієнти були обернені по величині і протилежні по знаку.

Повернемося до питань геометрії в просторі.

Пряму можливо задати не тільки як перетин двох площин, але і двома точками, що лежать на ній, або, що фактично теж саме, точкою, що лежить на прямій, і вектором, колінеарним прямій.

Таким чином, нехай задана точка M_0, що лежить на прямій L, і вектор $\bar{s}$, колінеарний прямій L. Нехай О - початок координат і М - довільна (змінна) точка заданої прямої (рис.17).

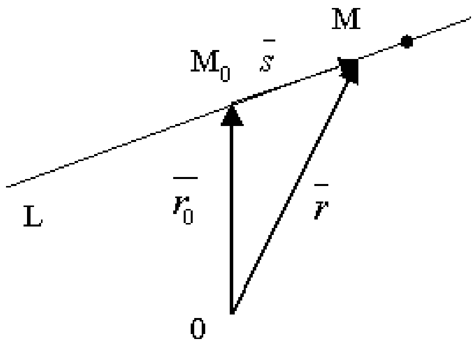

Рис.17

Позначимо через $\overline{r_0}$ радіус - вектор $\overline{OM_0}$ і через $\bar{r}$ радіус - вектор $\overline{OM}$. Оскільки вектор $\overline{M_0M}$ колінеарний вектору $\bar{s}$, то для будь-якого положення точки М на L існує таке дійсне число t, що $\overline{M_0M}=t\bar{s}$. Змінюючи параметр t від -? до +? , одержимо будь-яку точку прямої L і тільки точки прямої L. А тому, замінивши $\overline{M_0M}$ через $\bar{r}-\overline{r_0}$, одержимо, що рівняння

$\bar{r}-\overline{r_0}=t\bar{s}$ (11)

є векторним рівнянням прямої, що розглядається.

Природно назвати це рівняння *параметричним рівнянням прямої у векторній формі.*

Нехай точка M_0 має координати x_0, y_0, z_0, а вектор $\bar{s}$ координати l,m,n. Позначимо через x,y,z координати довільної (змінної) точки M нашої прямої. Тоді параметричне векторне рівняння (11) запишеться в такій скалярній формі:

$x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ (12)

У випадку, якщо задана пряма лежить в площині *xy*, числа z і n дорівнюють нулю, а тому рівняння (12) набуде вигляду

$x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=0$

Якщо $m\neq 0$, тобто пряма не перпендикулярна до осі x, тоді, виключивши параметр t, одержимо рівняння z=0, $y-y_0=k(x-x_0)$, де $k=\frac{m}{\ell}=tg\varphi$ і φ - кут між направляючим вектором $\bar{s}$ і віссю абсцис.

Таким чином, в площині z=0 рівняння

$y-y_0=k(x-x_0)$ (13)

є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, і яка має кутовий коефіцієнт k.

Якщо пряма не перпендикулярна ні до одній із координатних осей, тобто числа l,m,n відмінні від нуля, тоді, виключаючи із системи (12) параметр t ,одержимо рівняння

$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ (14),

яке називається *канонічним рівнянням прямої.*

Розглянемо окремо кожне із рівнянь системи (14). Рівняння $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}$, яке випливає із сказаного на початку цього параграфу, відповідає площині, паралельній осі аплікат. Разом з тим, всі точки прямої, що розглядається, повинні лежати в цій площині, або площина містить в собі задану пряму. Оскільки площина перпендикулярна до площини xy, то вона проектує задану пряму на цю площину. Аналогічно рівняння $\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ відповідає площині, яка проектує задану пряму на площину *yz*, а рівняння $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{z-z_0}{n}$ є наслідком двох перших, визначає площину, яка проектує задану пряму на площину *yz*.

Важливою задачею, пов`язаною із взаємним положенням прямої і площини в просторі, є задача про обчислення кута між прямою і площиною.

Нехай L - задана пряма рівнянням

$$\frac{x-xo}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

і Q - задана площина, рівняння якої

Ax+By+Cz+D=0

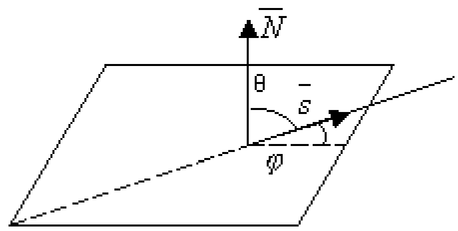

Рис.18

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою та її проекцією на площину. А тому, кут φ між прямою і площиною не більше $\frac{\pi}{2}$. Нехай $\bar{s}$ - направляючий вектор прямої, а $\bar{n}$ - вектор нормалі до площини (рис.18).

$$\sin\varphi=|\cos(\bar{n},\bar{s})|=\frac{\overline{N}\cdot\bar{s}}{|\bar{n}||\bar{s}|} \quad (15)$$

Оскільки

$\bar{s}=\{\ell,m,n\}$ i $\overline{N}=\{A,B,C\}$, тоді

$$\sin\varphi=\frac{A\ell+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}$$

Очевидно, пряма L і площина Q перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{s}$ і $\overline{N}$ колінеарні.

Таким чином, для перпендикулярності прямої і площини необхідно і достатньо, щоб $\overline{N} = \lambda\bar{s}$ або

A=λ l, B=λ m, C=λ n (16)

Ясно також, що пряма L і площина Q паралельні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні вектори $\bar{s}$ і $\overline{N}$, тобто для паралельності прямої і площини необхідно і достатньо, щоб $\overline{N}\cdot\bar{s} = 0$ або

Al+Bm+Cn=0 (17)

§ 3 Лінії другого порядку

Розглянувши геометричні образи, визначені рівняннями першого степеню, природно перейти до вивчення образів, яким відповідають рівняння другого степеню. При цьому почнемо з розгляду різних об`єктів на координатній площині *xy* і будемо тим самим розглядати рівняння з двома невідомими, вважаючи, що третя координата *z* завжди дорівнює нулю.

Загальне рівняння 2-го степеню з двома невідомими має вигляд

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (1),

при цьому вважається, що хоча б один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю.

Лінії, що відповідають цьому рівнянню, називаються кривими 2-го порядку.

Найпростішою такою кривою є коло. Нехай центр кола знаходиться в точці $M_0(a,b)$ і радіус кола дорівнює R. Оскільки коло є множина точок, що знаходяться на заданій відстані від центра M_0, тоді $|\overline{M_0M}| = R$

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (2)

Відмітимо, що в рівнянні відсутній член з добутком змінних координат, і коефіцієнти при квадратних змінних координат рівні між собою (в рівнянні (2) ці коефіцієнти дорівнюють 1, але, звичайно, можливо всі частини рівняння (2) помножити на будь-яку константу).

Кривими 2-го порядку є криві - еліпс, гіпербола і парабола. Більш того, далі доведемо, що будь-яка лінія 2-го порядку представляє собою або еліпс, або гіперболу, або параболу, або будь-який випадок їх “виродження”. Але, перш за все, дамо визначення цих трьох основних кривих, виведемо їх найпростіші рівняння і дослідимо їх форми.

Визначення. *Еліпсом називається множина точок (на площині), сума відстаней від яких до двох даних точок стала.*

Виберемо систему прямокутних декартових координат так, щоб вісь абсцис проходила через обидві задані точки F_1 і F_2, а початок координат знаходився на середині відрізка F_1F_2 (рис.19).

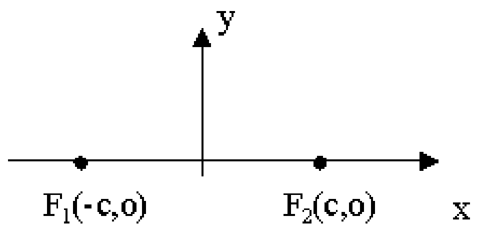

Рис.19

Нехай M(x,y) - одна із точок множини, що розглядається. Позначимо через $2c$ відстань між заданими точками F_1 і F_2 та через $2a$ задану суму відстаней F_1M і F_2M. Очевидно, що точка F_1 має координати $(-c;0)$, а точка F_2 координати $(c;0)$.

Згідно визначення, маємо:

$$|\overline{F_1M}|+|\overline{F_2M}|=2a \quad (3)$$

звідси одержимо рівняння

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad (4)$$

По суті рівняння (4) уже і є рівнянням множини, що розглядається. Але воно має незручний для дослідження вигляд; перетворимо його до більш простої форми.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

a^4-$2a^2cx$+c^2x^2=a^2x^2-$2a^2cx$+a^2c^2+a^2y^2

(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)

Оскільки 2a> 2c (сума двох сторін трикутника більше 3-ої сторони), то a^2-$c^{2>}$ 0.

Вважатимемо

a^2-c^2=b^2 (5)

В кінцевому підсумку одержимо (при вибраній системі координат) рівняння

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (6)

Очевидно, кожна точка множини, що розглядається, повинна відповідати одержаному рівнянню (6). Але оскільки в процесі перетворень двічі підносилися до квадрату обидві частини рівняння, необхідно, перевірити, чи не отримані при цьому "зайві" точки. Інакше кажучи, треба перевірити, що кожна точка, координати якої відповідають одержаному рівнянню, належить множині точок, що розглядається.

Попередньо зробимо деякі зауваження про форму лінії, що відповідає одержаному рівнянню.

Оскільки

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ і $x = \pm\frac{a}{8}\sqrt{b^2 - y^2}$,

то крива симетрична відносно осей координат, а тому і відносно початку координат. Із зростанням |x| від 0 до a |y| спадає від b до 0. Точки кривої існують лише в прямокутнику $|x| \le a,\ |y| \le b$ (рис.20).

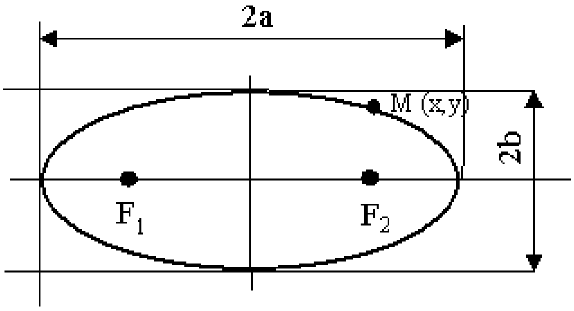

Рис.20

Перевіримо тепер, що будь-яка точка лінії, що визначена одержаним рівнянням, належить заданій множині. Для цього потрібно показати, що якщо координати довільної точки $M_0(x_0;y_0)$ задовольняють рівнянню

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2=a^2-c^2$ то $|\overline{F_1M_0}|+|\overline{F_2M_0}|=2a$,

оскільки $y_0=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, то

$$|\overline{F_1M_0}|+|\overline{F_2M_0}|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-c)^2+y^2}=$$

$$=\sqrt{(x_0+c)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)}+\sqrt{(x_0-c)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)}=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\sqrt{(a^2-b^2)x_0^2+2a^2cx_0+a^2(c^2+b^2)}+\sqrt{(a^2-b^2)x_0^2-2a^2cx_0+a^2(c^2+b^2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\sqrt{c^2x_0^2+2a^2cx_0+a^4}+\sqrt{c^2x_0^2-2a^2cx_0+a^4}\right]=\frac{1}{a}\left[\sqrt{(cx_0+a^2)^2}+\sqrt{(cx_0-a^2)^2}\right]$$

Оскільки $|x_0|\leq a$ і $c< a$, то $cx_0+a^{2>}0$ і $cx_0-a^{2<}0$.

Тому

$$\sqrt{(cx_0+a^2)^2}=cx_0+a^2, \qquad \sqrt{(cx_0-a^2)^2}=a^2-cx_0$$

$$|\overline{F_1M_0}|+|\overline{F_2M_0}|=\frac{1}{a}(cx_0+a^2+a^2-cx_0)=2a$$

Таким чином, всі точки лінії $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ є точки заданої множини точок.

Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами* еліпса, числа *a* і *b* *напівосями* еліпса, точки перетину еліпса з його осями симетрії - вершинами еліпса.

Зі зміною *c* змінюється форма еліпса. Якщо *c* прямує до нуля, тобто фокуси еліпса зливаються, тоді *b* прямує до *a* і еліпс стає колом із рівнянням $x^2+y^2=a^2$, тобто коло є частинний випадок еліпса, коли напівосі еліпса рівні між собою.

Якщо ж *c* прямує до а, тоді $b=\sqrt{a^2-c^2}$ прямує до нуля і еліпс стискується вздовж осі ординат. Отже, відношення $\frac{c}{a}$ може бути мірою стиску еліпса, мірою його відхилення від кола. Число $E=\frac{c}{a}$ (0< E< 1) називається ексцентриситетом еліпса.

В багатьох задачах буває необхідно використовувати параметричні рівняння еліпса.

Побудуємо два кола з центрами на початку координат і радіусами *b* і *a*. Проведемо із початку координат промінь під кутом t до осі абсцис ($(0 \le t < 2\pi$).

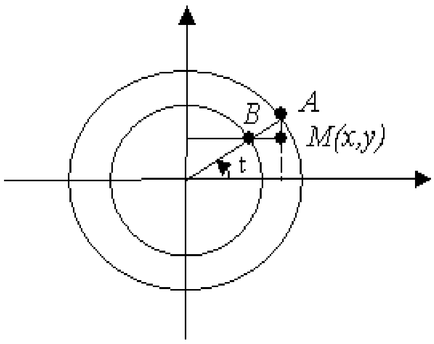

Рис.21

Нехай B і A його точки перетину із побудованими колами **(рис.21)** і M(x;y) - точка перетину прямих, проведених із B паралельно осі абсцис і з A паралельно вісі ординат. Визначимо геометричне місце точок M.

Маємо: $x=|\overline{OA}|\cos t=a\cos t, \qquad y=|\overline{OB}|\sin t=b\sin t$

Оскільки $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$

то точки M є точки еліпса з напівосями *a* і *b*. Змінюючи *t* від *0* до 2π, одержимо всі точки цього еліпса. Таким чином, рівняння

x=$a$cost, y=$b$sint (7)

є параметричним рівнянням еліпса з напівосями *a* і *b*, розташованого симетрично відносно осей координат. Зокрема, при *a*=*b* одержимо параметричне рівняння кола.

-

<u>Означення.</u> *Гіперболою називається множина точок (на площині), абсолютне значення різниці віддалей від яких до двох даних точок стале (і відмінне від нуля).*

Систему координат виберемо так, як і при виводі рівняння еліпса **(рис.22).**

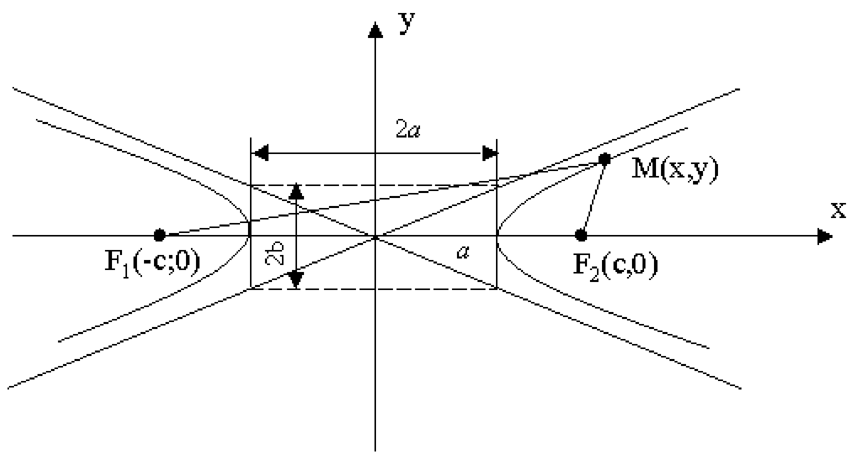

Рис.22

Із визначення маємо:

$$\left|\,|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|\,\right| = 2a \quad (8)$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a,$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2,$$
$$cx-a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Оскільки різниця двох сторін трикутника менше третьої його сторони, то 2a> 2c.

Припустимо,

c^2-a^2=b^2 (9)

Тоді одержимо b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 і нарешті

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (10)$$

Як і у випадку еліпса, необхідно перевірити, що, незважаючи на двохкратне піднесення до квадрату, ми не одержали "зайвих" точок і одержане рівняння (10) є рівнянням гіперболи.

Попередньо відмітимо деякі властивості лінії, визначеної рівнянням (10). Ця лінія симетрична відносно осей координат і відносно початку координат.

Оскільки $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, то для всіх точок кривої $x\geq a$ немає точок кривої в полосі $-a<x<a$. Крива складається із двох окремих частин - *віток гіперболи*, одна із яких лежить в області $x\geq a$, а друга - в області $x\leq -a$ (права і ліва вітки гіперболи).

Повернемося до доведення того, що рівняння (10) є рівнянням гіперболи.

Нехай $M_0(x_0;y_0)$ довільна точка, координати якої задовольняють рівнянню (10). Потрібно довести, що $\left||\overline{F_1M_0}|-|\overline{F_2M_0}|\right|=2a$.

$$|\overline{F_1M_0}|-|\overline{F_2M_0}|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}-\sqrt{(x_0-c)^2+y^2}=$$

$$=\sqrt{x_0^2+2cx_0+c^2+\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}-\sqrt{x_0^2-2cx_0+c^2+\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\sqrt{(cx_0+a^2)^2}-\sqrt{(cx_0-a^2)^2}\right]$$

При $x_0>a$ (тобто для точок правої вітки гіперболи) $cx_0+a^2>0$ і $cx_0-a^2>0$. Тому у випадку $x_0>a$

$$|\overline{F_1M_0}|-|\overline{F_2M_0}|=\frac{1}{a}\left[(cx_0+a^2)-(cx_0-a^2)\right]=2a$$

При $x_0<-a$ (тобто для точок лівої вітки гіперболи) $cx_0+a^2<0$ і $cx_0-a^2<0$. Тому у випадку $x_0\leq -a$.

$$|\overline{F_1M_0}|-|\overline{F_2M_0}|=\frac{1}{a}\left[-(cx_0+a^2)-(cx_0-a^2)\right]=-2a$$

Таким чином, в обох випадках $\left| |\overline{F_1M_0}| - |\overline{F_2M_0}| \right| = 2a$ і крива (10) є гіпербола.

Число а називається *дійсною напіввіссю*, число в *уявною напіввіссю*. Точки перетину гіперболи з її віссю симетрії називається *вершинами* гіперболи, точки F_1 і F_2 - її фокусами.

Відмітимо ще одну особливість форми цієї лінії. Розглянемо разом з гіперболою дві прямі: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Неважко помітити (внаслідок симетрії лінії достатньо розглянути 1-у чверть) при одній і тій же абсцисі ординати точок гіперболи менше ординат відповідних точок прямої $y = \frac{b}{a}x$.

Дійсно, $y_{\text{пр}}$-$y_{\text{гіп}}$=$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ > 0.

Разом з тим оскільки

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

тоді різниця $y_{\text{пр}}$-$y_{\text{гіп}}$ прямує до нуля при необмеженому зростанні х, і тому точки гіперболи при необмеженому збільшенні абсциси як завгодно близько підходять до відповідних точок прямої $y = \frac{b}{a}x$.

Прямі

$y = \pm\frac{b}{a}x$ (11)

до яких як завгодно близько при $|x| \rightarrow$? підходять точки віток гіперболи, називаються *асимптотами* гіперболи. Неважко помітити, що асимптоти гіперболи направлені по діагоналях прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$, симетричного відносно осей симетрії гіперболи.

Якщо a=b, тоді гіпербола приймає вигляд

$x^2-y^2=a^2$ (12)

Асимптоти гіперболи в цьому випадку взаємно перпендикулярні. Така гіпербола називається *рівнобічною*.

Третьою основною кривою 2-го порядку є парабола.

Визначення. *Параболою називається множина точок (на площині), рівновіддалених від заданої точки і заданої прямої.*

Виберемо вісь абсцис прямокутної декартової системи координат так, щоб вона проходила через задану точку F перпендикулярно до заданої прямої L, початок координат нехай знаходиться на середині відрізка FK (рис.23). Напрям осі абсцис вказаний на рисунку.

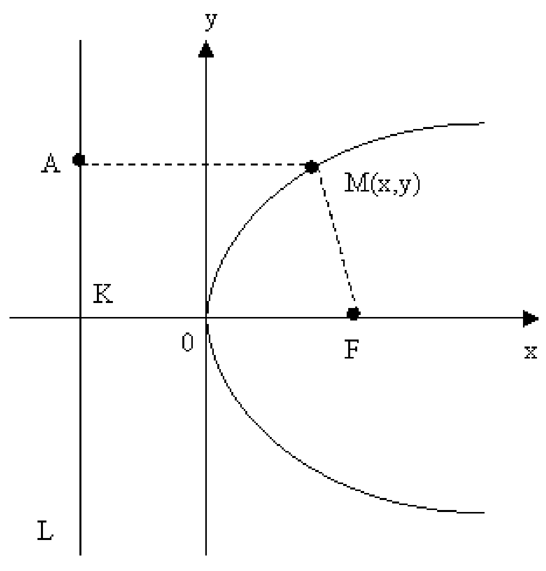

Рис.23

Відстань від точки F до прямої L позначимо через p. Тоді точка F буде мати координати $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння прямої L: $x=-\frac{p}{2}$.

Нехай M(x;y) - довільна точка розглядуваної множини і A - основа перпендикуляра, опущеного із M на L.

Оскільки точка A має координати $\left(-\frac{p}{2};y\right)$ і згідно визначення $|\overline{AM}|=|\overline{FM}|$, тоді

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2,$$

і нарешті

$y^2=2px$ (13)

Легко перевірити, що при піднесенні до квадрату ми не ввели "зайві" точки.

Дійсно, підставляючи у вираз $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ замість y^2 $2px$,

одержимо $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$ і, отже, рівність $|\overline{FM}|=|\overline{AM}|$.

Оскільки $y^2\geq 0$, тоді x не може бути від`ємним і всі точки кривої лежать в правій напівплощині. При зростанні x від 0 до +? - $|y|$ необмежено зростає. Ясно також, що крива симетрична відносно осі абсцис.

Задана точка F називається *фокусом* параболи, точка перетину параболи з її віссю симетрії - *вершиною параболи*.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (еліпс), $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гіпербола), $y^2=2px$ (парабола) були одержані при спеціальному, найбільш зручному розташуванні координатних осей. Тому отримані рівняння називаються найпростішими або канонічними рівняннями кривих 2-го порядку.

Для того, щоб ознайомитися з методами приведення рівнянь кривих 2-го порядку, заданих в іншій координатній системі, до такого найпростішого вигляду, необхідно одержати формули перетворення координатних систем.

ПРИКЛАДИ РОЗВ`ЯЗКУ ЗАДАЧ

1.171. Записати рівняння кола, що має центр у точці (5;-7) і проходить через точку (2;-3).

Знайдемо радіус кола як відстань від центра до даної його точки

$$r=\sqrt{(2-5)^2+(-3-(-7))^2}=5$$

Тепер у рівняння кола (2) підставимо координати центра і величину радіуса, що знайдена

$(x-5)^2+(y+7)^2=25$

1.172. Знайти координати центра та радіус кола

$x^2+y^2-4x-14y+17=0$

Перепишемо дане рівняння так:

$x^2-4x+4+y^2-14y+49+17-4-49=0$

або

$(x-2)^2+(y-7)^2=36$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням кола (2) одержимо: a=2, b=7, r=6. Отже, центр кола знаходиться в точці (2;7), радіус його дорівнює 6. ^

1.173. Знайти рівняння еліпса, фокусами якого є точки $F_1(0;0)$ та $F_2(0;8)$, а велика піввісь a=5.

Відстані від точки M(x;y) еліпса до фокусів дорівнюють відповідно $\sqrt{x^2+y^2}$ та $\sqrt{x^2+(y-8)^2}$. Згідно означення еліпса маємо, що

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-8)^2}=10$$

Спрощуючи це рівняння, одержимо

$$\sqrt{x^2+y^2-16y+64}=10-\sqrt{x^2+y^2}$$
$$x^2+y^2-16y+64=100-20\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$
$$16y+36=20\sqrt{x^2+y^2}$$
$$4y+36=20\sqrt{x^2+y^2}$$
$$4y+9=5\sqrt{x^2+y^2}$$
$$16y^2+72y+81=25x^2+25y^2$$
$$25x^2+9y^2-72y-81=0$$

Виділимо повний квадрат відносно “*y*”

$25x^2+9(y^2-8y+16)=225$

Поділимо на 225 і одержимо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$$

Осями симетрії такого еліпса будуть лінії x=0 та y=4, велика піввісь a=5, мала піввісь b=3. ^

1.174. Обчислити напівосі гіперболи, якщо директриси задані рівняннями $x=\pm 3\sqrt{2}$ і кут між асимптотами прямий.

Директриси зв`язані з напівосями гіперболи формулами

$$x=\frac{a}{E};\quad x=-\frac{a}{E};\quad E=\frac{c}{a};\quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

a, b - напівосі гіперболи. Рівняння асимптот $y=\frac{b}{a}x$ та $y=-\frac{b}{a}x$.

Згідно умови задачі одержимо систему двох рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\sqrt{2}\\ \dfrac{b^2}{a^2}=1 \quad \text{(умова перпендикулярносты асимптот)}\end{cases}$$

Звідси $b^2 = a^2, \ \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \ \Rightarrow a = 3 \cdot 2 = 6$, отже і b=6.

1.175 Написати рівняння параболи, що проходить через точку (0;0) та (1;-2) і симетричної відносно осі Ох.

Рівняння параболи, що проходить через точку (0;0) симетрично відносно осі Ох має вигляд $y^2=2px$.

Згідно умови, що парабола проходить через точку (1;-2), одержуємо $(-2)^2=2p$.

Звідси $p = \frac{4}{2} = 2$.

Тобто, шукане рівняння параболи буде мати вигляд

$y^2=4x$

§4 Перетворення координат на площині. Застосування перетворення координат до спрощення рівнянь кривих другого порядку.

Розглянемо, по-перше, як змінюються координати точок площини xy при перетворенні паралельного переносу, тобто таких перетворень, при яких зберігається напрямок осей (розглядається прямокутна декартова система координат), але змінюється положення початку координат.

Нехай на площині вибрана деяка точка M, нехай $(x;y)$ - її координати в системі осей x, y з початком **O** і (x', y') - координати тієї ж точки M в системі осей x', y' з початком **O'** **(**рис.24**)**. Нехай (a,b) - координати точки **O'** в системі осей x, y**.** Очевидно OO' +O' M=OM.

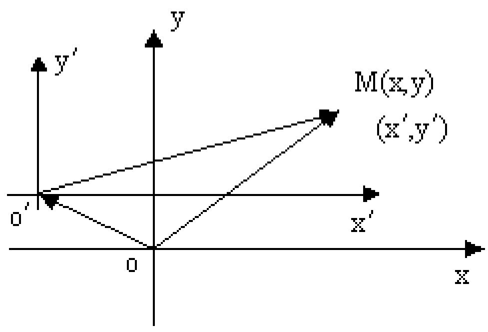

Рис.24

Оскільки при паралельному переносі осей координатний базис не змінюється, то при додаванні векторів можна складати їх відповідні координати. А тому

$x=x'+a;\ y=y'+b$ (1)

Ми одержали формули для переходу від “старих” координат точки M до “нових” її координат. Із (1) випливають формули

$x'=x-a;\ y'=y-b$ (2),

що виражають “нові” координати через “старі”.

Приклад 1.199 Встановити, як змінюється рівняння $x^2-4x+2y^2+8y-10=0$ при паралельному переносі осей координат, якщо початок координат перенесений в точку O`(2;-2).

Розв`язок. Згідно формул (1) маємо $x=x'+2$, $y=y'\ 2$. Підставляючи ці вирази в задане рівняння, одержимо

$(x'+2)^2-4(x'+2)+2(y'\ 2)^2+8(y'\ 2)-10=0$

$x'^2+2y'^2=22,\ \dfrac{x'^2}{22}+\dfrac{y'^2}{11}=1$

Таким чином, вихідному рівнянню відповідає еліпс з напівосями $\sqrt{22}$ і $\sqrt{11}$, з центром симетрії в точці (2;-2) і осями симетрії, паралельними осям координат.

Приклад 1.200. За допомогою паралельного переносу осей координат привести до найпростішого вигляду рівняння $x^2-6x-3y^2-6y+2=0$.

Розв`язок. Перепишемо задане рівняння у вигляді

$(x-3)^2-9-3(y+1)^2+3+2=0$

Припустимо $x-3=x'$, $y+1=y'$.

Тоді одержимо

$x'^2 - 3y'^2 = 4$ або $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4/3} = 1$

Таким чином, вихідне рівняння визначає гіперболу з дійсною віссю 2, уявною $\frac{2}{\sqrt{3}}$ і центром симетрії в точці (3;-1). Осі симетрії гіперболи паралельні осям координат.

Раніше відмічалося, що рівняння $y^2=2px$ ($p>0$) визначає параболу, у якій вісь симетрії співпадає з віссю абсцис і вершина знаходиться на початку координат. Рівнянню $x^2=2py$ або, що те ж саме, рівнянню $y=ax^2$ $\left(a=\frac{1}{2p}\right)$ відповідає, очевидно, парабола, у якої вісь симетрії співпадає з віссю ординат, а вершина, як і раніше, знаходиться на початку координат. Покажемо, що до виду $y=ax^2$можна привести з допомогою паралельного переносу осей рівняння $y=ax^2+bx+c$.

Нехай (a_1;b_1) - координати нового початку в старій системі координат. Тоді $x=x`+a_1,\ y=y`+b_1$ і рівняння $y=ax^2+bx+c$ набуде вигляду

$$y'+b_1=a(x'+a_1)^2+b(x'+a_1)+c$$

або

$$y'=ax'^2+(2aa_1+b)x'+aa_1^2+ba_1+c-b_1$$

Числа a_1 і b_1 були поки що довільні. Виберемо їх так, щоб виконувалася рівність

$$2aa_1+b=0\quad aa_1^2+ba_1+c-b_1=0$$

Розв`язуючи цю систему, одержимо $a_1=-\frac{b}{2a};\ \ b_1=c-\frac{b^2}{4a}$. Таким чином, якщо перенести початок координат (при збережені напрямку осей координат) в точку O' $\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$, тоді вихідне рівняння $y=ax^2+bx+c$ буде мати вид $y'=ax'^2$. Але це означає, що вихідне рівняння є рівнянням параболи з вершиною в точці O' і віссю симетрії, паралельною осі ординат.

Розглянемо тепер перетворення, що включає в себе поворот координатних осей при збережені положення початку координат. Нехай x, y - старі осі координат, x', y' - нові осі (рис.25) і α - кут повороту, тобто кут між “новою” і одноіменною “старою” віссю (оскільки ми розглядаємо задачу на площині, то можна фіксувати напрямок відліку кутів; кут вираховується від додатного напрямку старої осі проти часової стрілки).

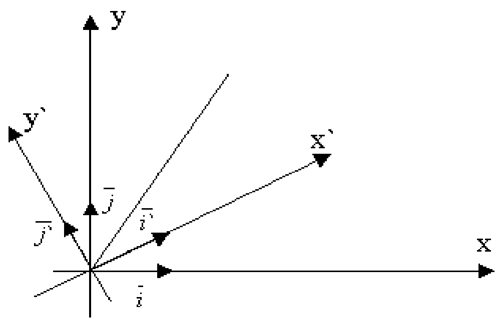

Рис.25

У випадку, що розглядається, координатний базис, очевидно, змінюється: замість базису $\bar{i}, \ \bar{j}$ - маємо новий базис $\bar{i}', \ \bar{j}'$, при чому кут між $\bar{i}$ і $\bar{i}'$ дорівнює α , кут між $\bar{i}', \ \bar{j}$ дорівнює $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (або $\alpha-\frac{\pi}{2}$), кут між $\bar{j}'$ і $\bar{j}$ дорівнює α , кут між $\bar{j}'$ і $\bar{i}$ дорівнює $\alpha+\frac{\pi}{2}$. А тому в ортонормованому базисі $\bar{i}, \ \bar{j}$

$$\bar{i}' = \left\{\cos\alpha; \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right\} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$$
$$\bar{j}' = \left\{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}); \cos\alpha\right\} = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$$

Нехай M - довільна точка площини, $(x;y)$ її старі, а $(x?;y?)$ нові координати. Тоді

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} = x'\bar{i}' + y'\bar{j} = x'(\cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j}) + y'(-\sin\alpha\bar{i} + \cos\alpha\bar{j}) =$$
$$= (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\bar{i} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\bar{j}$$,

тобто маємо:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \quad (3)$$

формули, що виражають старі координати через нові.

Розв`язуючи систему рівнянь (3) відносно x' і y' , одержимо

$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$

$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ (4),

формули (3) і (4) і є формулами перетворення повороту координатних осей.

Приклад 1.201. Перетворити рівняння $xy=c$ $(c>0)$ (графік оберненої пропорційної залежності), вибрав за нові осі бісектриси координатних осей.

Розв`язок. Кут повороту α в цьому випадку дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

А тому

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y');$$

$$xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = c$$

$$\frac{x'^2}{2c} - \frac{y'^2}{2c} = 1$$

Таким чином, крива $xy=c$ $(c>0)$ є рівнобічна гіпербола, дійсна вісь якої направлена по бісектрисі 3-го і 1-го координатних кутів, центр симетрії знаходиться на початку координат, і напівосі дорівнюють $\sqrt{2c}$.

Ми розглядали окремо перетворення паралельного переносу і перетворення повороту координатних осей. Можливо, звичайно, послідовно провести ці два перетворення, здійснити і поворот, і перенос координатних осей. Вкажемо, не роблячи конкретних обчислень, як можна з допомогою розглянутих методів привести загальне рівняння кривої 2-го порядку

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (5)

до канонічних рівнянь еліпса, параболи і гіперболи, або до випадків їх “виродження”.

Відмітимо, по-перше, що при перетвореннях рівняння (5) за допомогою формул (1) і (3) не може змінитися порядок рівняння. Він природно не зможе підвищитися (тобто стати більше, ніж 2), оскільки у формулах (1) і (3) x і y виражається лінійно через x' і y' , але не може і понизитися. Дійсно, якщо ми із рівнянь (5) з допомогою формул (1) і (3) одержали б рівняння виду $A_1x' +B_1y'+C_1=0$, то, повертаючись за допомогою рівностей (2) і (4) до вихідних змінних x і y, ми не одержали б рівняння 2-го степеню - вихідне рівняння (5). Таким чином, порядок (ступінь) рівняння при наших перетвореннях зберігається.

З допомогою повороту осей завжди можна позбутися від члена з добутком координат.

Дійсно, підставляючи в (5) замість x і y їх вирази згідно формул (3), одержимо нове рівняння

$A_1x'^2+B_1x'y'+C_1y'^2+D_1x'+E_1y'+F=0,$

коефіцієнти якого і , зокрема, коефіцієнт B_1, містить тригонометричні функції кута α . Прирівнюючи коефіцієнт B_1 до нуля, одержимо тригонометричне рівняння. Розв`язуючи його, знайдемо значення кута повороту α , при якому в рівняння вже не буде входити добуток координат, і яке буде мати вигляд

$A_1x'^2+C_1y'^2+D_1x'+E_1y'+F=0$

Якщо коефіцієнти A_1 і C_1 відмінні від нуля, тоді завжди можна, як це показано на прикладах 1 і 2, за допомогою переносу осей координат (формули 1) позбутися від членів з першими ступенями змінних координат і привести рівняння (6) до виду

$A_1x''^2+C_1y''^2+F_1=0$ (7)

Але звідси видно, що ми маємо або еліпс (якщо A_1 і C_1 мають один знак, а F_1 протилежний), або уявне місце точок (якщо A_1, C_1 і F_1 мають один і той же знак; в такому випадку говорять, що має місце випадок "виродження" еліпса в "уявне місце точок"), або одну точку (якщо A_1 і C_1 одного знаку і $F_1=0$ - "виродження" еліпса в точку), або гіперболу (якщо A_1 і C_1 різних знаків і $F_1\neq 0$), або дві прямі, що перетинаються (якщо A_1 і C_1 різних знаків і $F_1=0$ - "виродження" гіперболи у 2 прямі, що перетинаються).

Якщо ж в рівнянні (6) один із коефіцієнтів A_1 і C_1, наприклад, C_1, обертається в нуль, тоді, як показано на початку параграфу, можна таке рівняння з допомогою переносу осей привести до виду $y''=ax''^2$ при $E_1\neq 0$ або до виду $ax''^2+d=0$ при $E_1=0$.

В першому випадку одержуємо параболу, в другому "виродження" параболи (2 паралельні прямі або одна пряма, або уявне місце точок).

Звідси випливає, що, як вже вказувалося вище, будь-яка крива 2-го порядку є або еліпс, або гіпербола, або парабола, або представляє собою їх "виродження".

§5 Циліндричні поверхні з твірними, паралельними координатним осям; поверхні другого порядку

Перш ніж почати вивчення просторових геометричних образів, відповідних рівнянням 2-го степеню, розглянемо один спеціальний клас поверхонь, які називаються циліндричними поверхнями.

Визначення. *Циліндричною поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої, що перетинає задану лінію і паралельну заданому напрямку.*

Задана лінія, через точки якої проходить пряма, яка переміщується, називається *направляючою*, а кожне положення такої прямої називається *твірною* розглядуваної циліндричної поверхні.

Виберемо координатну систему так, щоб одна із осей, наприклад z, була паралельною заданому напрямку і будемо розглядати той, хоча і частинний, але дуже важливий випадок, коли направляюча лінія лежить в площині, перпендикулярній заданому напрямку. Тоді без всякого обмеження загальності дослідження можливо вважати, що направляюча лежить в площині xy.

Нехай в площині $z=0$ рівняння направляючої має вигляд $F(x,y)=0$, і , таким чином, така лінія задана двома рівняннями

$Z=0, F(x;y)=0$ (1)

Доведемо, що циліндричній поверхні, що розглядається, відповідає рівняння

$F(x;y)=0$ (2)

тобто, що координати будь-якої точки поверхні відповідають рівнянню (2), а координати будь-якої точки, що не лежить на цій поверхні, йому не відповідають.

Нехай $M_0(x_0;y_0;0)$ - будь-яка точка направляючої **(**рис. 26**)**.

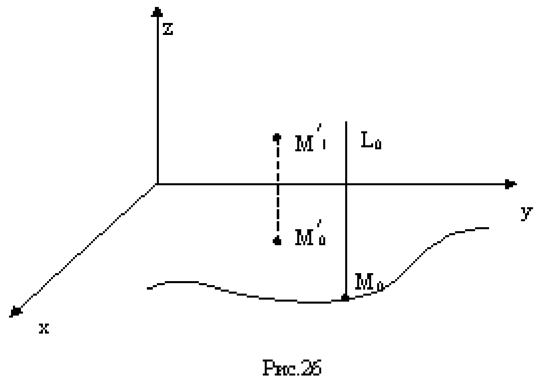

Рис.26

Проведемо через M_0 пряму L, паралельну осі z, і виберемо на ній довільну точку M_1. Координати цієї точки ($x_0;y_0;z_1$). Згідно припущенню *координати точки M_0 відповідають системі $Z=0$, $F(x;y)=0$.* Отже, $F(x_0;y_0)=0$ і координати точки M_1 (при будь-якому z_1) відповідають рівнянню $F(x;y)=0$. Таким чином, координати будь-якої точки M_1 прямої L відповідають рівнянню $F(x;y)=0$. Але M_0 - довільна точка направляючої. Отже координати будь-якої точки будь-якої твірної; тобто координати будь-якої точки циліндричної поверхні, що розглядається, відповідають рівнянню$F(x;y)=0$.

Нехай тепер вибрана будь-яка точка M_1' $(x_1' ; y_1' ; z_1')$, що не лежить на циліндричній поверхні, що розглядається. Розглянемо точку M_0' $(x_1' ; y_1';0)$, що є проекцією точки M_1' на площину xy. ТочкаM_0' не лежить на заданій направляючій лінії (інакше кажучи, точка M_1' лежала б на заданій поверхні). А тому координати точки M_0' не можуть задовольняти системі рівнянь $Z=0$, $F(x;y)=0$. Але перше рівняння напевно виконано. Отже$F(x_1';y_1')\neq 0$. Але це означає, що координати точки M_1' $(x_1'; y_1'; z_1')$ не можуть задовольняти рівнянню $F(x;y)=0$; тим самим наше твердження доведено.

Очевидно, що якщо твірні циліндричної поверхні паралельні осі **y**, а рівняння направляючої має вигляд

$y=0$, $F(x;z)=0$,

то рівняння циліндричної поверхні $F(x; z)=0$.

Аналогічно для циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі x, маємо рівняння $F(y; z)=0$

Якщо направляюча є коло, яке лежить в площині xy, з центром в точці ($a;b;0$) і радіусом R, а твірні паралельні осі z, тоді рівняння циліндричної поверхні має вигляд:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (3)

Називається така поверхня *круговим циліндром*.

Поверхня

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (4)

є циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі z, а направляючими є еліпс з напівосями a і b, з центром на початку координат, розташований в площині xy. Поверхня така називається*еліптичним циліндром*.

Круговий циліндр можна, звичайно, розглядати як частинний випадок еліптичного циліндра.

Поверхня, визначена рівнянням

$y^2=2px$ (5),

називається *параболічним циліндром* **(**рис.27**)**.

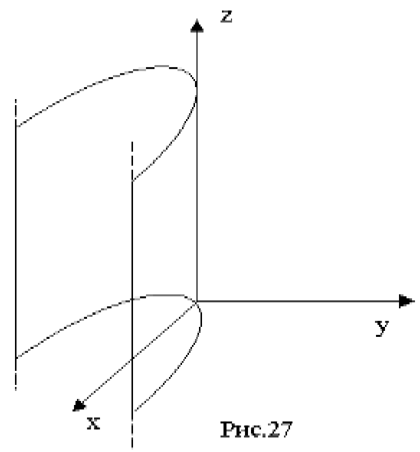

Рис.27

Поверхня, визначена рівнянням

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (6),

називається *гіперболічним циліндром* **(**рис.28**)**

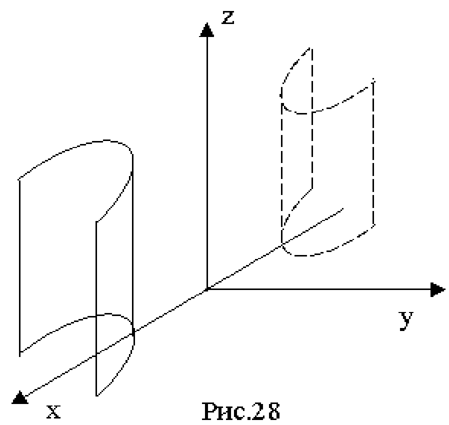

Рис.28

Крім вже приведених існують ще 6 типів поверхонь 2-го порядку. Їх найпростіші, або, як прийнято говорити, канонічні рівняння, одержані при найбільш зручному для вивчення поверхонь розташуванні осей координат, мають вигляд:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - еліпсоїд

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - однопорожнинний гіперболоїд

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - двопорожнинний гіперболоїд

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ - еліптичний параболоїд

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ - гіперболічний параболоїд

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ - конус 2-го порядку

Проведемо дослідження форми цих поверхонь, використовуючи метод, який називають методом паралельних перерізів.

5.1. Дослідження форми еліпсоїда

Знайдемо, насамперед, переріз еліпсоїда площиною *x=0*.

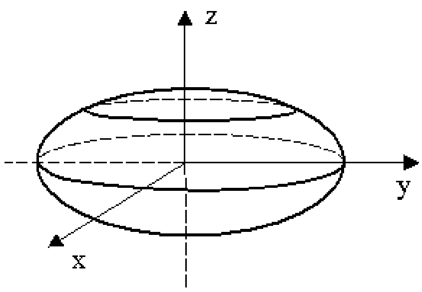

Рис.29

В перерізі **(**рис.29**)** одержимо лінію, визначену системою:

x=0, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Таким чином, в площині *yz* маємо еліпс з напівосями *b* і *c*. Розглянемо тепер переріз поверхні площинами, паралельними площині *xy*, тобто площинами *z*=*h*. В перерізі одержимо лінії, визначені системою

z=*h*, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$

Очевидно, якщо |h|> c, тоді в перерізі одержимо уявне місце точок, при $|h|=c$ одержимо точки (0;0;c), якщо $h>0$ і (0;0;-c), якщо $h<0$. Ящо ж $|h|<c$, в площині *z*=*h* одержимо еліпс

z=*h*, $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$,

тобто еліпс з напівосями

$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ і $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$

При $h=0$ напівосі еліпса дорівнюють a і b, зі збільшенням h напівосі зменшуються до нуля (при $h=c$). Вигляд поверхні показаний на рис. 29.

Очевидно, що поверхня, яка розглядається, симетрична відносно координатних площин, осей і початку координат. Вся поверхня не виходить із прямокутного паралелепіпеда зі сторонами 2a, 2b, 2c, симетричного відносно координатних площин.

Якщо дві осі еліпсоїда рівні між собою, тоді еліпсоїд можна одержати обертанням еліпса навколо одної із осей, і сама поверхня називається тоді еліпсоїдом обертання.

Наприклад, якщо $b=c$, тоді поверхня має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

і може бути одержана обертанням еліпса

$$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі x.

Якщо $a=b=c$, тоді рівняння еліпсоїда набуває вигляду

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

і поверхня представляє собою сферу з центром на початку координат і радіусом a.

Таким чином, сфера є частинний випадок еліпсоїда, коли всі його напівосі дорівнюють між собою.

5.2. Дослідження форми однопорожнинного гіперболоїда

Знайдемо переріз однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

площиною рисунка, тобто площиною $x=0$ **(**рис.30**)**.

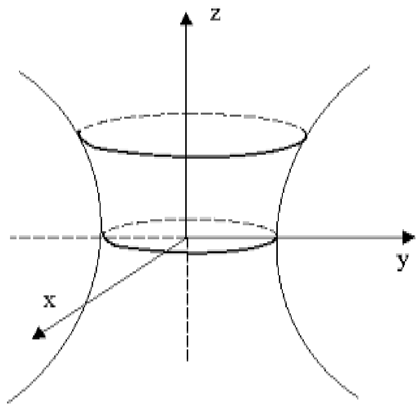

Рис.30

Лінія перетину визначається системою рівнянь

x=0, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

В перерізі маємо гіперболу з напівосями b і c, причому дійсна вісь гіперболи співпадає з віссю y.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z=h$, паралельній площині xy. В перерізі одержуємо лінію, визначену системою рівнянь

$z=h$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$

або системою

$z=h$, $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$

Таким чином, у вибраних паралельних перерізах маємо еліпси, напівосі яких зростають зі збільшенням $|h|$. Найменший еліпс (він називається *горловим еліпсом*) одержуємо при $h=0$. Очевидно, однопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно координатних площин, осей і початку координат.

Якщо $a=b$, тоді поверхня може бути утворена обертанням гіперболи

$x=0,\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

навколо осі z.

5.3. Дослідження формули двопорожнинного гіперболоїда

В перетині двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

площиною рисунка (тобто площиною $x=0$) одержуємо гіперболу **(**рис. 31**)**.

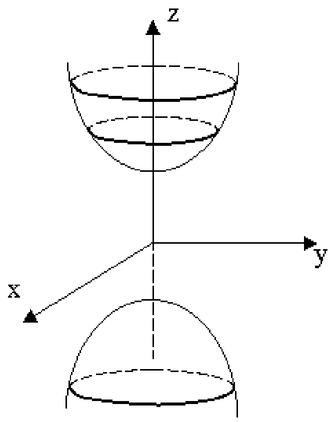

Рис.31

$x=0,\ \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Перетинаючи поверхню площинами $z=h$, одержимо при $|h|< c$ уявне місце точок, при $h=\pm c$ точки (0;0;c) і (0;0;-c), при $|h|> c$ еліпси

$z=h,\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1$

Поверхня, очевидно, симетрична відносно площин, осей і початку координат.

5.4. Дослідження формули еліптичного параболоїда

В перерізі еліптичного параболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

площиною рисунка (тобто площиною $x=0$) одержуємо параболу $x=0,$ $y^2=2b^2z$ **(**рис. 32**)**

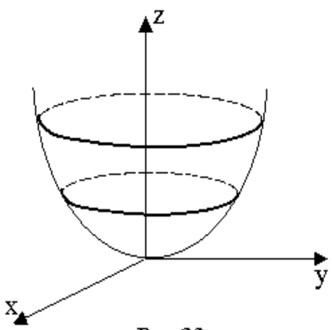

Рис.32

Перетинаючи поверхню площинами $z=h$ **(**$h>0$**)**, одержуємо еліпси

$$z=h,\quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{2h}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{2h}\right)^2}=1$$

Вся поверхня лежить "над" площиною xy, симетрична відносно площин xz і yz і відносно осі z.

Якщо $a=b$, маємо параболоїд обертання

$x^2+y^2=2a^2z$,

який можна одержати обертанням параболи

$x=0, y^2=2a^2z$

навколо осі z.

Відмітимо, що всі параболи, що одержуються в перерізі параболоїда обертання площинами, які проходять через вісь **z**, мають загальний фокус.

5.5. Дослідження форми гіперболічного параболоїда

Для більшої ясності рисунка змінимо розташування осей. Виберемо за площину рисунка площину *y=0* **(**рис.33**)**.

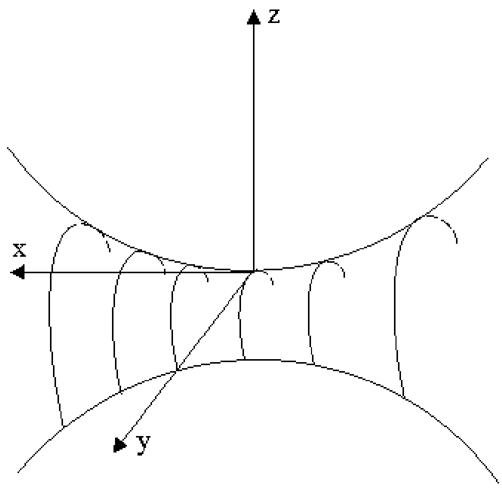

Рис.33

В перерізі гіперболічного параболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

площиною рисунка маємо параболу

$y=0,\ x^2=2a^2z$

В перерізі площинами $x=d$ одержуємо параболи

$x=d,\ y^2=-2b^2z+\frac{b^2d^2}{a^2}$

В перерізі площинами $z=-|h|$ маємо гіперболи

$z=-h,\ \frac{y^2}{\left(b\sqrt{2|h|}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(a\sqrt{2|h|}\right)^2}=1$

Вся поверхня має “сідловидну” форму.

6. Дослідження форми конуса 2-го порядку

В перерізі конуса 2-го порядку

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

площиною $x=0$ одержуємо дві прямі, що перетинаються на початку координат **(**рис.34**)**.

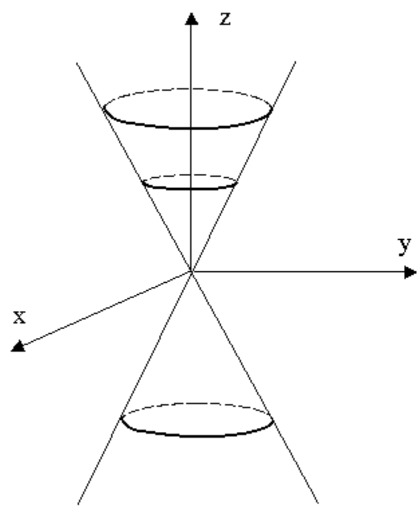

Рис.34

$x=0$, $y=\pm\frac{b}{c}z$

Перетинаючи поверхню площинами $z=h$, одержуємо еліпси

$z=h$, $\frac{x^2}{\left(a\frac{h}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\frac{h}{c}\right)^2}=1$

Перетинаючи поверхню площинами, які проходять через вісь z, тобто площинами *y=kx*, одержуємо дві прямі, що перетинаються.

y=kx, $\frac{\frac{x^2}{ab}}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}=\frac{z^2}{c^2}$

або

y=kx, $z=\pm\frac{c\sqrt{b^2+k^2a^2}}{ab}$

Використовуючи вже вказаний при вивчені кривих 2-го порядку метод перетворення координат, можна довести, що будь-яка поверхня 2-го порядку представляє собою або один із 9-ти розглянутих типів поверхонь, або випадок їх виродження (дві площини, що перетинаються або паралельні, одна площина, одна пряма, одна точка, пуста множина точок).

ПРИКЛАДИ РОЗВ`ЯЗКУ ЗАДАЧ

1.202 Яку поверхню визначає в просторі рівняння:

1) $x^2=4y$; 2) $z^2=xz$?

1) Рівняння $x^2=4y$ визначає параболічний циліндр з твірними паралельними осі *Oz*.

Направляючою циліндричної поверхні є парабола $x^2=4y$, $z=0$.

2) Рівняння $z^2=xz$ може бути представлено у вигляді $z(z-x)=0$ і розпадеться на два рівняння: $z=0$ і $z=x$, тобто воно визначає дві площини - площину *xoy* і бісектральну площину $z=x$, яка проходить через вісь *oy*. ^

1.203 Скласти рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка M(0;0;1), а направляючою - еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $z=3$.

Запишемо рівняння твірної *AM*, де $A(x_0;y_0;z_0)$ - точка, яка лежить на еліпсі:

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}.$$

Оскільки точка *A* лежить на еліпсі, тоді її координати задовольняють рівнянню еліпса, тобто $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$, z_0=3. Виключивши тепер x_0, y_0 і z_0 із системи

$\frac{x}{x_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$; $\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}$; $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$; z_0=3,

одержимо рівняння конуса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0$

1.204 Привести до канонічного вигляду рівняння $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$.

Згрупуємо члени з однаковими координатами

$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13$.

Доповнимо до повних квадратів вирази в дужках, одержимо

$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36$

або

$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36$

Зробимо паралельний переніс осей координат, де за новий початок координат виберемо точку O ' (1;1;1), формули перетворення координат мають вигляд $x=x'+1$; $y=y'+1$; $z=z'+1$. Тоді рівняння поверхні запишеться так:

$4x'^2+9y'^2+36z'^2=36$ або $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}+\frac{z'^2}{1}=1$

Це рівняння визначає еліпсоїд; його центр знаходиться в новому початку координат, а напівосі відповідно дорівнюють 3; 2 і 1.

§6 Полярна система координат на площині. Циліндрична і сферична системи координат в просторі

Ми розглядали дотепер тільки прямокутні декартові системи координат. Поряд з ними використовуються іноді і інші координатні системи. В задачах на площині це найчастіше полярна система координат. В просторових задачах - циліндрична і сферична координатні системи.

6.1. Полярна система координат на площині

Виберемо на площині деяку фіксовану точку O - початок координатної системи або полюс. Фіксований промінь (напівпряма) з вибраним на ньому одиничним вектором із початком в полюсі назвемо *полярною віссю*.

Положення будь-якої точки M на площині будемо визначати впорядкованою парою чисел: довжиною ρ радіуса - вектора $\overline{OM}$ **(**рис. 35**)**

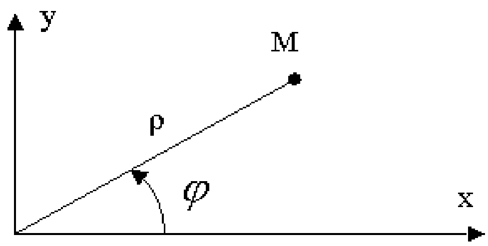

Рис.35

та вираженим в радіанах кутом φ між полярною віссю і вектором $\overline{OM}$. Оскільки така система координат розглядається тільки на площині, тоді можна враховувати і напрямок відліку кута; кут вважається додатнім, якщо напрям обертанням від полярної осі до радіус - вектора береться проти часової стрілки.

Запис $M_0(\rho_0;\varphi_0)$ показує, що в деякій фіксованій полярній системі координат довжина радіус - вектора $\overline{OM}_0$ дорівнює ρ_0, а кут між полярною віссю і $\overline{OM}_0$ (полярний кут) дорівнює φ_0. Число ρ_0 іφ_0 називаються полярними координатами точки M_0. Координати ρ_0 і φ_0 повністю визначають положення точки M_0. Завдання точки M_0 однозначно визначає лише число ρ_0 - довжину радіуса-вектора. Полярний кут визначається тільки з точністю до доданка, кратного 2π . Для полюса полярний кут взагалі не визначений. Довжина радіус-вектора ρ для різних точок площини може змінюватися від 0 до $+\infty$, полярний кут φ від $-\infty$ до $+\infty$.

Неважко встановити правила переходу від полярної системи координат до декартової і навпаки.

Помістимо початок декартової системи координат в полюсі полярної системи і направимо ось абсцис вздовж полярної вісі. Тоді

$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\quad y=\rho\cdot\sin\varphi \tag{1}$$

Із формул (1) знаходимо:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2}$$

Полярний кут визначається двома формулами. Виберемо одну з них, одержимо два значення φ , які лежать між 0 і 2π . Щоб вибрати єдине (з точністю до доданку кратного 2π) необхідне значення, враховують знак 2-ої тригонометричної функції кута φ .

Як і в декартовій системі координат, кожній лінії на площині відповідає рівняння, яке зв`язує ρ і φ , і, навпаки, кожному рівнянню, яке зв`язує ρ і φ, відповідає, як правило, деяка лінія на площині із заданою полярною системою координат.

Для побудови лінії, заданої рівнянням в полярній системі координат, частіше використовують метод побудови "по точках" - обчислюють координати ряду точок лінії і сполучають ці точки плавною кривою.

Приклад 1.211. Побудувати лінію ρ =2(1+cosφ).

Розв`язок. Складаємо таблицю

φ:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
ρ:	4	$2+\sqrt{3}$	3	2	1	$2-\sqrt{3}$	0

Оскільки cos φ =cos(2π -φ), тоді обчислення значення ρ при π < φ < 2 π не потрібно. Крива повинна бути симетричною відносно полярної осі. Наносячи відповідні точки на рисунок і сполучаючи їх плавною лінією, одержимо вигляд лінії, що розглядається **(**рис.36**)**.

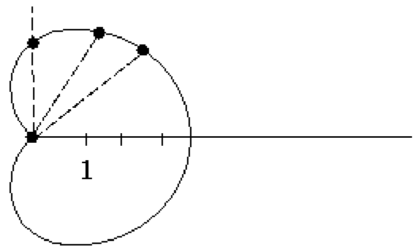

Рис.36

Ця лінія називається кардіоїдою.

Приклад 2. Побудувати лінію $\rho = \frac{1}{2}\varphi$

Розв`язок. Складаємо таблицю, починаючи з φ =0 (при φ < 0 одержимо ρ < 0, що неможливо).

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π
ρ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$

Одержана лінія називається *спіраллю Архімеда* **(**рис.37**)**.

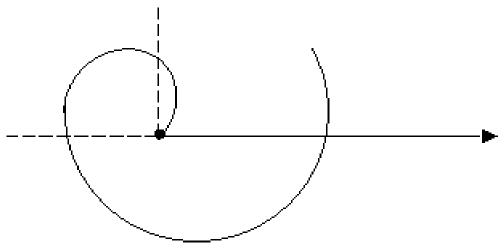

Рис.37

6.2. Циліндрична система координат

Зафіксуємо в просторі яку-небудь точку O (початок координат), проведемо через неї деяку пряму L_1 і на ній виберемо одиничний вектор $\bar{\kappa}$ (орт). Проведемо через O площину Q, перпендикулярну до вже вибраної осі, і в цій площині виберемо промінь L_2, що виходить із O та орт $\bar{i}$ на цьому промені **(**рис.38**)**.

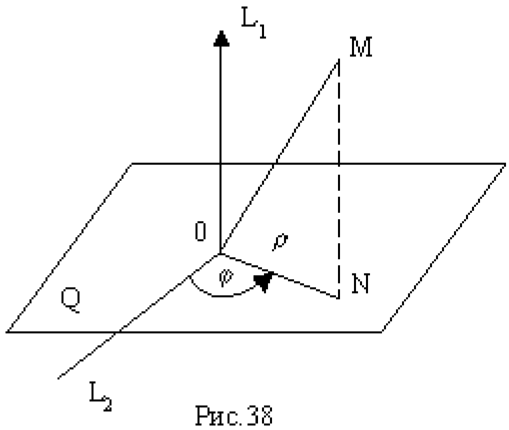

Рис.38

Нехай M - довільна точка простору, а N - її проекція на площину Q. Положення точки M в просторі будемо тепер описувати трьома числами:

1. довжиною відрізка ON;
2. кутом φ між променем L_2 і вектором $\overline{ON}$ (кут відраховується від променя L_2 і вважається додатнім, якщо, дивлячись від додатного напрямку осі L_1 , поворот від L_2 до $\overline{ON}$ відбувається проти часової стрілки);
3. проекцією *z* радіус - вектора $\overline{OM}$

на вісь L_1.

Таким чином, положення точки *M* в просторі визначається полярними координатами її проекції на площину Q та аплікатою самої точки M.

Координатними поверхнями, тобто поверхнями, на яких одна із координат зберігає стале значення, в даній системі є:

1) ρ =const - кругові циліндричні поверхні з твірними, паралельними вісями L_1 (вісь *z*);

2) φ =const - напівплощини, краєм яких є вісь *z*;

3) *z*=const - площини, перпендикулярній до осі *z*.

Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок був у точці O, ось абсцис була направлена по осі L_2 (полярній осі), а вісь *z* - по осі L_1. Тоді одержимо такі формули, які зв`язують декартові і циліндричні координати точки *M*:

$x = \rho \cdot \cos\varphi, \qquad \rho = x^2 + y^2$

$y = \rho \cdot \sin\varphi, \qquad tg\varphi = \dfrac{y}{x}$

$z = z, \qquad z = z$

6.3. Сферична система координат

Зафіксуємо в просторі будь-яку точку О (початок координат), проведемо через неї деяку вісь L (полярну вісь) і площину Q, перпендикулярну до осі L (екваторіальна площина). Проведемо, крім того, напівплощину Р, краєм якої є полярна вісь L (напівплощина головного меридіана). Виберемо також в просторі одиницю довжини.

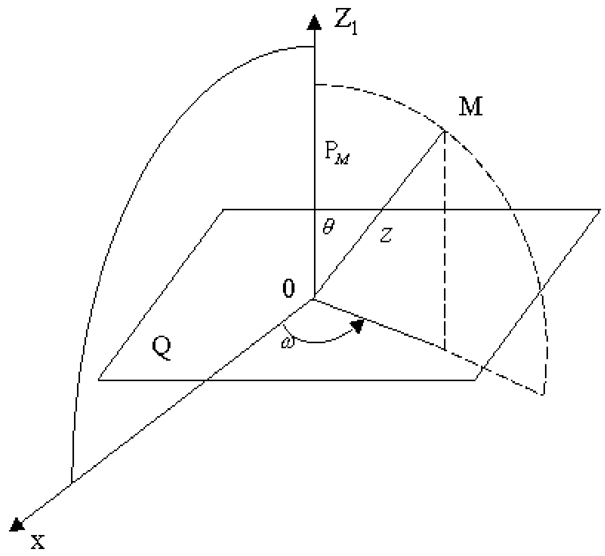

Рис.39

Положення довільної точки М в просторі будемо визначати тепер наступною впорядкованою трійкою чисел:

1. довжиною r радіус - вектора точки М;
2. кутом θ між полярною віссю L і радіусом - вектором $\overline{OM}$ (напрям відліку не фіксуємо; кут θ може змінюватися від 0 до π);
3. двогранним кутом ω між напівплощиною головного меридіана і напівплощиною P_M, що проходить через точку М і має своїм краєм вісь L (кут вимірюється лінійним кутом між напівпрямими перетину напівплощин Р і P_M з площиною Q; відлік ведеться від лінії перетину Р і Q, напрям відліку як і в циліндричній системі координат).

Координатними поверхнями є:

1. r=const - сфери радіуса r з центром в О;

2. θ =const - напівконічні поверхні з вершиною в точці O, віссю L в ролі осі симетрії і кутом при вершині 2θ ;
3. ω =const - напівплощина, краєм якої є вісь L **(**рис.39**)**.

Виберемо декартову систему координат з початком в точці **O**, віссю **x**, направленій по прямій перетину площин P і Q, і віссю z, направленій по полярній осі. Формули, які зв`язують декартові координати точки M з її сферичними координатами, набудуть такого вигляду:

$$x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\omega, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\omega, \qquad tg\,\omega=\frac{y}{x}$$

$$z=r\cdot\cos\theta, \qquad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ

1.132. Задано рівняння прямої *14x-5y-45=0*. Написати:

1. рівняння з кутовим коефіцієнтом;
2. рівняння у відрізках.

Δ

1. Розв'яжемо рівняння відносно *y*, одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом:

   y=(14/5)x-9

   Тут *k=14/5, b=-9*

2. перенесемо вільний член загального рівняння в праву частину і розділимо обидві частини на 45; маємо *(14/45)x-(5/45)y=1.* Переписуючи останнє рівняння у вигляді

$$\frac{x}{45/12}+\frac{y}{(-45/5)}=1$$

одержимо рівняння даної прямої у відрізках. Тут *a*=45/12; *b*=-45/5= - 9.

1.133. Задано вершини трикутника *ABC*: *A(3, 0)*, *B(5, 10)*, *C(13, 6)*. Знайти:

а) рівняння сторони *AB*;

б) рівняння висоти *CD*, опущеної з вершини *C* на сторону *AC*;

в) рівняння медіани AE.

Δ

а) рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1 y_1)$ і $B(x_2 y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Щоб знайти рівняння сторони AB, підставимо координати точок A і B:

$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-0}{10-0}$; $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{10}$; $y=5x-15$ (AB)

б) Висота CD перпендикулярна до сторони AB, тому їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2 задовольняють умові $k_1=-\frac{1}{k_2}$. З рівняння прямої AB видно, що $k_2=5$, тоді $k_1=-\frac{1}{5}$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1 y_1)$ в заданому напрямку: $y-y_1=k(x-x_1)$.

Підставимо в нього координати точки C і кутовий коефіцієнт k_1, одержимо шукане рівняння висоти CD:

$y-6=-\frac{1}{5}(x-13)$; $5y-30=-x+13$; $x+5y-43=0$

в) Визначити координати точки E. Застосуємо формулу поділу відрізка у заданому відношенні

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

Використовуючи координати вершини B та C, одержимо: $x=9$, $y=8$; $E(9;8)$

Підставимо координати точки A і E в рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, одержимо рівняння медіани AE:

4x-3y-12=0 (AE) ^

1.134. Вершини трикутника знаходяться в точках *A(3; -5), B(-3; 3), C(-1; -2)*.

Знайти довжину та рівняння бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини *A*.

Δ Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам прилеглих сторін. Знайдемо довжини цих сторін:

$|AB|=\sqrt{(-3-3)^2+(3+5)^2}=10$; $|AC|=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+5)^2}=5$;

Якщо точка *D*(*x*,*y*) – точка перетину бісектриси і сторони *BC*, то вона ділить цю сторону у відношенні λ :

$$\lambda=\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{10}{5}=2$$

Тепер знаходимо координати точки *D* за формулою поділу відрізка у заданому відношенні:

$$x=\frac{-3+2(-1)}{1+2}=\frac{5}{3};\quad y=\frac{3+2(-1)}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

Отже шукана довжина бісектриси дорівнює:

$$|AD|=\sqrt{(-\frac{5}{3}-3)^2+(-\frac{1}{3}+5)^2}=\frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві відомі точки *A(3; -5), D*($\frac{5}{3}$; $\frac{1}{3}$):

$$\frac{x-3}{5/3-3}=\frac{y+5}{1/3+5};\quad \frac{x-3}{-4}=\frac{y+5}{16}$$

16(x-3)=-4(y+5); 16x+4y-28=0

4x + y – 7 = 0 (AD)

1.135. Знайти рівняння площини, що проходить через точку M_0(2; 1; -1) і перпендикулярно вектору $\overline{N}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$.

Δ Достатньо використати рівняння площини, що проходить через задану точку і перпендикулярну заданому вектору: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Отже $1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0$, тобто $x-2y+3z+3=0$

1.136. Записати рівняння площини, яка проходить через точки M_1(2; -1; 3) і M_2(3; 1; 2), паралельну вектору $\bar{a}$ ={3;-1;4}.

Δ Використаємо умову компланарності трьох векторів: $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}$, де

$\overline{M_1M}$ ={x-2; y+1; z-3}

$\overline{M_1M_2}$ ={1; 2; -1}

Звідси $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$=0 або x-y-z=0

1.137. Знайти рівняння площини, яка проходить через дві точки M_1(1; -1; -2) і M_2(3; 1; 1) перпендикулярно до площини $x-2y+3z-5=0$.

Δ За нормальний вектор $\overline{N}$ шуканої площини можна вибрати вектор, перпендикулярний вектору $\overline{M_1M_2}$={2; 2; 3} і нормальному вектору $\overline{N}_1$={1; -2; 3} даної площини. А тому за $\overline{N}$ приймемо векторний добуток $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{N}_1$.

$\overline{N}$=[$\overline{M_1M_2}$ $\overline{N}_1$]= $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$=12$\bar{i}$ -3$\bar{j}$ -6$\bar{k}$

Залишається використати рівняння площини, яка проходить через задану точку (наприклад *A*) перпендикулярно заданому вектору $\overline{N}$={12; -3; -6}:

12(x-1)-3(y+1)-6(z+2)=0 або *4x – y - 2z –9 =0* ^

1.138. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1(3; -1; -5) перпендикулярно двом площинам *3x-2y+2z+7=0* і *5x-4y+3z+1=0*.

Δ На відміну від попередньої задачі, використаємо умову компланарності трьох векторів: $\overline{M_1M}$={*x-3; y+1; z+5*}, $\overline{N}_1$={3; -2; 2} і $\overline{N}_2$={5; -4; 3}, тобто:

$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z+5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}$=0

2(x-3)+1(y+1)-2(z+5)=0 або *2x + y - 2z – 15 =0*

1.139. Рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ привести до канонічного вигляду.

- Припустимо, наприклад, z_0 *=0*, знаходимо із даної системи: x_0=2, y_0=-1; таким чином, ми вже знаємо одну точку прямої: M_0(2; -1; 0). Тепер знайдемо направляючий вектор. Оскільки він повинен бути перпендикулярний нормальним векторам $\overline{N}_1$={1; -2; 3}, $\overline{N}_2$={3; 2; -5} заданих площин, то за $\bar{s}$ можна прийняти векторний добуток векторів $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$:

$\bar{s}$=[$\overline{N}_1$• $\overline{N}_2$]= $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$=4$\bar{i}+14\bar{j}+8\bar{k}$, тобто l=4; m=14; n=8

Підставляючи знайдені значення x_0, y_0, z_0 і l, m, n в рівність $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, одержимо канонічне рівняння даної прямої:

$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8}$ або $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{2}$

1.140. Знайти точку Q, симетричну точці $P(1;\ 3;\ -4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

- Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно заданій площині, що має нормальний вектор $\overline{N}$ $=\{3;\ 1;\ -2\}$ у вигляді:

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}$

Знайдемо проекцію точки P на задану площину, розв'язавши сумісно рівняння

$3x+y-2z=0$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}$.

Перепишемо рівняння прямої у вигляді $x=3t+1;\ y=t+3;\ z=-2t-4$.

Підставимо ці вирази для x, y, z в рівняння площини, знайдемо $t=-1$,

звідки x=-2; y=2; z=-2.

Координати симетричної точки знайдуться із формул

$x=\frac{x_P+x_Q}{2}$; $y=\frac{y_P+y_Q}{2}$; $z=\frac{z_P+z_Q}{2}$,

тобто $-2=\frac{1+x_Q}{2}$; $2=\frac{3+y_Q}{2}$; $-2=\frac{-4+z_Q}{2}$.

Звідси $x_Q=-5$; $y_Q=1$; $z_Q=0$.

Отже, Q(-5; 1; 0).

1.141. Знайти точку Q, симетричну точці P(2; -5; 7) відносно прямої, яка проходить через точки M_1(5; 4; 6) і M_2(-2; -17; -8).

- Рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2, має вигляд:

$$\frac{x-5}{-7}=\frac{y-4}{-21}=\frac{z-6}{-14}$$

Рівняння площини, яка проектує точку P на пряму, має вигляд

$-7(x-2)-21(y+5)-14(z-7)=0$ або $x+3y+2z-1=0$.

Знаходимо проекцію точки Q на пряму, для чого сумісно розв'яжемо систему рівнянь

$x+3y+2z-1=0$; $\frac{x-5}{-7}=\frac{y-4}{-21}=\frac{z-6}{-14}$.

Параметричне рівняння даної прямої має вигляд $x=-7t+5$; $y=-21t+4$; $z=-14t+6$.

Підставляючи x, y, z в рівняння площини, знайдемо $t=\frac{2}{7}$. Звідси $x=3$; $y=-2$; $z=2$.

Тоді координати симетричної точки можна знайти, використовуючи формулу для координат середини відрізка, тобто

$3=\frac{2+x_Q}{2}$; $-2=\frac{-5+y_Q}{2}$; $2=\frac{7+z_Q}{2}$,

звідки $x_Q=4$; $y_Q=1$; $z_Q=-3$.

Отже, Q(4; 1; -3).

РОЗДІЛ ІІ. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ГЛАВА IV: Функції

§1 Поняття множини

Основним первинним поняттям математики, її фундаментом є поняття множини. Слова *сукупність, клас, система, набір* та інші дуже часто є синонімами слова *множина*. Проте навіть у цій загальній ситуації ми б хотіли підкреслити, що множина – деякі об‘єкти (елементи множини), які виділені за певною ознакою або ознаками з інших об‘єктів і розглядаються як єдине ціле.

Прикладами множини є множина учнів в класі, сімейство зірок Великої Ведмедиці, множина сторінок даної книги, множина всіх раціональних чисел і т.д.

Належність елемента *a* множині *A* позначається $a \in A$ (а належить до множини А). Якщо, *a* не є елементом множини *A*, це позначається $a \notin A$ (*a* не належить *A*).

Якщо вдається перерахувати всі елементи множини *A*, це позначається як $A = \{a,\ b, \ldots\ldots c\}$, де у фігурних дужках вказують всі елементи *A*.

Навіть якщо множина має безліч елементів, інколи так можна зробити. Наприклад:

$N = \{1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots\}$ - множина всіх натуральних чисел;

$Z = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\ldots\}$ - множина всіх цілих чисел.

Загальне правило полягає в тому, щоб, виписавши досить багато елементів множини, зробити очевидним правило їх подальшого виписування.

Найчастіше множина задається виразом $A = \{a \mid P(a)\}$. Такий запис означає, що *A* – множина всіх елементів певної множини, які задовольняють умову *P*. Якщо умова *P* не виконується для жодного елемента множини, тобто вказана множина *A* не має жодного елемента, вона називається *порожньою* і позначається O.

Приклад 1. Множина $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ є сукупністю коренів рівняння $x^2-3x+2=0$, тобто ця множина складається із двох елементів: 1 і 2.

Множина $\{x \mid 3 < x < 7\}$ є сукупність всіх чисел, які задовольняють нерівності $3<x<7$.

Множина $\{x \mid x > 7 \ \ i \ \ x < 3\} = ⦰$, тобто це порожня множина.

Якщо кожен елемент множини *A* є також елементом множини *B,* то *A* – підмножина множини *B*. Це будемо позначати $A \subset B$ або, що те саме, $B \supset A$. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто множини *A* і *B*мають одні й ті ж елементи, тоді $A=B$. Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої іншої.

Нехай *A* – множина, тоді через $\overline{A}$ будемо позначати множину всіх елементів множини, які не належать *A*. Ця множина $\overline{A}$ називається *доповненням A*.

Нехай *A, B* – множини. *Перерізом (перетином) A* і *B* називається множина $A \cap B$ всіх елементів, які належать як множині *A*, так і множині *B*:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \ i \ \ x \in B\}$$

Об'єднанням A і *B* називається множина $A \cup B$ всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \ або \ \ x \in B\}.$$

Різницею. A і *B* називається множина $A \setminus B$ всіх елементів, які належать множині *A* і не належать множині *B*:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \ i \ \ x \notin B\}$$

Легко зрозуміти, що останнє означення рівносильне тому, що

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Приклад 2. Нехай $A = \{1;\ 3;\ 6;\ 8\}, \quad B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. Знайти переріз, об'єднання і різницю множин *A* і *B*.

Очевидно, що переріз двох даних множин - $A \bigcap B = \{6\ 8\}$; їх об'єднання - $A \bigcup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8\}$, а різниця $A \setminus B = \{1\ 3\}$. ∧

Множини, елементами яких є дійсні числа, називаються *числовими.* Із шкільного курсу алгебри відомі множини: *R* – дійсні числа, *Q* – раціональні, *I* – ірраціональні, *Z* – цілі, *N* – натуральні числа. Очевидно, що $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$ і $R = Q \bigcup I$.

Геометрично множина дійсних чисел *R* зображується точками *числової прямої* (або числової осі), тобто пряма, на якій вибраний початок відліку, додатній напрямок і одиниця масштабу.

Між множиною дійсних чисел і точками числової прямої існує взаємно однозначна відповідність, тобто кожному дійсному числу відповідає певна точка числової прямої і навпаки. Тому часто замість "число *x*" говорять "точка *x*".

Множину X, елементи якої задовольняють нерівності $a \le x \le b$, називають *відрізком* (або сегментом) $[a;\ b]$; нерівності $a < x < b$ - *інтервалом (a b)*; нерівності $a \le x < b$ або $a < x \le b$ називаються*напівінтервалами* відповідно $[a;\ b)\ i\ (a;\ b]$. Поряд з цим розглядаються нескінченні інтервали і напівінтервали

$(-\infty;\ a),\ (b;\ \infty),\ (-\infty;\ \infty),\ (-\infty;\ a]\ i\ [b;\ \infty)$.

Інтервал *(a; b)* відрізняється від відрізка $[a\ b]$ лише тим, що йому не належать кінці *a* і *b*.

Така відмінність відіграє суттєву роль в багатьох питаннях математичного аналізу. Крім того, інтервал *(a; b)* не містить ні найбільшого, ні найменшого числа, в той же час як у відрізку $[a\ b]$ такими числами є відповідно *b* і *a*. В подальшому всі вказані множини об'єднаємо терміном *проміжок X.*

§2. Абсолютна величина дійсного числа

Поняття абсолютної величини числа і нерівності, пов'язані з абсолютними величинами, широко використовуються в математиці.

Визначення. *Абсолютною величиною (або модулем) числа x називається саме число x, якщо* $x \ge 0$*, або число –x, якщо x<0.*

Абсолютна величина *x* позначається символом $|x|$. Таким чином

$$|x| = \begin{cases} x, & якщо\ x \ge 0 \\ -x, & якщо\ x < 0 \end{cases}$$

Очевидно, згідно визначення, що $|x| \ge 0$. Наприклад, |+5|=5; |-5|=-(-5)=5; |0|=0.

Приклад 3. Знайти $\big|x - |x|\big|$.

Якщо $x \ge 0$, то $|x| = x$ і $\big|x - |x|\big| = |x - x| = |0| = 0$.

Якщо $x < 0$, то $|x| = -x$ і $\big|x - |x|\big| = |x - (-x)| = |2x| = -2x$.

Укажемо на важливі властивості абсолютних величин:

$$|x + y| \le |x| + |y|;\ |x - y| \ge |x| - |y|;\ |xy| = |x| \cdot |y|;\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|};$$

Абсолютна величина різниці двох чисел $|x - a|$ означає відстань між точками *x* і *a* числової прямої, як для випадку *x*<*a*, так і *x*>*a* (рис.).

А тому, наприклад, розв'язком нерівності $|x - a| < \varepsilon$, (де $\varepsilon > 0$) будуть точки *x* інтервалу $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ (рис.), які задовольняють нерівності $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Будь який інтервал, який містить точку *a*, називається околом точки *a*.

Інтервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, тобто множина точок *x* таких, що $|x-a|<\varepsilon$ (де $\varepsilon>0$), *називається* ε *- околом точки a.*

§3. Поняття функції

Поняття функції є основним не тільки в математичному аналізі, де вона вивчається спеціально, але і у всій математиці в цілому.

Визначення. *Якщо кожному елементу x множини X (* $x\in X$ *) по деякому закону ставиться у відповідність певний елемент у множини Y (* $y\in Y$ *) тоді говорять, що на множині X задана функція* $y=f(x)$.

Змінну величину *x* називають незалежною змінною або аргументом, *y* – залежною змінною, а буква f позначає закон відповідності.

Множина *X* називається *областю визначення функції,* а множина *Y* – областю *значень функції.*

Якщо множина *X* спеціально не вказана, то під областю визначення функції будемо вважати множину таких значень *x*, при яких функція $y=f(x)$ взагалі має зміст.

Наприклад, областю визначення функції $y=x^2+\sqrt{5-x}$ є напівінтервал $(-\infty\ 5]$, оскільки $5-x\geq 0$.

Існує декілька способів задання функції. Найбільш поширені серед них:

1. *Аналітичний спосіб*, якщо функція задана формулою виду $y=f(x)$. Так функція $y=x^2+\sqrt{5-x}$ задана аналітично.

   Не слід змішувати функцію з її аналітичним виразом. Так, наприклад, одна функція:

$$y=\begin{cases}x^3,\ \textit{якщо}\ x<0\\ x+5,\ \textit{якщо}\ x\geq 0\end{cases}$$

   має два аналітичних вирази: x^3 (при $x<0$) і $x+5$ (при $x\geq 0$).

2. *Табличний спосіб* полягає в тому, що функція задається таблицею, яка містить значення аргументу *x* і відповідні значення функції $f(x)$, наприклад, таблиця синусів або косинусів.
3. *Графічний спосіб* полягає в зображенні графіка функції – множини точок *(x, y)* площини, абсциси яких є значення аргументу *x*, а ординати – відповідні їм значення функції $y = f(x)$

. При цьому способі функціональна залежність зображується лінією, яку називають графіком функції.

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент *x* з функцією *y* не розв'язане відносно *y*, а задане у виді $F(x, y) = 0$, тоді змінну *y* називають неявною функцією *x*. (наприклад: *3x-7y=6*)

Розглянемо основні властивості функцій.

1. ***Парність і непарність.*** Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-яких значень *x* із області визначення $f(-x) = f(x)$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$. В іншому випадку функція $y = f(x)$ називається функцією загального виду.

   Наприклад, функція $y = x^2$ є парною, оскільки $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ і $f(-x) = f(x)$, а функція $y = x^3$ - непарною, оскільки $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ і $f(-x) = -f(x)$.

   Крім того, наприклад, функція $y = x^2 + x^3$ є функцією загального виду, оскільки $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$ і $f(-x) \neq f(x)$, і $f(-x) \neq -f(x)$.

   Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

2. ***Монотонність.*** Функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною) на проміжку *x*, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше (менше) значення функції.

   Нехай $x_1, x_2 \in X$ і $x_2 > x_1$. Тоді функція зростає на проміжку *x*, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, і спадає, якщо $f(x_2) < f(x_1)$.

Зростаючі і спадні функції називають монотонними. Так, наприклад, функція $y = x^2$ при $x \in (-\infty\ 0]$ спадає і при $x \in [0\ +\infty)$ зростає.

3. ***Обмеженість.*** Функція $f(x)$ називається обмеженою на проміжку *X*, якщо існує таке додатне число *M>0*, що $|f(x)| \le M$ для будь якого $x \in X$. Наприклад, функція $y = \sin x$ обмежена на всій числовій осі, оскільки $|\sin x| \le 1$ для будь-якого $x \in X$.
4. ***Періодичність.*** Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \ne 0$, якщо для будь-яких *x* із області визначення функції $f(x+T) = f(x)$

.

Наприклад, функція $y = \sin x$ має період $T = 2\pi$, оскільки для будь-яких *x* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Найменше додатне число *T*, що задовольняє цю рівність, називається періодом функції.

Класифікація функцій. Елементарні функції.

Функція *y* аргументу *x* називається неявною, якщо вона задана рівнянням $F(xy) = 0$, не вираженим відносно залежної змінної. Наприклад, функція $y(y \ge 0)$, задана рівнянням $x^4 + y^2 - x = 0$. (Зауважимо, що таке рівняння задає дві функції $y = \sqrt{x - x^4}$, якщо $y \ge 0$, і $y = -\sqrt{x - x^4}$, якщо $y < 0$).

Нехай $y = f(x)$ є функція від незалежної змінної *x*, визначеної на проміжку *X* з областю значень *Y*. Поставимо у відповідність кожному $y \in Y$ єдине значення $x \in X$, при якому $f(x) = y$. Тоді функція $x = \varphi(y)$, визначена на проміжку Y з областю значень *X*, називається оберненою.

Оскільки традиційно незалежну змінну позначають через *x*, а функцію через *y*, то функція, обернена до функції $y = f(x)$, приймає вигляд $y = \varphi(x)$. Наприклад, для функції $y = a^x$ оберненою буде функція $x = \log_a y$, або (в звичайних позначеннях залежної і незалежної змінної) $y = \log_a x$.

Можна довести, що для будь-якої суворо монотонної функції існує обернена. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Основні елементарні функції.

1. Ступенева функція виду $y = x^n$ де *n* – дійсне число;
2. Показникова функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;
3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;
4. Тригонометричні функції: $y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = tgx, \; y = ctgx.$
5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x; \quad y = \arccos x; \quad y = arctgx, \; y = arcctgx.$

Зауваження: Автор навмисне випускає із розгляду ці функції, оскільки основні елементарні функції та їх графіки детально вивчають у середній школі. Вони відіграють важливу роль в математичному аналізі, тому ці функції, їх області визначення та графіки треба добре знати.

Якщо змінна y залежить від другої змінної величини U, яка в свою чергу є функцією x, то y називають функцією від функції або складною функцією. Математично це можна записати так:

якщо $y = f(U), \quad U = \varphi(x)$, то $y = f[\varphi(x)]$.

Кажуть: *y* – складна функція *x, U* – проміжний аргумент; *x* – аргумент (незалежна змінна).

Наприклад $y = \cos^3 x$, або $y = U^3$, де $U = \cos x$.

Функції, побудовані із основних елементарних функцій з допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа операцій утворення складної функції, називаються елементарними.

Наприклад, функція

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}\cos^2 x}{\sqrt{x} + 5^{2x}} + \sqrt{\ln^3 x - 2}$$

є елементарною, оскільки тут число операцій додавання, віднімання, множення, ділення і утворення складної функції ($\cos^2 x,\ 5^{2x},\ \ln^3 x,\ \sqrt{\ln^3 x - 1}$) скінченне.

Елементарні функції поділяються на алгебраїчні і неалгебраїчні (трансцендентні).

Алгебраїчною називається функція, в якій над аргументом проводиться скінченне число алгебраїчних дій. До яких належать:

ціла раціональна функція (многочлен або поліном)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

дробово-раціональна функція - відношення двох многочленів;

ірраціональна функція – (якщо в складі операцій над аргументом є здобуття кореня).

Будь-яка неалгебраїчна функція називається трансцендентною. До них належать: показникова, логарифмічна, тригонометрична, обернені тригонометричні.

§4 Застосування функцій в економіці

Спектр використання функцій в економіці досить широкий. Найбільш часто використовуються в економіці такі функції:

1. *Функція корисності* - залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії від рівня (інтенсивності) цієї дії.
2. *Виробнича функція* - залежність результату виробничої діяльності від обумовлюючих його факторів.
3. *Функція випуску* (частковий вид виробничої функції) – залежність обсягу виробництва від обсягу продукції.
4. *Функція витрат* (частковий вид виробничої функції) – залежність витрат виробництва від обсягу продукції.
5. *Функція попиту, споживання і пропозиції* - залежність обсягу попиту, споживання або пропозицій на окремі товари або послуги від різних факторів (наприклад ціни, доходу і т.д.)

Враховуючи, що економічні явища і процеси обумовлені діями різних факторів, для їх дослідження широкого використовуються *функції багатьох змінних*.

Якщо дією побічних факторів можливо знехтувати, або вдається зафіксувати ці фактори на певних рівнях, то залежність одного головного фактора вивчається з допомогою функції однієї змінної.

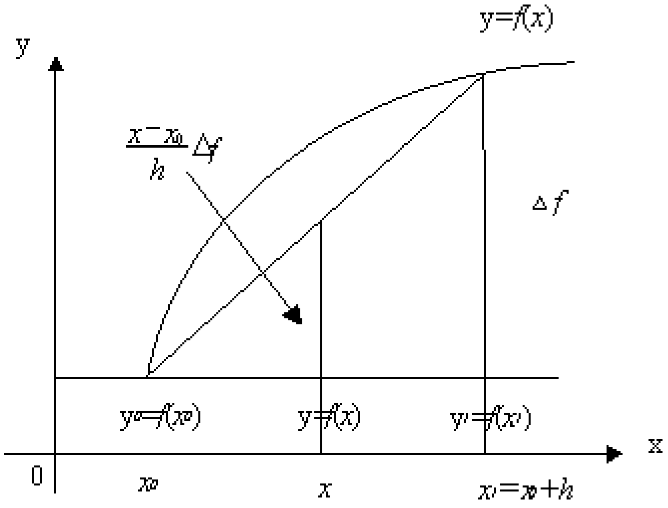

Рис. 42

Зупинимося на одному важливому прикладі застосування функції в економіці – *використання таблиць функцій*, які дозволяють зробити можливими різні розрахунки, виключити або спростити громіздкі обчислення.

При обчисленні за допомогою таблиць доводиться стикатися з ситуацією, коли аргумент функції заданий з більшою точністю, ніж дозволяє таблиця. В такому випадку бажано вдатися до*інтерполяції* – наближеного знаходження невідомих значень функцій по відомим її значеннях в заданих точках.

Найбільш простим є *лінійне інтерполювання*, при якому допускається, що приріст функції пропорційний приросту аргументу. Якщо задане значення *x* лежить між наведеними в таблиці значеннями x_0 і $x_1 = x_0 + h$, яким відповідають значення функції $y_0 = f(x_0)$ і $y_1 = f(x_0) + \Delta f$, то вважають, що $f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f$ (рис.).

Величини $\frac{x - x_0}{h}\Delta f$ називаються *інтерполяційними поправками*. Ці величини обчислюються за допомогою таблиці або наводяться в додатку до таблиці.

Якщо згідно заданим значенням функції необхідно знайти наближене значення аргументу, то необхідно здійснити *обернене інтерполювання*.

Приклад 4. Функція $y = f(x)$ задана таблицею:

X	2	2,04	2,08
Y	2,42	2,88	3,38

1. Використовуючи лінійне інтерполювання, знайти $f(2{,}008)$.
2. Чому дорівнює *x*, якщо $f(x) = 3{,}1$

1.Маємо $x_0 = 2$; $f(x_0) = 2{,}42;\ x_1 = 2{,}04;\ f(x_1) = 2{,}88;\ \ h = x_1 - x_0 =$

$= 2{,}04 - 2{,}0 = 0{,}04;\ \Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 2{,}88 - 2{,}42 = 0{,}46.$

Згідно інтерполяційної формули одержимо $y = f(2{,}008) \approx 2{,}42 + \dfrac{2{,}008 - 2{,}0}{0{,}04} \cdot 0{,}46 = 2{,}512$.

2. Обернене інтерполювання можна здійснити по тій же формулі, але потрібно поміняти місцями змінні *x* і *y*:

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \frac{y - y_0}{h}\Delta\varphi,$$

де $x = \varphi(y)$ - невідоме значення оберненої функції.

Маємо $y_0=2{,}88$; $\varphi(y_0) = 2{,}04;\ y_1 = 3{,}38;\ \varphi(y_1) = 2{,}08;\ h = y_1 - y_0 =$

$= 3{,}38 - 2{,}88 = 0{,}50;\ \Delta\varphi = \varphi(y_1) - \varphi(y_0) = 2{,}08 - 2{,}04 = 0{,}04$.

Згідно інтерполяційної формули одержимо

$$x = \varphi(3{,}1) \approx 2{,}04 + \frac{3{,}1 - 2{,}8}{0{,}5} \cdot 0{,}04 = 2{,}0576 \approx 2{,}058.$$

Точність знаходження невідомих значень за допомогою лінійного інтерполювання незавжди є достатньою, а тому використовують ще й інші методи інтерполювання, наприклад, *квадратичне інтерполювання.*

РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧ

Приклад 5. Знайти область визначення функцій.

$$а)\ f(x)=\frac{x-3}{4x-1};\quad б)\ f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x-1};\quad в)\ f(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2};$$
$$г)\ y=\sqrt{x}-\lg(2x-3).$$

а) Функція визначена, якщо $4x-1\neq 0$, тобто якщо $x\neq\frac{1}{4}$.

$$D(f)=\left(-\infty,\ \frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\ +\infty\right)$$

б) Функція визначена, якщо $x-1\neq 0\ і\ 1+x>0$, тобто якщо $x\neq 1\ і\ x>-1;$ Отже, об’єднуючи два інтеграли, маємо $D(f)=(-1\ 1)\cup(1\ +\infty)$.

в) Перший додаток дійсний при $1-2x\geq 0$, а другий – при $-1\leq\frac{3x-1}{2}\leq 1$. Отже необхідно розв’язати систему нерівностей

$$\begin{cases}1-2x\geq 0\\ \frac{3x-1}{2}\leq 1\end{cases}\qquad \frac{3x-1}{2}\geq -1$$

В результаті одержимо: $x\leq\frac{1}{2};\ x\leq 1;\ x\geq-\frac{1}{3}$.

Отже, областю визначення функції є відрізок $\left[-\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}\right];$

г) Область визначення функції знайдемо із системи нерівностей

$\begin{cases} x \ge 0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$ звідси $x > \dfrac{3}{2}$, або $x \in \left(\dfrac{3}{2};\ \infty\right)$.

Приклад 6. Знайти множину значень функції.

$a)\ \ f(x) = x^2 - 6x + 5;\quad б)\ \ f(x) = 4 + 5\sin x.$

Виділимо повний квадрат, одержимо $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$. Перший доданок є невід'ємним, а тому функція приймає значення не менше –4. Отже множина значень функції є проміжок[-4; +?).

б) Оскільки $|\sin x| \le 1$, або $-1 \le \sin x \le 1$. Помножимо нерівність на 5 і додамо до всіх частин цієї подвійної нерівності 4, маємо $-5 \le 5\sin x \le 5;\ \ -1 \le 4 + 5\sin x \le 9$. Отже множиною значень функції є проміжок $[-1;\ \ 9]$.

Приклад 7. З'ясувати парність (непарність) функцій:

$a)\ \ f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 4\sin x;\quad б)\ \ f(x) = 2^x + 2^{-x};$

$в)\ \ f(x) = x^2 + 6x^3;$

а) Замінюючи *x* на *–x*, одержимо

$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{(-x)} + 4\sin(-x) = -x^2\sqrt[3]{x} - 4\sin x = -\left(x^2\sqrt[3]{x} + 4\sin x\right)$.

Тобто $f(-x) = -f(x)$. Отже функція непарна.

б) Маємо $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x$; тобто $f(-x) = f(x)$. Отже $f(x)$ - парна.

в) Маємо $f(-x) = (-x)^2 + 6(-x)^3 = x^2 - 6x^3$. Таким чином $f(-x) \ne f(x)$ і $f(-x) \ne -f(x)$, тобто функція не є ні парною ні не парною.

Приклад 8. Знайти основні періоди функцій:

$a)\ f(x) = \cos 6x;\quad б)\ f(x) = \sin 6x + tg 4x$

а) Оскільки основний період функції $\cos x$ є 2π, то для функції $f(x) = \cos 6x$ він дорівнює $\frac{2\pi}{6}$; тобто $\frac{\pi}{3}$;

б) Тут перший доданок має період $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, а другий - $\frac{\pi}{4}$. Очевидно, що основний період даної функції є найменше загальне кратне чисел $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{4}$, тобто π.

ГЛАВА V: Границя і неперервність

§1 Поняття границі послідовності

1.1 Збіжні послідовності

Поняття *границі функції* – одне з найважливіших у вищій математиці. Викладення теорії границь почнемо з розгляду границі функції натурального аргументу – послідовності.

Визначення 1*. Нехай кожному натуральному числу* $n \in N$ *поставлено у відповідність деяке дійсне число* x_n *. Тоді кажуть, що задана послідовність чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ x_n, \ldots$ *або, коротко, послідовність* $\{x_n\}$.

Отже; *послідовністю* називається функція $f(n) = x_n, n \in N$, визначена на множині натуральних чисел. Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ x_n, \ldots$ є членами (елементами) послідовності, x_n – загальним її членом (елементом), а n – номером члена.

Визначення 2. Послідовність $\{x_n\}$ називається збіжною, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$| x_n - a | < \varepsilon$ (1)

Число *a* при цьому називається границею послідовності $\{x_n\}$. Для позначення збіжності послідовності $\{x_n\}$ до числа a вживається запис:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a, n \to \infty$.

Довільний інтервал виду $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε - околом точки a. Якщо число a – границя послідовності $\{x_n\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$ усі члени послідовності потрапляють в ε–окіл точки a, адже при вказаних n згідно з (1) виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ не збігається, то кажуть, що вона розбігається.

Теорема 1. Збіжна послідовність має тільки одну границю.

Доведення. Припустимо супротивне: нехай збіжна послідовність $\{x_n\}$ має принаймні дві різні границі a і b. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що, по-перше, $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|x_n - b| < \varepsilon$ при всіх $n > N_2$.

Припустимо, $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, тоді при всіх $n > \max\{N_1; N_2\}$ одночасно виконуються нерівності $|x_n - a| < \frac{|a-b|}{2}, |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2}$,

звідки випливає, що

$$|a-b| = |(x_n - b) + (a - x_n)| \le |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

тобто $|a-b|<|a-b|$.

Одержана суперечність доводить теорему.

1.2 Нескінченно малі і нескінченно великі.

Серед збіжних послідовностей виділимо один важливий клас.

Визначення 3. Збіжна до нуля послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою.*

Роль, яку відіграють нескінченно малі в теорії границь, з'ясовує наступна теорема.

Теорема 2. Для того щоб послідовність $\{x_n\}$ збігалася до числа a, необхідно й достатньо, щоб послідовність $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ була нескінченною малою.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Тоді згідно з означенням 2 для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n>N$ виконується нерівність

$$|x_n-a|=|(x_n-a)-0|<\varepsilon$$

А це й доводить, що $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ – нескінченно мала.

Достатність. Нехай $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ – нескінченно мала. Згідно з означенням 3 для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n>N$ виконується нерівність $|\alpha_n|<\varepsilon$, або $|(x_n-a)-0|=|x_n-a|<\varepsilon$.

Отже, за визначенням 2 маємо $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Докладно вивчимо властивості нескінченно малих.

Лема 1. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих є нескінченною малою.

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ –нескінченно малі. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$-нескінченно мала. Задамо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ - нескінченно малі, то знайдуться такі номери N_1 і N_2, що, по-перше, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n > N_2$.

Припустимо, $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при всіх $n > N$ вказані вище нерівності виконуються одночасно, а тому $|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Це й означає, що $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ - нескінченно мала.

Наслідок. Алгебраїчна сума будь-якого скінченого числа нескінченно малих є нескінченно малою.

Лема 2. Добуток двох (або будь-якого скінченого числа) нескінченно малих є нескінченно малою.

Міркуючи аналогічно до попереднього, пропонуємо читачеві довести цю лему самостійно.

Визначення 4. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається обмеженою, якщо існує таке число* $K > 0$, *що при всіх* $n \in N$ *виконується нерівність* $|x_n| \le K.$

У противному разі послідовність називається *необмеженою*.

Лема 3. Добуток нескінченно малої на обмежену - нескінченно мала.

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ - нескінченно мала, а $\{x_n\}$ – обмежена послідовність. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n x_n\}$ - нескінченно мала. Оскільки $\{x_n\}$ – обмежена, то існує таке число $K > 0$, що при всіх $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \leq K$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ - нескінченно мала, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N, що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ при всіх $n > N$. Але тоді при таких n

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n||x_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Це й означає , що $\{\alpha_n x_n\}$ - нескінченно мала.

Наслідок. Добуток нескінченно малої не стале число - нескінченно мала.

Іноді зручно використовувати поняття нескінченно великої послідовності.

Визначення 5. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається нескінченно великою, якщо для будь-якого числа* $E > 0$ *можна знайти такий номер* N*, що при всіх* $n > N$ *виконується нерівність* $|x_n| > E.$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ або $x_n \to \infty, n \to \infty$.

Якщо ж, починаючи з деякого номера N, члени послідовності $\{x_n\}$ набувають тільки додатних (від'ємних) значень, то писатимемо

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$ або $x_n \to +\infty, n \to \infty (x_n \to -\infty, n \to \infty)$

Встановимо зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими.

Теорема 3. Для того щоб $\{\alpha_n\}$ $(\alpha_n \neq 0)$ була нескінченно малою, необхідно й достатньо, щоб $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ була нескінченно великою.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\{\alpha_n\}$ - нескінченно мала. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер N, щоб при всіх $n > N$ виконувалася нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Припустимо, $\frac{1}{\varepsilon} = E$, тоді при вказаних вище n виконується нерівність

$$\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E,$$

звідки й випливає, що $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ - нескінченно велика.

-

<u>Достатність.</u> Нехай $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ - нескінченно велика. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $\left\|\frac{1}{\alpha_n}\right\| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Тоді для послідовності $\{a_n\}$ при вказаних вище n маємо $|\alpha_n| < \varepsilon$, тобто $\alpha_n \to 0, n \to \infty$ і $\{a_n\}$ - нескінченно мала.

Приклад 1. Використовуючи визначення границі, довести що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Виберемо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Оскільки $|x_n - 1| = |\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1}$, то для знаходження значень n, які задовольняють нерівності $|x_n - 1| < \varepsilon$, достатньо розв'язати нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, звідки отримаємо $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Отже, за N можливо взяти цілу частину числа $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, тобто $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Тоді нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ буде виконуватися для всіх $n > N$. Оскільки ε - будь-яке, то доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Згідно визначення, "а" в даному прикладі дорівнює 1.

Якщо, наприклад, $\varepsilon = 0{,}01$, тоді $N = \left[\frac{1-0{,}01}{0{,}01}\right] = 99$ і при $n > N = 99$ маємо $|x_n - 1| < 0{,}01$. Зауважимо, що, наприклад, при $n < N$ $(n = 97, n = 98)$ нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon = 0{,}01$ не виконується. Дійсно, нехай $n = 98$

Тоді $|x_{98} - 1| = \left|\frac{98}{99} - 1\right| = \left|-\frac{1}{99}\right| = \frac{1}{99} > \frac{1}{100}$

А якщо взяти, наприклад, $n = 100$, тобто $n > 99$, то

$$|x_{100} - 1| = \left|\frac{100}{101} - 1\right| = \left|-\frac{1}{101}\right| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}.$$

Таким чином, нерівність $|x_n - 1| < 0{,}01$ виконується лише для номерів n, більших ніж 99.

Якщо, наприклад, $\varepsilon = 0{,}0001$, тоді значення номера N збільшиться. Дійсно $N = \left[\frac{1-0{,}0001}{0{,}0001}\right] = 9999$ і при $n > N = 9999$ одержимо $|x_n - 1| < 0{,}0001$

Приклад 2. Використовуючи визначення, довести, що послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ є нескінченно малою.

Візьмемо будь-яке число ε. Із нерівності $|\alpha_n|=|\frac{1}{n}|<\varepsilon$ одержимо $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Якщо взяти $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то для всіх $n>N$ буде виконуватися $|\alpha_n|<\varepsilon$. (Якщо $\varepsilon=\frac{1}{10}$ одержимо $N=[10]=10$ при $\varepsilon=\frac{4}{15}$ маємо $N=\left[\frac{15}{4}\right]=3$ і т.д.). Таким чином, згідно ознаки послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ нескінченно мала.

§2 Основні властивості збіжних послідовностей

Теорема 1. Збіжна послідовність обмежена.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Припускаючи в означенні 2 (§1) $\varepsilon=1$, знайдемо такий номер N, що при всіх $n>N$ виконується нерівність $|x_n-a|<1$. Звідки при вказаних n.

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\le|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

Припустимо $K=\max(1+|a|,|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_N|)$. Тоді, очевидно, що $|x_n|<K$ при всіх $n\in N$, тобто збіжна послідовність $\{x_n\}$ дійсно обмежена.

На практиці при знаходженні границь числових послідовностей часто використовується наступна теорема про арифметичні дії над границями.

Теорема 2. Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – збіжні, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді збіжні й послідовні $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \{c \cdot x_n\}$ (c - стала), $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ (остання при $y_n \ne 0, n\in N, b\ne 0$), причому:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot a;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}.$

Доведення. 1) Оскільки a і b – границі послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, то за теоремою 2 (§1) маємо

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n,$$

де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ - нескінченно малі.

Додаючи ці рівності, отримаємо.

$$x_n \pm y_n = a \pm b + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

За лемою 1(§1) $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ –нескінченно мала, а тому за теоремою 2(§1) послідовність $\{x_n \pm y_n\}$ збігається до $a \pm b$, так що існує $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a \pm b.$

2) Як і в попередньому пункті, $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$. Далі маємо

$$x_n \cdot y_n = ab + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

За лемами 1-3 (§1) і наслідками до них $\{\alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \beta_n\}$ - нескінченно мала, а тому за теоремою 2 (§1) послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ збігається до $a \cdot b$, так що існує

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

3) *Наслідок.* Якщо послідовність $\{x_n\}$ – збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і c – стала, то збіжна й послідовність, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot a,$ тобто сталий множник можна виносити за знак границі.

Властивість (4) рекомендуємо довести самостійно.

Теорема 3. (про три послідовності). Нехай задані послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, при цьому для всіх $n \in N$ виконуються нерівності $x_n \le y_n \le z_n$.

Тоді, якщо послідовності $\{z_n\}$ і $\{x_n\}$ збіжні до однієї і тієї ж границі, то і послідовність $\{y_n\}$ також збіжна, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$; $|z_n - a| < \varepsilon$ при всіх. $n > N_2$.

Нехай $N = \max(N_1; N_2)$. Тоді при $n > N$ виконані одночасно обидві нерівності і, зокрема, при вказаних n.

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon.$$

Але тоді з умов теореми виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

при всіх $n > N$, тобто

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

при всіх $n > N$, а, отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

що й потрібно довести.

Теорема 4. (про перехід до границі у нерівностях).

Нехай задані збіжні послідовності $\{x_n\},\{y_n\}$, при цьому для всіх $n \in N$ виконуються нерівності $x_n \le y_n$. Тоді і

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$. Припустимо супротивне: $a > b$.

Припустимо, $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, тоді можна знайти такі номери N_1 і N_2, що $|x_n - a| < \frac{a-b}{2}$ при всіх $n > N_1$; $|y_n - b| < \frac{a-b}{2}$ при всіх $n > N_2$.

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконані обидві нерівності і, зокрема, при вказаних n

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$y_n > b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

,

отже, при $n > N$ маємо $y_n < \frac{a+b}{2} < x_n$, тобто $y_n < x_n$. Одержана суперечність доводить теорему.

Зауважимо, що у випадку виконання для членів збіжних послідовностей $\{x_n\} і \{y_n\}$ при всіх $n \in N$ суворої нерівності $x_n < y_n$, після переходу до границі строга нерівність, взагалі кажучи, не зберігається.

Так само, як вище, лише

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$$

Наприклад, $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = +\frac{1}{n}$. При всіх $n \in N$, очевидно, $x_n < y_n$, але

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

Змінна x_n, чи послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ називається *зростаючою,* якщо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots..$$

Якщо ж

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots\ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots..$$

називається *неспадною.* Змінна x_n, чи послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ називається *спадною,* якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots\ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots..,$$

коли ж

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots\ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots..,$$

то змінна x_n називається *незростаючою.*

Всі ці чотири типи змінних, для яких характерним є змінювання в одному напрямку при зростанні n, називають *монотонними.*

Теорема 5. *Будь-яка монотонна обмежена змінна має границю.*

Дамо геометричне пояснення цієї теореми, строге доведення виходить за межі цієї книги.

Нехай маємо, наприклад, неспадну обмежену послідовність

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots\ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots..,$$

причому $|x_n| < M$ для всіх n. Візьмемо числову ось і нанесемо на неї члени даної послідовності та число *M*. Зі збільшенням номера *n* точка, що зображує відповідний член послідовності x_n, буде пересуватися тільки вправо, але вона не може опинитися правіше точки *M*, бо послідовність обмежена. Ознака й твердить, що послідовність має границю (яка не перевищує *M*). Подібним чином можна пояснити й інші випадки монотонних змінних (спадної, незростаючої).

Приклад 3. Послідовність x_1 =0,7, x_2 =0,77, x_3 =0,777, . . . , x_n =0,77… (n раз) …7 є монотонно зростаючою, бо $x_n < x_{n+1}$. Крім того, очевидно, що вона обмежена, тому що кожний її член більший за нуль, але менший за 7/9.

$$x_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \ldots + \frac{7}{10^n} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{7}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9} - \frac{7}{9*10^n},$$

яке б не було n. Отже, послідовність має границю: її легко знайти

$$\lim x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10} - \frac{7}{9*10^n}\right) = \frac{7}{9}$$

Приклад4. Послідовність x_1 =2, x_2 =3/2, x_3 =4/3, . . . , $x_n = \frac{n+1}{n}$, … монотонно спадна, бо $x_n > x_{n+1}$, і обмежена ($1 < x_n \le 2$ для будь-якого n). Отже вона має границю. Просте обчислення дає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

§3 Поняття границі функції

3.1 Визначення границі функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякій підмножині X множини дійсних чисел R, і x_0 – гранична точка множини X. Нагадаємо, що у будь-якому ε – околі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ граничної точки x_0 міститься нескінченне число точок множини X, проте сама точка x_0 може й не належати X.

Визначення 1. (Гейне*). Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X, x_n \ne x_0\ (n \in N)$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до A.*

Якщо число A – границя функції в точці x_0, то пишуть $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Нехай функція $f(x)$ має границю $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, тоді вона, очевидно, єдина. Це випливає з того, що збіжна послідовність $\{f(x_n)\}$ може мати лише одну границю (див. гл.5, §1).

Визначення 2. (Коші). *Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність*

$0 <| x - x_0 |< \delta,$

виконується нерівність

$| f(x) - A |< \varepsilon.$

Визначення границі функції в точці за Гейне і за Коші еквівалентні.

Відзначимо геометричний зміст визначення 2, скориставшись графіком функції $y = f(x)$ (рис.40). Який би малий ε–окіл точки А не взяти, повинен існувати такий δ–окіл точки x_0, що коли x змінюється між $x_0 - \delta$ і $x_0 + \delta$, графік функції $y = f(x)$ знаходиться у смузі шириною 2ε між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$. Підкреслимо, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ може набувати значення, яке не дорівнює А, або навіть бути невизначеною. Тому в визначенні 2 йдеться саме про нерівність $0 <| x - x_0 |< \delta.$

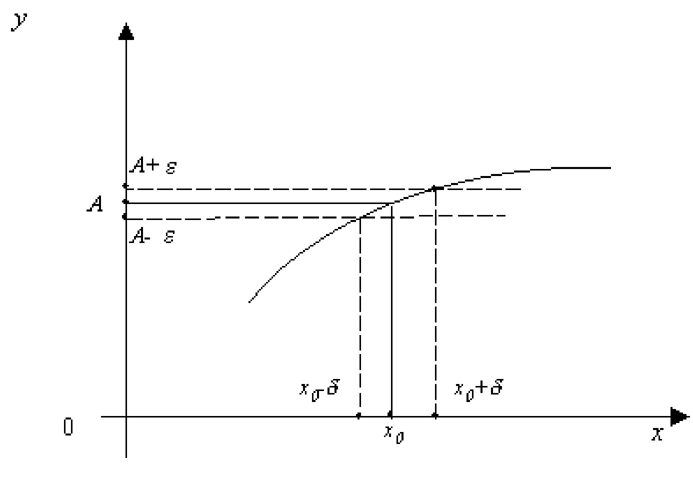

Рис.43

3.2 Односторонні границі

При дослідженні функції корисні поняття односторонніх границь.

Визначення 3 (Гейне). *Число A називається правою (лівою) границею функції f(x) в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} I X$, $x_n > x_0$ ($x_n < x_0$) ($n I N$), збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до A.* При цьому вживають відповідно позначення

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x_n)=A$ ($\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x_n)=A$)

або

$f(x_0+0)=A$ ($f(x_0-0)=A$).

В окремому випадку, коли $x_0=0$, пишуть $\lim\limits_{x \to -0} f(x_n)=A$ ($\lim\limits_{x \to +0} f(x_n)=A$).

Визначення 4 (Коші). *Число A називається правою (лівою) границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівностям*

$0 < x - x_0 < \delta \quad (0 < x_0 - x < \delta)$,

виконується нерівність

$| f(x) - A| < \varepsilon$.

Визначення 3 і 4, звичайно ж, еквівалентні.

Зв'язок між односторонніми границями і границею функції встановлює теорема 3.

Теорема 3. Функція *f(x)* має границю в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли існують їх права і ліва границі в цій точці, які збігаються між собою, при цьому

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

3.3 Границя функції на нескінченності і нескінченні границі

Нехай функція $f(x)$ визначена при $x>x_0$ ($x<x_0$).

Визначення 5. Число A називається *границею функції* $f(x)$ при $x\to\infty$ ($x\to-\infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ можна знайти таке $\Delta>0$, що при всіх x, які задовольняють нерівності $x>x_0$, $x>\Delta$ ($x<x_0$, $x<-\Delta$), виконують нерівність

$|f(x)-A|<\varepsilon.$

При цьому вживають відповідні позначення

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$)

або

$f(x)\to A,\ x\to+\infty$ ($f(x)\to A,\ x\to-\infty$).

В разі, якщо існують границі функції $f(x)$ як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$, причому $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$), то вживають позначення

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ або $f(x)\to A,\ x\to\infty$

Вище малося на увазі, що A – певне число. Іноді зручно розглядати нескінченні границі функції.

Визначення 6. Кажуть, що функція $f(x)$ має своєю границею $+\infty$ ($-\infty$) при $x\to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого E>0 можна знайти таке число ?>0, що при всіх x, які задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $f(x)>E$ ($f(x)<-E$).

При цьому вживають відповідно позначення

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+?$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$)

або

$f(x)\to+\infty$ ... $x\to x_0$ ($f(x)\to--\infty$, $x\to x_0$).

Аналогічно тому, як це зроблено в 3.2 цього параграфа, нескладно визначити також односторонні нескінченні границі

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=\pm ?$; $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)=\pm \infty$.

Приклад 5. Використовуючи визначення, довести $\lim\limits_{x \to 1} \neq$ (3*x*-2)=1.

Візьмемо будь-яке число ε >0. Задача полягає в тому, щоб по цьому ε знайти таке δ >0, при якому із нерівності |*x*-1|< δ випливала нерівність |*f*(*x*)-1|=|(3*x*-2)-1|< ε . Перетворюючи останню нерівність, отримаємо |(3*x*-1|< ε або |*x*-1|< $\frac{\varepsilon}{3}$.

Отже, якщо взяти $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$, то для всіх *x*, які задовольняють нерівності |*x*-1|< δ , виконується нерівність |*f*(*x*)-1|< δ . Це і означає, що $\lim\limits_{x \to 1}$ =(3*x*-2)=1.

Якщо, наприклад, ε =1, то $\delta \le \frac{1}{3}$, якщо $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\delta \le \frac{1}{6}$, якщо ε =0,01, то $\delta \le$ 0,03 і т.д.; таким чином, δ залежить від ε . Тому в визначенні границі іноді пишуть $\delta = \delta(\varepsilon)$.

§4 Властивості границь

Теорема. Нехай функції *f*(*x*) і *g*(*x*) мають границі в точці x_0:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=B$

Тоді функції *f*(*x*) ± *g*(*x*), *f*(*x*)·*g*(*x*), $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $B \neq 0$) також мають границі в точці x_0, причому:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)]=A \pm B$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]=A \cdot B$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$I *X*, x_n= x_0 (*xIN*) – довільна послідовність, збіжна до x_0. За визначенням 1, збіжними є послідовності $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$, причому їхні границі – відповідно *A* і *B*. Але тоді за теоремою 2 (глава 5, §2) послідовності $\{f(x) \pm g(x)\}$,

$\{f(x)\cdot g(x)\}$, $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ (при $B\neq 0$) мають границі, що дорівнюють відповідно $A\pm B$, $A\cdot B$, $\frac{A}{B}$. Згідно з визначенням 1

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$; $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$.

Наслідок 1. Для довільного числа C

$\lim\limits_{x\to x_0}[C\,f(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Наслідок 1. Для довільного mIN

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^m=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^m$

Отже, якщо говорити про границю функції від довільної змінної, то, оскільки, для змінних залежних від номера (показника) *n* теореми доведені, вони вірні і для функції в загальному випадку. Зауважимо, що приведені властивості повністю зберігаються у випадку односторонніх границь і границь функції на нескінченності.

§5 Перша і друга важливі границі

5.1 Перша важлива границя

Доведемо, що $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Зазначимо спочатку, що функція $\frac{\sin x}{x}$ визначена при всіх $x\neq 0$.

Припустимо, що $xI\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Доведемо, що при таких x виконані нерівності $\sin x<x<\operatorname{tg} x$.

Розглянемо коло одиничного радіуса з центром в точці *0* (рис.41) і побудуємо рівні кути *AOB* і *BOC* з радіанною мірою *x*. Нехай *EA* і *EC* – дотичні до цього кола. Очевидно, що хорда *AC*, яка стягує дугу кола *AC*, менша цієї дуги, котра в свою чергу менша довжини ламаної *EA+EC*. Але ж *AC*=2 sin *x*, *EA+EC*=2tg *x*, а довжина дуги *AC=2x*, тобто $\sin x<x<\operatorname{tg} x$.

Беручи до уваги, що при $x I \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x>0$ і $\operatorname{tg} x>0$, маємо

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

або

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

звідки

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

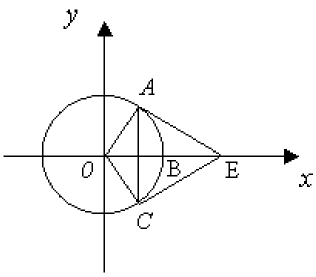

Рис.41

Оскільки $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}$ (тут використано, що $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$), то при $x I \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

Зазначимо, що обидві частини цієї нерівності не змінюються, якщо замінити *x* на –*x*. Тому вона виконується не тільки при *xI* $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, а і при *xI* $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, тобто при всіх *xI* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, *x?*0.

За наслідком 2 до теореми 1 і 2 (§2) можна зробити висновок, що $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)$ =0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$.

5.2 Друга важлива границя

У вищій математиці зустрічається введене ще в XVIIст. число, яке позначається буквою "*e*". Число це можна визначити як границю функції *f*(*x*)= $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при прямуванні *x* до нуля:

e= $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (1)

Вважається, що $x\neq 0$ і $x\neq -1$, оскільки функція не визначена при цих аргументах, факт існування цієї границі приймемо без доведення.

Якщо в рівності припустити $x=\frac{1}{y}$, а потім повернутися до попереднього позначення незалежної змінної, то одержимо

e= $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (2)

Якщо функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ розглядається тільки на множині натуральних чисел, то із (2) випливає, що

e= $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (3)

Стале число “e” ірраціональне і приблизно дорівнює 2,71828…

Число “e”, прийняте за основу системи логарифмів, прийнято називати *натуральними*. Натуральний логарифм x позначається символом $\ln x$. Встановимо зв’язок між натуральними і десятковими логарифмами. Для цього, логарифмуючи по основі “e” тотожність $x=a^{\log_a x}$, одержимо рівність $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$. При $x=e$, ця рівність дає

$\log_a e = \frac{1}{\ln a}$. (4)

При $a=10$ та ж рівність дає $\ln x = \ln 10 \cdot \lg x$ і $\lg x = M \ln x$, де

$M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e$ (5)

Формула (5) зв’язує натуральні і десяткові логарифми і показує, що ці логарифми прямо пропорційні один одному. Число M називається *модулем переходу* від натуральних логарифмів до десяткових.

$M = \lg e \approx 0{,}43429$, $\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2.30258$.

Наприклад: $\ln 2 = \frac{1}{M} \lg 2 = 2{,}30258 \cdot 0{,}30103 \approx 0{,}69315$.

До числа e приводять розв’язки багатьох прикладних задач. Приведемо одну із них, яка зустрічається в економіці.

Задача про неперервне нарахування процентів

На яку величину зросте капітал K_0, через n років при $p\%$ річних, якщо нарахування процентів здійснюють декурсивним методом – процентний платіж нараховується і додається до капіталу в кінці кожного розрахункового періоду. Декурсивне нарахування проценту найбільш поширене в світовій практиці.

Очевидно, що при $p\%$ річних розмір вкладу щорічно буде збільшуватися в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, тобто в кінці n-го року маємо

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

Отже капітал K_0 при річному нарахуванні складних процентів згідно ставки $p\%$ через n років зросте до величини K_n.

де:

$\frac{p}{100}$ - процентна ставка, виражена в десяткових дробах.

$\left(1+\frac{p}{100}\right)$ - складний декурсивний коефіцієнт.

Якщо нараховують проценти не один раз на рік, а m раз, при тому ж щорічному прирості $p\%$, процент нарахування за $\frac{1}{m}$ частину року складе $\frac{p}{m}\%$, а розмір вкладу за n років при mn нарахуваннях складе

$$K_{mn}=K_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn} \quad (1)$$

Припустимо, що проценти нараховуються кожні півроку $(m=2)$, кожний квартал $(m=4)$, щомісячно $(m=12)$, кожний день $(m=365)$, кожний час $(m=8760)$ і т.д. неперервно $(m\to\infty)$.

Якщо число розрахункових періодів прямує до нескінченності, то можна стверджувати, що період розрахунку прямує до нуля.

Знайдемо границю величини K_{mn} при $m\to\infty$ (n – число років, m – число розрахункових періодів в році).

$$K_{mn}=K_0\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^{mn}=K_0\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{m}\right]^{n}=K_0\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right]^{\frac{p}{100}\cdot n}=K_0e^{\frac{pn}{100}}$$

(2)

Отже, ми вивели формулу для кінцевої величини капіталу при неперервному нарахуванні складних процентів. Вона є неперервною функцією і дозволяє обчислити величину капіталу в будь-якій період часу.

Наведемо таблицю розмірів вкладів K_{mn} (якщо $K_0=1$грошова одиниця, $p=5\%$, $n=20$ років) згідно формули складних процентів (1) і формули неперервного нарахування процентів

	формула складних процентів (1)					формула неперервного нарахування процентів (2)
	m=1	m=2	m=4	m=12	m=365	
розмір вкладу, гр. од.	2,6335	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Різниця між щорічним нарахуванням ($m=1$) і неперервним нарахуванням формула (2) незначна (близько 2,5%).

Зауваження. В практичних фінансово-кредитних операціях неперервне перерахування процентів застосовується рідко. Воно є досить ефективним при аналізі складних фінансових проблем, наприклад, при обгрунтуванні і виборі інвестиційних рішень.

§6 Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Визначення 1. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* при $x>x_0$ (або в точці x_0), якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Нескінченно малу в точці функцію коротко часто називають просто *нескінченно малою*.

Визначення 2. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x>x_0$ (або в точці x_0), якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Нескінченно велику в точці функцію коротко називають просто нескінченно великою.

Властивості нескінченно малих та нескінченно великих виконані для будь-яких послідовностей (див. §1), справедливі і для функцій загального випадку, при доведенні яких повторюється процедура аналогічна тій, якою скористалися при встановленні теореми §2. Пропонуємо зробити це самостійно.

Зазначимо нарешті, що визначення 1, 2 мають місце, звичайно ж, і для випадків $x>x_0\pm 0$, $x>\pm\infty$, $x>\infty$.

При дослідженні функцій часто доводиться мати справу не з однією, а з кількома нескінченно малими функціями в даній точці. Для їх порівняння вивчають частку цих функцій. Детально зупинимося на правилах порівняння нескінченно малих.

Визначення 3. Нехай функція $a(x)$ і $b(x)$ нескінченно малі в точці x_0.

Тоді

1. якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ (AI R), то α (x) і β (x) називаються нескінченно малими одного порядку при $x>x_0$;
2. якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то α (x) і β (x) називаються еквівалентними нескінченно малими при $x>x_0$; записується: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x>x_0$.
3. якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то α (x) називається нескінченно малою вищого порядку порівняно з β (x) при $x>x_0$. Цей факт записується так: $\alpha=0(\beta)$.

Словом $0(\beta)$ є загальним позначенням для нескінченно малої вищого порядку, ніж β .

Наприклад, можна писати:

1-cos x=0(x), tg x-sin x=0(x) і т.д.

§7 Неперервність функції

З поняттям границі функції тісно пов'язане друге важливе поняття – неперервність функції. Це поняття функції математично відображає характерну рису багатьох явищ, які ми щоденно спостерігаємо в природі і говоримо про них, що вони відбуваються неперервно: неперервність течії рідини, неперервність зміни температури, неперервність росту живої істоти, неперервність плину часу і т.д.

Геометричне зображення функції у вигляді її графіка допомагає нам до певної міри скласти собі уявлення про цю властивість. Якщо графік функції неперервний (суцільна лінія), тобто його можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу, то й функція $f(x)$ є неперервна.

Так, функція $y=x^2$, графіком якої є парабола, неперервна, а функція $y=\frac{1}{x}$ на будь-якому проміжку, що містить точку $x=0$, не є неперервною. Графік її розривається в точці $x=0$.

Переходячи до строгого визначення поняття неперервності функції, нагадаємо, що в визначенні границі функції при $x \to x_0$ було байдуже, визначена $f(x)$ у точці $x=x_0$ чи ні. Але якраз цей випадок, коли функція визначена в точці $x=x_0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$, є особливо важливим.

Визначення. *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 (чи при $x=x_0$), якщо для будь-якої послідовності*

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$

збіжної до x_0, відповідна послідовність

$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

вартостей функції збігається до $f(x_0)$.

Коротко записується так:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ (1)

Неперервність функції $f(x)$ в точці $x=x_0$ визначають ще й так:

Функція зветься неперервною в точці $x=x_0$, якщо при будь-якому $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що нерівність $|x-x_0|< \delta$ тягне за собою нерівність $| f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Отже, для неперервності функції в точці $x=x_0$ необхідне виконання трьох умов:

1. визначення функції в точці $x=x_0$ та в деякому околі цієї точки;
2. існування границі функції в цій точці;
3. рівність цієї границі вартості функції в точці x_0.

Якщо не виконується хоча б одна з умов, точка $x=x_0$ зветься точкою розриву функції.

Сформульоване визначення неперервності функції випливає з поняття границі функції. Можна дати інше визначення неперервності функції, еквівалентне попередньому, але засноване на понятті нескінченно малої величини. Щоб його подати, необхідно ввести деякі нові поняття.

Якщо змінна x набуває спочатку вартість x_0 (її звуть *початковою вартістю*), а потім вартість x_1 (її звуть *новою вартістю* x), то різницю x_1-x_0 позначають символом Δx (читається "дельта ікс") і звуть приростом змінної x.

Припустимо, що y деяка функція від x

$y=f(x)$

Надаючи приріст Δx аргументові x, отримаємо відповідний приріст Δy функції

$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$

або

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)- f(x_0)$ (2),

отже, приріст функції – це є різниця між новою та початковою вартістю функції.

Приріст аргументу чи функції може бути і додатнім і від'ємним. Нехай, наприклад, $y=x^2$, і нехай початкова вартість аргументу $x_0=5$, а нова $x_1=8$. Тоді приріст аргументу буде $\Delta x=8-5=3$, а приріст функції $\Delta y=64-25=39$. Якщо ж $x_0=5$, а $x_1=3$, то приріст x буде: $\Delta x=3-5=-2$, а приріст функції $\Delta y=9-25=-16$.

Повернемося тепер до рівності (1), що визначає неперервність функції в точці x_0. Якщо ж припустити $x-x_0=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$, рівність (1) запишеться

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$,

бо, коли $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$. Останню рівність можна представити у вигляді

$\lim\limits_{\Delta x\to x_0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

Вираз у квадратних дужках є приріст функції Δy, отже

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0_0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

і маємо в іншій формі визначення неперервності функції: *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x=x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy.*

У цьому строгому математичному визначенні втілено наше інтуїтивне уявлення про неперервність функції як "поступову" зміну аргументу.

Функція, неперервна в кожній точці проміжку (a,b), називається неперервною на цьому проміжку.

Зауважимо, нарешті, що рівність (1), яка виражає неперервність функції в точці, можна переписати ще й так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim x)$$

бо $x_0=\lim x$. Тобто, *якщо функція неперервна, то знак границі і знак функції можна переставляти.*

Розглянемо тепер декілька прикладів.

Приклад. $y=x$. Тут приріст функції Δy дорівнює приросту аргументу Δx. Неперервність очевидна.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=x^2$. Нехай $x=x_0$ – якась початкова вартість x. Надаючи аргументу x_0 приріст Δx, отримаємо

$$y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Віднімаючи початкову вартість функції $y_0=x_0^2$, будемо мати величину приросту функції

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

З цієї рівності видно, що яка б не була фіксована вартість x, якщо тільки Δx нескінченно малий, Δy також буде нескінченно малим.

Отже, $y=x^2$ є неперервною функцією на нескінченному проміжку $(-\infty, \infty)$.

Так само доводиться і неперервність функції $y=x^n$, де n – натуральне число.

Приклад. Довести неперервність функції $y=\sin x$. При будь-якому $x=x_0$ маємо

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)^2-\sin x_0.$$

Звідси, користуючись формулою

$$\sin \alpha-\sin \beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\Delta y=2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

Через те, що $\left|\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$ і для будь-якого a, $a>0$, $|\sin a|<|a|$

(зважаючи на нерівність із 5.1 і на те, що $|\sin a| \le 1$), будемо мати

$$|\Delta y|=2\left|\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2},$$

тобто

$$|\Delta y|<|\Delta x|,\ \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Неперервність функції $y=\sin x$ на проміжку $(-\infty, \infty)$ доведена. Так само доводиться неперервність $y=\cos x$. Власне кажучи, у цьому доведенні немає потреби, бо $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Слід визначити такі майже очевидні твердження про неперервні функції:

Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці $x=x_0$, то сума $f_1(x)+f_2(x)$ та добуток $f_1(x)\cdot f_2(x)$ неперервні в цій точці; частка $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також неперервна в точці $x=x_0$ за умови, що $f_2(x_0)\neq 0$, тобто $x=x_0$ не є коренем знаменника.

Справді,

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)=f_1(x_0)+f_2(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f_2(x)=f_1(x_0)\cdot f_2(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim_{x\to x_0}f_2(x)}=\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)},$$ якщо $f_2(x_0)\neq 0$.

Спираючись на ці твердження, приходимо до таких висновків:

1. Ціла раціональна функція або многочлен

   $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

   є неперервною функцією в будь-якій точці проміжку $(-\infty, \infty)$.

2. Дробово-раціональна функція

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

(припускається, що дріб нескоротний) є неперервною скрізь, за винятком тих вартостей x, які перетворюють знаменник на нуль.

3. Функція $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ неперервна скрізь, за винятком точок $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, які перетворюють на нуль $\cos x$.

4. Функція $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ неперервна скрізь, за винятком точок $x = k\pi$, k=0, ±1, ±2,…, що є коренями sin *x*.

Неперервними є також функції: $y=a^x$ для всіх *x* з проміжку $(-\infty, \infty)$ та $y=x^a$ (*a* – дійсне число) для $x>0$. Доведення цих факторів грунтується на теорії дійсних чисел; читач може його знайти в повних курсах математичного аналізу.

Що ж стосується обернених функцій, зокрема $y=\sqrt[n]{x}$, $y=\log_a x$, *y*=arcsin *x*, *y*=arccos *x*, *y*=arctg *x*, *y*=arcctg *x*, то їх неперервність прямо випливає з теореми (подаємо її без доведення).

Теорема. Якщо $y=f(x)$ неперервна зростаюча (або спадна) функція на замкненому проміжку $[a, b]$, причому $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для неї існує однозначна обернена функція $x=?(y)$, теж зростаюча (або спадна) і неперервна на $[A, B]$.

Отже, з неперервності sin *x* випливає неперервність функції arcsin *x*; з неперервності $y=a^x$ випливає неперервність $y=\log_a x$ і т.д.

Нагадаємо, що елементарними функціями називаються функції, які можна дістати з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій основних елементарних функцій.

На підставі неперервності показникової і логарифмічної функцій і другої важливої границі $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ доведемо кілька важливих рівностей. Їх можна розглядати як продовження списку важливих границь і успішно використовувати, зокрема, при обчисленні похідних від елементарних функцій.

Отже виконуються такі рівності:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, $a>0$, $a\neq 1$, зокрема, при $a=e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a>0$, зокрема, при $a=e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}=\alpha$, α I R.

Послідовно доведемо ці співвідношення.

1. Оскільки $\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$, і логарифмічна функція неперервна в точці e, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}[\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a e.$$

2. Нехай $a\neq 1$. Припустимо, $y=a^x-1$, тоді $a^x=1+y$, $x=\log_a(1+y)$, причому внаслідок неперервності показникової функції $y\to 0$ при $x\to 0$. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

3. Нехай $\alpha\neq 0$. Врахуємо, що

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x},$$

і припустимо, $y=\alpha\ln(1+x)$. Внаслідок неперервності логарифмічної функції в точці 1 $y\to 0$ при $x\to 0$. Отже, з урахуванням попередніх границь,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Остаточно

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ

Попередні вказівки. Для засвоєння поняття границі функції доцільно використати геометричну інтерпретацію: при цьому змінна $x\to a$ зображається "рухомою" точкою на осі *Ox*, а відповідні значення функції *f(x)* наближаються і залишаються як завгодно близькими до точки *A* на осі *Oy*. Якщо мова йде про однобічні границі, то в такому випадку змінна *x* наближається до точки *a* по осі*Ox* зліва ($x\to a-0$, тобто $x\to a$, $x<a$) або справа ($x\to a+0$, тобто $x\to a$, $x>a$). Слід звернути увагу, що у визначенні границі функції не враховується значення функції в граничній точці, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не залежить від величини $f(x_0)$, яка може й не існувати. Звідси випливає, що під знаком границі можна робити тотожні перетворення аналітичного виразу, незважаючи на поведінку функції в граничній точці (тобто, можна скорочувати дроби на множник, що перетворюється в нуль в граничній точці).

Якщо $\lim\limits_{x\to a} U(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} V(x)=0$, то кажуть, що вираз $\frac{U(x)}{V(x)}$ при $x\to a$ є невизначеність типу $\frac{0}{0}$. У цьому випадку для знаходження $\lim\limits_{x\to a}\frac{U(x)}{V(x)}$ застосовують спеціальні прийоми, а сам процес знаходження границі називають розкриттям невизначеності.

Зустрічаються невизначеності типу: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^{∞}, ∞^0.

При цьому невизначеності типу $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^{∞} зводяться до невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

***Приклад*.**

Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+3x+7}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg5x}$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

а) Підстановка граничного значення аргументу x=-3 призводить до невизначеного виразу типу $\frac{0}{0}$.

Для усунення цієї невизначеності розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники і скоротимо дріб на множник (x+3).Таке скорочення тут можливе, оскільки множник (x + 3) відмінний від нуля при $x\to-3$:

$$\lim_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{4(x-\frac{1}{4})(x+3)}{3(x+\frac{1}{3})(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{4(x-\frac{1}{4})}{3(x+\frac{1}{3})}=\frac{4(-3-\frac{1}{3})}{3(-3+\frac{1}{3})}=\frac{13}{8}.$$

б) Якщо $x\to\infty$, вираз $\sqrt{x^2+3x}-x$ дає невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Для її усунення помножимо і розділимо цей вираз на ($\sqrt{x^2+3x}+x$) :

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}.$$

в) У цьому випадку ні чисельник, ні знаменник не мають границі, тому що обидва необмежено зростають.

Перетворимо попередньо вираз під знаком границі, поділивши чисельник та знаменник на x^2. Тоді одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Зауваження . Якщо нам треба знайти границю відношення двох многочленів при $x \to \infty$, то необхідно попередньо поділити чисельник та знаменник на максимальні ступені, що входять в них. Тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0, m < n \\ \dfrac{a_n}{b_n}, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}$$

г) Позначимо $arctg$ 5 x = y. Тоді 5 x = tgy і $y \to 0$ при $x \to 0$. Застосовуючи властивості границь і формулу першої важливої границі

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{arctg 5x} = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0} \frac{tgy}{y} = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

д) Перетворимо вираз

$$\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5} = \left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+5} = \left(1 + \frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}$$

При $x \to \infty$ такий вираз дає невизначеність типу 1^∞

Для усунення її застосуємо формулу другої важливої границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Тоді маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{-4}{2x+1}\right) = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^{-8y+3}$;

де $2x+1=-4y$, $4x+5=-8y+3$ і $y\to-\infty$ при $x\to\infty$.

Переходячи до змінної y, одержимо:

$$\left[\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\cdot\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}=e^{-8}\cdot 1^{3}=\frac{1}{e^{8}}.$$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}=$ =

$\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\ln e=1$

При обчисленні границі ми скористалися теоремою про граничний перехід під знаком логарифма, оскільки для неперервної функції справедливо: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(\lim\limits_{x\to a}x)$

Приклад. Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^{x}+3^{x}}$ г) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x}}$

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)$ =0, оскільки добуток нескінченно малої величини *x* (при $x\to0$) на обмежену функцію $\cos\dfrac{1}{x}$ $\left(\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le1\right)$ є величина нескінченно мала.

Відмітимо, що ця границя не може бути обчислена за допомогою теореми про границі добутку, оскільки $\lim\limits_{x\to o}\cos\dfrac{1}{x}$ не існує (при $x\to o$ аргумент косинуса $\dfrac{1}{x}$

змінюється неперервно вздовж числової осі до нескінченності, при цьому значення $\cos\frac{1}{x}$ коливається від –1 до 1 і від 1 до-1, не прямуючи ні до якого числа (границі)).

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$ (Тут виконана заміна $y=\frac{1}{x}$ при $x\to\infty, y\to 0$).

в) розглянемо два випадки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=\frac{0+3}{0+1}=3$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0.$

При $x\to-\infty$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, при цьому розділимо чисельник і знаменник на 2^x і використаємо теорему про границі, одержимо:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+3\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{\sin x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2\sin x}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^2$

Приклад . Довести неперервність функції $y=f(x)$ в точці x=0 і встановити характер точки розриву функції в цій точці:

а) $y = \frac{\sin x}{x}$; б) $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, \text{ якщо } & x = 0 \end{cases}$; в) $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$;

а) При x=0 функція $f(x)$ не визначена, отже вона не неперервна в цій точці. Оскільки $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, і відповідно границі функції зліва і справа від точки x=0 скінченні і рівні, тобто $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, то x=0 – точка усунутого розриву першого роду.

б) В порівнянні з попереднім прикладом тут функція до визначена в точці x=0 так, що $\lim_{x\to 0} f(x) = f(o) = 1$, отже, така функція неперервна в цій точці.

в) При x=0 функція $f(x)$ не визначена. Оскільки границі функції зліва і справа від точки x=0 скінченні, тобто $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+2^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1$; $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 0$; ($2^{\frac{1}{x}} \to \infty$ при $x \to 0+$), то в точці x=0 функція $f(x)$має розрив першого роду.

РОЗДІЛ ІІІ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ГЛАВАVI: Похідні та диференціали

§ 1 Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $X = (a;b)$ (можливо нескінченному). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Функція дістане в точці x_0 відповідний приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Визначення1. *Похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 *називається* ***границя відношення приросту цієї функції до приросту аргументу*** Δx*, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідна позначається одним із символів: $f'(x_0),\ y'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \frac{dy}{dx},\ D_y,\ Df(x_0)$. Надалі, як правило, надаватимемо перевагу першому символу, який ввів Лагранж.

Отож, за визначенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

називається *диференціальним відношенням*.

У випадку, коли границя відношення (2) при $\Delta x \to 0$ не існує, вважатимемо, що функція в точці x_0 не має похідної.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то позначимо цю похідну y' або $f'(x)$.

Отже, якщо x_0 - фіксована точка проміжку *X*, то похідна $f'(x_0)$ в разі її існування – деяке число. Якщо ж похідна існує в кожній точці $x \in X$, то $f'(x)$ вже функція від *x*.

Зауваження 1. Якщо проміжок *X* – замкнений, наприклад, $X = [a;b]$ і $x_0 = a$, то у формулі (1) границя правостороння

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Аналогічно, якщо $x_0 = b$, то

$$f'(b)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}$$

(границя лівостороння).

Зауваження 2. Зрозуміло, що границя (1) існує не для будь-якої функції і не всякої для точки x_0. Наприклад, для функції $y=|x|$ в точці $x_0=0$ границя (1) не існує, оскільки диференціальне відношення (2)

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\begin{cases}1, \textit{якщо } \Delta x>0;\\ -1, \textit{якщо } \Delta x<0.\end{cases}$$

Зауваження 3. Якщо існують границі

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f({}_0)}{\Delta x} \quad \text{і} \quad \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f({}_0)}{\Delta x},$$

то їх називають відповідно *лівою і правою похідною функції* $f(x)$ *у точці* x_0 і позначають $f_-'(x_0)$ і $f_+'(x_0)$. Це так звані односторонні похідні. Наприклад, ці похідні в точці $x_0=0$ має функція $f(x)=|x|$, причому $f_-'(0)=-1$ і $f_+'(0)=1$.

Якщо існують ліва й права похідні і $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$, то, очевидно, існує похідна $f'(x_0)$, причому $f'(x_0)=f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$. Оскільки для функції $f(x)=|x|$ $f_-'(0)\neq f_+(0)$, то $f'(0)$ не існує.

Зауваження 4. Якщо для деякого значення *x* виконана одна з умов

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,$$

то кажуть, що в точці x_0 функція має нескінченну похідну певного знака.

Аналогічно встановлюється поняття односторонніх нескінченних похідних. Наприклад, функція $f(x) = x^{1/3}$ в точці $x_0 = 0$ має нескінченну похідну, що дорівнює $+\infty$. Дійсно,

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$

У подальшому, якщо не обумовлюється окремо, під словами *функція має похідну* розумітимемо лише наявність скінченої похідної.

Визначення 2. Функція $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називається *диференційованою на проміжку X.*

Операція відшукання похідної називається *диференціюванням.*

Теорема (про зв’язок між поняттями диференційованості і неперервності). Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то існує границя

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Запишемо тотожність

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

і перейдемо в ній до границі, якщо $\Delta x \to 0$. Отримаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

А це й означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0.

Підкреслимо, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, не обов'язково диференційована в цій точці. Так, наприклад, функція $y = |x|$, про яку йшлося вище, очевидно, неперервна в точці $x_0 = 0$, проте похідної в цій точці немає.

Відомі приклади функцій, які неперервні на всьому проміжку *X*, проте в жодній точці не мають похідної.

§2 Зміст похідної

До поняття *похідної* приводять різноманітні задачі геометрії, механіки, хімії, економіки, біології та інших наук. Розглянемо деякі з них.

2.1. Задача про дотичну до кривої

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, тобто існує похідна $f'(x_0)$. Рівняння січної M_0M, яка проходить через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ і $M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ графіка функції $y = f(x)$ (рис. 45),

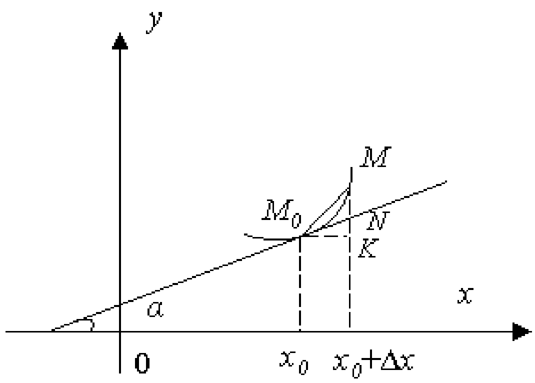

Рис. 45

має вигляд

$$Y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot (X - x_0),$$

де X і Y – змінні координати точки січної. Кутовий коефіцієнт січної $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ прямує до $f'(x_0)$. А тому граничне положення січної визначається рівнянням

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0).$$

Пряма, яка задається цим рівнянням, називається *дотичною до графіка функції* $y = f(x)$ у точці x_0. Кутовий коефіцієнт дотичної $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Остання формула приводить до геометричного змісту похідної: похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці $(x_0;\ f(x_0))$.

Геометричне тлумачення похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції поширюється і на випадок нескінченної похідної. У цьому разі дотична паралельна осі *Oy*.

2.2. Задача про миттєву швидкість

Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла, що розпочинається в момент часу $t = 0$. Вважатимемо, що шлях, подоланий тілом за час t, дорівнює $S = S(t)$. Функція $S(t)$ називається*законом руху тіла.*

Шлях ΔS, який подолає тіло за відрізок часу $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, знаходиться як

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$$

Середньою швидкістю V_c руху за проміжок часу Δt називається відношення

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко пізнати диференціальне відношення.

Миттєвою швидкістю руху $V(t_0)$ в момент t_0 називається *границя цього відношення*, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Отже, похідна від шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості прямолінійного руху тіла.

2.3. Задачі про витрати виробництва та виручку

Нехай $K = K(x)$ - витрати виробництва однорідної продукції – деяка функція кількості продукції *x*. Зазначимо, що кількості продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва продукції $K(x + \Delta x)$. Отже, диференціальне відношення, що характеризує середній приріст витрат виробництва,

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Воно відбиває приріст витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

Границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$$

називається *граничними витратами виробництва.*

Нехай $U(x)$ - виручка від продажу *x* одиниць товару. Міркування, аналогічні до попередніх, приводять до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U'(x),$$

яку називають *граничною виручкою.*

§3. Правила диференціювання

3.1 Диференціювання суми, добутку й частки

Теорема 1. Якщо функції $U = U(x)$ і $V = V(x)$ диференційовані в точці *x*, то функції $U(x) \pm V(x),\ U(x) \cdot V(x),\ \dfrac{U(x)}{V(x)}$ (в останньому випадку припускається, що $V(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці і мають місце формули:

а) $(U \pm V)' = U' \pm V'$;

б) $(U \cdot V)' = U'V + UV'$;

в) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$.

Доведення. а) Надамо *x* деякого приросту Δx. Тоді функції U і V матимуть прирости ΔU і ΔV, а функція $y = U \pm V$ - приріст $\Delta y = \Delta U \pm \Delta V$. І, отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U \pm \Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = U'(x) + V'(x),$$

тобто функції $U(x) \pm V(x)$ дійсно диференційовані в точці *x* , і має місце формула а).

б) Надамо *x* деякого приросту Δx. Тоді функції U і V матимуть прирости ΔU і ΔV, а функція $y = U \cdot V$ - приріст

$$\Delta y = U(x + \Delta x) \cdot V(x + \Delta x) - U(x) \cdot V(x) = [U(x + \Delta x) - U(x)]V(x + \Delta x) +$$
$$+ U(x)\,[V(x + \Delta x) - V(x)] = \Delta U \cdot V(x + \Delta x) + U(x) \cdot \Delta V.$$

І, отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta V} \cdot V(x + \Delta x) + U(x) \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

Зазначимо, що функція $V(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційована в цій точці, а тому $V(x+\Delta x) \to V(x)$ при $\Delta x \to 0$. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в останній рівності, отримаємо $y' = U'V + UV'$, тобто функція $U \cdot V$ дійсно диференційована в точці x і має місце формула б).

в) Надамо x деякого приросту Δx, тоді функція U і V матимуть прирости ΔU і ΔV, а функція $U = \dfrac{U}{V}$ - приріст

$$\Delta y = \frac{U(x+\Delta x)}{V(x+\Delta x)} - \frac{U(x)}{V(x)}.$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в останній рівності, отримаємо $y' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$, тобто функція $\dfrac{U}{V}$ дійсно диференційована в точці x і має місце формула в).

Наслідок. Припустимо, у формулі б) $V(x) = c$, тоді $V'(x) = 0$ і $(CU)' = CU'$, тобто сталий співмножник можна виносити за знак похідної.

3.2. Диференціювання складної функції

Теорема 2. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ - складна функція, де $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$ - диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(U)$ в точці $U = \varphi(x)$ має похідну (по U) $y'_U = f'_U(U)$, а внутрішня функція $U = \varphi(x)$ у точці x має похідну (по x) $U'_x = \varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ - диференційована в точці x, причому її похідна обчислюється за формулою

$$f'_x[\varphi(x)] = f'_U(U) \cdot \varphi'(x)$$

або коротко

$$y'_x = y'_U \cdot U'_x \text{ чи } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dU} \cdot \frac{dU}{dx}.$$

Доведення. Надамо x деякого приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція $U = \varphi(x)$ дістане приріст ΔU, а функція $y = f(U)$ - приріст Δy.

За умови $\Delta U \neq 0$ маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta U \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta U} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = y'_U U'_x,$$

що й потрібно довести.

При доведенні враховано, що функція $U = \varphi(x)$ неперервна в точці *x*, оскільки вона диференційована в цій точці і, отже, $\Delta U \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Зауваження. Припущення, що досить малому $\Delta x \neq 0$ відповідає $\Delta U \neq 0$, звичайно ж, істотне. Проте, якщо трапиться, що $\Delta U = 0$ (до речі, цей випадок зустрічається рідко), то формулу диференціювання складної функції неважко встановити трохи іншим шляхом.

Наслідок. (диференціювання оберненої функції). Нехай функція $x = g(y)$ обернена по відношенню до функції $y = f(x)$, причому функції $f(x)$ і $g(y)$ мають похідні відповідно в точках *x* і $y = f(x)$. Встановимо зв'язок між похідними $y'_x = f'(x) \neq 0$ і $x'_y = g'(y)$.

Оскільки $x = g[f(x)]$ при всіх *x*, то за правилом диференціювання складної функції похідні від обох частин цієї рівності $1 = g'(y) \cdot f'(x)$, звідки $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

або коротко $x'_y = 1/y'_x$ чи $\dfrac{dx}{dy} = 1\Big/\dfrac{dy}{dx}$.

Останні формули мають простий геометричний зміст. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x; y) \in f'(x) = tg\alpha$, а кутовий коефіцієнт до графіка функції $x = g(y)$ в точці $(y; x) - g'(y) = tg\beta$ (рис.2).

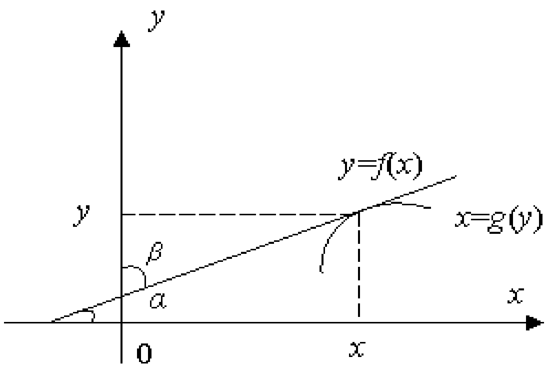

Рис.4б

Очевидно, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, а тому $tg\alpha \cdot tg\beta = 1$ або $f'(x) \cdot g'(y) = 1$.

§4. Диференційованість елементарних функцій

У попередньому параграфі розглянуто правила обчислення похідних для функцій однієї змінної. Вони дозволяють знаходити похідні будь-яких елементарних функцій.

Доведемо, що всі основні елементарні функції (за винятком $\arcsin x$ i $\arccos x$) диференційовані на своїх областях визначення, причому виконуються формули, які запишемо в окрему так звану таблицю похідних:

1. $(C)' = 0$.
2. $(x^\alpha)'' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \ (e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

11. $(arctg)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

.

Доведення 1. Нехай на деякому проміжку X задано сталу функцію $y = C$. Тоді для довільних точок $x \in X$ і $x + \Delta x \in X$ $(\Delta x \neq 0)$ маємо $y = f(x) = C$ і $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$. Отже, $\Delta y = 0$, а тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ і $y' = 0$.

Для скорочення доведення подальших формул подаємо їх у конспективному вигляді.

2.

$$y = x^{\alpha}; \; y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\alpha}; \; \Delta y = (x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha - 1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha - 1};$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

(враховано формулу (3) гл.5, §7).

3.

$$y = a^x; \; y + \Delta y = a^{x + \Delta x}; \; \Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\ln a;\quad (a^x)'=a^x\ln a.$$

(враховано формулу (2) гл. 5, §7). Зокрема, при $a=e$ отримаємо $(e^x)'=e^x$.

4.

$$y=\log_a x;\quad y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x);$$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x\ln a};$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

(враховано формулу (1) гл. 5, §7). Зокрема, при $a=e$ отримаємо $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

5.

$$y=\sin x;$$

$$y+\Delta x=\sin(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\cdot\cos x = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

(враховано першу важливу границю (гл.5 §5) і неперервність функції $\cos x$).

6. Для знаходження похідної функції $y=\cos x$ представимо її у вигляді $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ і розглянемо як складну функцію: $y=\sin U$, $U=\frac{\pi}{2}-x$. Тоді $y'_U=\cos U$ і $U'_x=-1$. Отже, $y'_x=\cos U\cdot(-1)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$, так що $(\cos x)'=-\sin x$.

7. За правилом диференціювання частки маємо

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. Аналогічно доводиться, що $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. Функція $y=\arcsin x\,(|x|<1)$ є оберненою до функції $x=\sin y$ $\left(|y|<\frac{\pi}{2}\right)$, причому похідна $x'_y=(\sin y)'=\cos y$ при $|y|<\frac{\pi}{2}$ не дорівнює нулю. А тому за правилом диференціювання оберненої функції

$$y'_x=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|<1)$$

(Перед коренем обрано знак плюс, оскільки $\cos y>0$ при $|y|<\frac{\pi}{2}$).

Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

10. Аналогічно доводиться, що

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

11. Функція $y = arctgx \ (x \in R)$ є оберненою до функції $x = tgy \quad \left(|y| < \frac{\pi}{2}\right)$, причому похідна $x'_y = (tgy)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ при $|y| < \frac{\pi}{2}$ не дорівнює нулю. А тому за правилом диференціювання оберненої функції

$$y'_x = (arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

12. Аналогічно доводиться, що

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

На закінчення наведемо формулу диференціювання показниково-ступеневої функції $y = [U(x)]^{V(x)}$, де $U = U(x) > 0$ і $V = V(x)$ - диференційовані функції.

$f(x_1)=f(x)$.

За правилом диференціювання складної функції маємо

$$\left(U^V\right)' = \left(e^{V \ln U}\right)' = e^{V \ln U}\left(V' \ln U + V\frac{U'}{U}\right),$$

так що $\left(U^V\right)' = U^V\left(V'\ln U + V\frac{U'}{U}\right)$.

Підкреслимо ще раз, що таблиця похідних разом з правилами диференціювання складають основу диференціального числення. Користуючись ними, можна знайти похідні від функцій, які утворені за допомогою арифметичних операцій та суперпозицій над основними елементарними функціями, тобто перейти від будь-яких елементарних функцій, знову до елементарних. Отже, операція диференціювання не виводить з класу елементарних функцій.

§5. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну на проміжку *X*. Якщо в точці $x_0 \in X$ похідна $f'(x)$, в свою чергу, диференційована, то її похідну називають *похідною другого порядку* або *другою похідною функції* $y = f(x)$ в точці $x_0 \in X$ і позначають одним із символів $f''(x_0),\ y''(x_0),\ \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2},\ \frac{d^2 y}{dx},\ D^2 y,\ D^2 y(x_0)$.

Визначення 1. Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку *X* похідні $f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$. Якщо в точці $x_0 \in X$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то її називають *похідною n-го порядку* функції $f(x)$ в точці x_0 і позначають одним із символів $f^{(n)}(x_0)\ y^{(n)}(x_0),\ \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\ \frac{d^n y}{dx^n},\ D^n y,\ D^n f(x_0)$.

Отже, якщо функція $y = f(x)$ має в точці *x* похідні до *n*-го порядку включно, то $f^{(n)}(x) = (f^{n-1}(x))'$.

Визначення 2. Функція $y = f(x)$, яка має на деякому проміжку *X* похідні до *n*-го порядку включно, називається *n* разів диференційованою на *X*. Функція, яка має на *X* похідні всіх порядків, називається *нескінченно диференційованою* на *X*.

З визначення 1 безпосередньо випливає, що

$$[c_1 U(x) + c_2 V(x)]^{(n)} = c_1 U^{(n)}(x) + c_2 V^{(n)}(x),$$

де c_1 і c_2 - довільні сталі, а $U(x)$ і $V(x)$ - *n* разів диференційовані функції.

У загальному випадку для обчислення похідної вищого порядку потрібно попередньо знайти похідні всіх нижчих порядків. В окремих випадках вдається встановити загальний вираз для похідної*n*-го порядку.

Знайти похідну *n*-го порядку функції $y = x^{\alpha}, \ \alpha \in R, \ x > 0$. Маємо послідовно

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots;$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \ldots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Зокрема, при $\alpha = -1$ маємо $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, а при $\alpha = -\frac{1}{2}$ відповідно $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2x)^n \sqrt{x}}$, де символом $(n)!!$ позначено добуток натуральних чисел, які не перевищують *n* і мають з *n*однакову парність (наприклад, $7!! = 1 \cdot 3 \times 5 \cdot 7, 10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$).

Для виразу $y = (a+bx)^{\alpha}, \ (a, b \in R)$ має місце формула: $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \ldots (\alpha-n+1)b^n(a+b)^{\alpha-n}$. Зокрема, при $\alpha = -1$ маємо

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

а при $\alpha = -\frac{1}{2}$ відповідно

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!! b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

Знайти похідну *n*-го порядку функції $y = \ln x$. Враховуючи, що $y^{(n)} = (y')^{n-1}$, матимемо

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Знайти похідну *n*-го порядку функції $y = a^x$. Маємо послідовно

$$y' = a^x \ln a, y'' = a^x (\ln a)^2, \ldots;$$
$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

Зокрема, якщо $y = e^x$, то $y^{(n)} = e^x$.

Знайти похідну *n*-го порядку функції $y = \sin x$. Маємо послідовно

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

У загальному випадку, як неважко бачити,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Цілком аналогічно

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 6. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці *x*, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Згідно з теоремою 2 (гл. 5, §1) для всіх значень з досить малого околу точки x маємо рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

де $o(\Delta x)$ - нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx.

Зауваження. Якщо, навпаки, в точці x для приросту функції має місце рівність

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

де A - стала, то функція $f(x)$ - диференційована в точці x і $A = f'(x)$.

Дійсно, з останньої формули

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0;$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

Визначення. Диференціалом функції $y = f(x)$ точці x називається *головна, лінійна відносно* Δx *частина приросту функції* в цій точці

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Диференціалом незалежної змінної x вважатимемо його приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. Отже, $dy = f'(x)dx$.

Зауваження. З останньої формули випливає, що $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Саме тому похідну часто позначають $\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df}{dx}$ і розуміють її як відношення двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Оскільки $dx = \Delta x = x - x_0$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x),$$

і при досить малих Δx має місце формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

якою часто користуються при наближених обчисленнях.

Для з'ясування геометричного змісту диференціала знову звернемося до рис.45. З трикутника M_0NK:

$$NK = M_0K \cdot tg\alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy.$$

Таким чином, диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0.

З правил диференціювання випливають правила обчислень диференціалів функцій:

а) $d(U \pm V) = dU \pm dV$;

б) $d(U \cdot V) = VdU \pm UdV$;

в) $d\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{VdU - UdV}{V^2} (V(x) \neq 0)$.

Для ілюстрації доведемо останнє правило.

Нехай $y = \dfrac{U}{V}$ $(V(x) \neq 0)$, тоді

$$dy = \left(\frac{U}{V}\right) = \left(\frac{U}{V}\right)' dx = \frac{U'V - UV'}{V^2} dx = \frac{VU'dx - UV'dx}{V^2} = \frac{VdU - UdV}{V^2}.$$

Встановимо формулу для диференціала складної функції $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$ - диференційовані функції своїх аргументів, таким чином, вимоги теореми 2 (§3) виконані.

З одного боку, $dy = f'(U)dU$, де U - незалежна змінна, а з іншого – в силу вищезгаданої теореми

$$dy = f'_x[\varphi(x)]dx = f'_U(U)\varphi'(x)dx = f'(U)dU,$$

де $U = \varphi(x)$.

Отже, зовнішній вигляд диференціала функції $f(U)$ зберігається і у випадку, коли U є функцією, а не незалежною змінною.

Цю важливу властивість диференціала називають *інваріантністю його форми*. Її зручно використовувати для обчислення похідної функції, заданої параметрично.

Коротко зупинимося на такому способі завдання функції $y = f(x)$ за допомогою двох функцій $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$. Тоді, очевидно, *y* є деякою функцією від $x: y = \psi\ [\Phi(x)] = f(x)$. Таким чином, пара функцій $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначають деяку функцію $y = f(x)$, задану параметрично. Допоміжна змінна t при цьому називаєтьсяп*араметром*.

Припустимо, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - диференційовані в кожній точці t проміжку T, причому $\psi'(t) \neq 0$ при всіх $t \in T$. Враховуючи, що $dx = \varphi'(t)dt,\ dy = \psi'(t)dt,$ а $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, матимемо похідну від функції, заданої параметрично, у вигляді

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

§ 7. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ n разів диференційована на проміжку *X*. Тоді у кожній точці $x \in X$ існує, зокрема, її диференціал $dy = f'(x)dx$, який надалі називатимемо також *диференціалом першого порядку функції* $f(x)$. Оскільки приріст аргументу dx величина стала, то dy є функцією однієї змінної *x*. Диференціал цієї функції називатимемо *диференціалом другого порядку функції* $f(x)$ і будемо позначати d^2y або $d^2f(x)$. Отже, за визначенням, $d^2y = d(dy)$.

Далі маємо

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2.$$

І, нарешті, якщо для функції $y = f(x)$ означено диференціал $(n-1)$-го порядку $d^{n-1}y$, то диференціалом *n*-го порядку d^ny функції $y = f(x)$ називається *диференціал першого порядку* від диференціала $(n-1)$-го порядку, тобто

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right)$$

За індукцією ясно, що

$$d^ny = d\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

З останньої формули випливає, що при довільному *n*

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

тобто похідну *n*-го порядку функції $y = f(x)$ можна представити як відношення її диференціала *n*-го порядку до *n*-го ступеню диференціала аргументу.

Зауваження. Диференціали *n*-го порядку $(n \geq 2)$ вже не мають властивості інваріантності форми. Дійсно, вже при $n = 2$, з одного боку, якщо U - незалежна змінна, маємо $d^2y = f''(U)dU^2$. З іншого, для складної функції $y = f(U)$, де $U = \varphi(x)$, маємо

$$d^2y = d(f'(U)dU) = d(f'(U))dU + f'(U)d(dU) = f''(U)dU^2 + f'(U)d^2U,$$

де $d^2U = \varphi''(x)dx^2$.

Оперуючи з диференціалами, зручно обчислювати похідні вищих порядків від функції, заданої параметрично за допомогою двох функцій $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

Для конкретності зупинимося на випадку знаходження другої похідної $y'' = f''(x)$, вважаючи функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ двічі диференційованими і $\varphi'(t) \neq 0$.

Маємо послідовно $dx = \varphi'(t)dt,\ dy = \psi'(t)dt$ і

$$d^2x = \varphi''(t)dt^2 + \varphi'(t)d^2t;$$
$$d^2y = \psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2t.$$

Але оскільки *x* – незалежна змінна, то $d^2x = 0$, і тому

$$d^2t = -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt^2.$$

Отже, остаточно

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2t}{(\varphi'(t))^2 dt^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 - \psi'(t)\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt^2}{(\varphi'(t))^2 dt^2} =$$
$$= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

§8 Розв'язки задач

Приклад 1. Не користуючись формулами диференціювання, знайти похідні функцій:

а) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$; б) $y = \sqrt{x}$;

а) Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0$, тоді у отримає приріст Δy:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = \left[2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4\right] - \left[2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right]$$
$$= 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x$$

Складаємо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7$$

Знаходимо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

b) Знаходимо приріст функції:

$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$;

Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x},$$

і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Таким чином

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{(\Delta x)(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \wedge$$

Приклад 2. Знайти похідні функції:

а) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$;

б) $y = \cos^5 x$;

в) $y = \ln tg\left(\frac{x}{2}\right)$;

г) $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

д) $y = x^{\cos^2 x}$;

е) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$;

ж) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$

Δ а) При диференціюванні необхідно врахувати, що перший доданок представляє степеневу функцію $(y = \sqrt{u})$, її аргумент - логарифмічну функцію плюс сталу $(u = \ln x + 1)$, а другий доданок - логарифмічну функцію $(y = \ln u$, де $u = \sqrt{x} + 1)$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}}(\ln x + 1)' + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\left(\sqrt{x} + 1\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}}\frac{1}{x} + \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x(\ln x + 1)}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right)$$

б) Це складна функція виду $y = u^5$, де $u = \cos x$ (u називається проміжним аргументом). Використовуючи формулу диференціювання складної функції, одержимо:

$$y'_x = (u^5)'_u (\cos x)'_x = 5u^4(-\sin x) = -5\cos^4 x \sin x;$$

в) Тут також складна функція $y = \ln u$, де $u = tgv, v = \frac{x}{2}.$ Тоді

$$y'_x = (\ln u)'_u (tgv)'_v \left(\frac{x}{2}\right)'_x = \frac{1}{u}\frac{1}{\cos^2 v}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin x};$$

г) Згідно з правилом диференціювання частки двох функцій:

$$y' = \frac{(\sin^2 x)'\sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x(\sqrt{\cos 2x})'}{\cos^2 2x}$$

Враховуючи, що

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x, (\sqrt{\cos 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(\cos 2x)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)(2x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

Отримаємо

$$y' = \frac{\sin 2x\cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 x}};$$

д) За правилом диференціювання степенево-показникової функції:

$$y' = \cos^2 x \cdot x^{\cos^2 x - 1} + x^{\cos^2 x} \cdot \ln x(\cos^2 x)'.$$

Враховуючи, що $(\cos^2 x)' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$, одержимо після перетворень

$$y' = x^{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{x} - \ln x\sin 2x\right).$$

Можна було б попередньо прологарифмувати заданий вираз по основі *e*

$$\ln y = \cos^2 x\ln x,$$

а потім продиференціювати обидві частини останньої рівності по x. Оскільки y є функцією від x, тоді $\ln y$ є складною функцією x і $(\ln y)' = \frac{1}{y}y'$. Отже,

$$\frac{y'}{y} = -2\cos x \sin x \ln x + \cos^2 x \frac{1}{x};$$

Тобто,

$$y' = y\left(\frac{\cos^2 x}{x} - 2\cos x \sin x \ln x\right) =$$
$$= x^{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{x} - \sin 2x \ln x\right)$$

е) При диференціюванні неявної функції враховуємо, що y є функція від x

Отже, $(\ln y)' = \frac{1}{y} y'$; $(x^2 e^y)' = x^2 e^y y' + 2xe^y$.

Диференціюємо по x обидві частини рівності, одержимо

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2xe^y = 0$$

Тобто,

$$y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y};$$

ж) За правилом диференціювання функції, заданої параметрично

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

а тому знайдемо

$y'_t = 15t^4 + 15t^2;$

$x'_t = 3t^2 + 3$

Отже,

$$y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$$

Приклад 3. Обчислить значення похідної функції $y = f(x)$ при $x = \frac{\pi}{4}$:

а) $y = e^x \sin x$; б) $y = \ln\sqrt{1 + ctg^2 x}$.

а) Попередньо знайдемо похідну заданої функції: $y' = (e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$,

а потім обчислюємо її значення в точці $x = \frac{\pi}{4}$;

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

б) Попередньо відмітимо, що $y = \frac{1}{2}\ln(1 + ctg^2 x)$. Тепер

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + ctg^2 x}(1 + ctg^2 x)' = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + ctg^2 x}2ctgx\left(-\frac{1}{\sin^2 x)}\right) = -ctgx;$$

Отже, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -ctg\frac{\pi}{4} = -1$.

Приклад 4. Задана крива $y = \frac{1}{4}x^2 - x$. Скласти рівняння дотичних:

а) в точках перетину її з прямою $3x + 2y - 4 = 0$;

б) паралельно і перпендикулярно цій прямій.

1. Знайдемо точки перетину двох ліній, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} - x \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

2. Знайдемо похідну функції $y' = \frac{1}{2}x - 1$. Значення похідної в знайдених точках $y'(2) = 0$; $y'(-4) = -3$.

3. Кутовий коефіцієнт заданої прямої $k = -\frac{3}{2}$, а прямої паралельної і перпендикулярної їй відповідно $k_3 = k = -\frac{3}{2}$ і $k_4 = -\frac{1}{k} = \frac{2}{3}$. Тому точки, в яких дотична до кривої паралельна і перпендикулярна заданій прямій знаходяться із рівнянь

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3},$$

звідки відповідно $x_1 = -1$ і $x_2 = \dfrac{10}{3}$. Знайдемо ординати кривої в одержаних точках $f(-1) = \frac{5}{4}$ і $f\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{5}{9}$. Відповідні рівняння дотичних будуть:

$$y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}(x+1)$$

або $6x + 4y + 1 = 0$ і $y + \frac{5}{9} = \frac{2}{3}(x - \frac{10}{3})$ або $6x - 9y - 25 = 0$.

Приклад 5. Знайти приріст і диференціал функції $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 10$ і $\Delta x = 0{,}1$.

Приріст функції

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x)\right] - \left[2x^2 - 3x\right] = \Delta x(4x + 2\Delta x - 3).$$

Диференціал функції

$$dy = f'(x)\Delta x = (4x-3)\Delta x.$$

При $x = 10$ і $\Delta x = 0{,}1$ маємо $\Delta y = 3{,}72$ і $dy = 3{,}70$. Різниця між Δy і dy складає всього 0,02 або 0,5%.

Приклад 6. Знайти диференціал функції

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7};$$

$$dy = f'(x)\cdot dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2\sqrt{49-x^2}}(-2x) + \frac{49}{2}\cdot\frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}}\right]dx = \sqrt{49-x^2}\,dx \wedge$$

Приклад *7* Обчислити наближено: а) $\sin 46^\circ$;б) $\sqrt[4]{16,64}$

а) Припускаючи $f(x) = \sin x$, знайдемо $f'(x) = \cos x$ і у відповідності з формулою про наближені обчислення

$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x\Delta x$.

Враховуючи, що $\sin 46^\circ = \sin(45^\circ + 1^\circ) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180^\circ})$, візьмемо $x = \frac{\pi}{4}$ і $\Delta x = \frac{\pi}{180^\circ}$

Тоді

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180^\circ}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{180^\circ}\right);$$

б) Отримаємо спочатку наближену формулу для обчислення коренів будь-якої n-ої степені. Припускаючи $f(x) = \sqrt[n]{x}$, знайдемо

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

і у відповідності з (§6)

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\Delta x$$

або

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{nx}\right)$$

В заданому прикладі

$$\sqrt[4]{x+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x} + \left(1 + \frac{\Delta x}{4x}\right)$$

За x візьмемо число, найбільш близьке до 16,64, але щоб було відоме $\sqrt{x}$, при цьому Δx повинне бути достатньо малим. Очевидно, необхідно взяти $x = 16$, $\Delta x = 0,64$ (але, наприклад, не $x = 9$ $\Delta x = 7,64$). Отже,

$$\sqrt{16,64} \approx \sqrt{16}\left(1 + \frac{0,64}{4 \cdot 16}\right) = 2 \cdot 1,01 = 2,02$$

За допомогою диференціала може бути розв'язана задача визначення абсолютної та відносної похибки функції по заданій похибці знаходження аргументу. Нехай необхідно обчислити значення заданої функції $y = f(x)$ при деякому значенні аргументу x_1, дійсна величина якого невідома, а відоме лише його наближене значення x з абсолютною похибкою $|\Delta x| = |x - x_1|$. Якщо замість дійсного значення $f(x_1)$ візьмемо величину $f(x)$, то ми припустимося похибки, яка дорівнює

$$|f(x) - f(x_1)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x$$

При цьому відносна похибка функції $\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ може бути обчислена (при достатньо малих Δx) за формулою

$$\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \quad (1)$$

або

$$\delta y = |E_x(y)|\delta x,$$

де $|E_x(y)|$ - еластичність функції (по абсолютній величині) $\delta_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ - відносна похибка знаходження аргументу x.

Приклад 8. Витрати бензину у (л) автомобіля на 100 км шляху в залежності від швидкості x (км/год) описуються функцією $y = 18 - 0,3x + 0,003x^2$.

Оцініть відносну похибку обчислення витрат бензину при швидкості $x = 90$ км/год з точністю до 5%.

Знайдемо еластичність функції (по абсолютній величині)

$$|E_x(y)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x(-0,3 + 0,006x}{18 - 0,3x + 0,003x^2}\right|$$

При $x = 90$ $|E_{x=90}(y)| = 1,41$ і за формулою (1) відносна похибка $\delta y = 1,41 \cdot 5 \approx 7,1\%$ $\wedge$

Приклад 9. З якою точністю може бути обчислений об'єм кулі, якщо її радіус заміряний з точністю до 2%?

Δ Об'єм кулі радіуса x дорівнює $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$. Знайдемо $f'(x) = 4\pi x^2$;

$$|E_x(f)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \frac{x4\pi x^2}{\frac{4}{3}\pi x^3} = 3$$

і за формулою (1) маємо

$$\delta y \approx 3\delta x = 3 \cdot 2 = 6\%$$

Значним недоліком застосування диференціала в наближених обчисленнях є неможливість обчислення значень функцій з наперед заданою точністю. Цього недоліку немає при використанні рядів в наближених обчисленнях.

§ 9 Економічний зміст похідної.

Використання поняття похідної в економіці

В §2 було встановлено, що продуктивність праці є похідною об'єму виробленої продукції за часом, а похідна дорівнює $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta K(x)}{\Delta x}$, виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що виробляється) x і визначаються не сталими виробничими витратами, а лише змінними (на сировину, паливо і т.д.). Аналогічним чином можуть бути визначені гранична виручка (§2), граничний доход, граничний продукт, гранична корисність та інші граничні величини.

Граничні величини характеризують не стан (як сумарна або середня величини), а процес, зміни економічного об'єкту. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкту (процесу) за часом або відносно іншого досліджуваного фактору. Необхідно врахувати все ж таки, що економіка не завжди дозволяє використовувати граничні величини в силу неподільності багатьох об'єктів економічних розрахунків і дискретності економічних показників за часом (наприклад, річних, квартальних, місячних і т.д.). Разом з тим у ряді випадків можливо відвернути увагу від дискретності показників і ефективно використати граничні величини.

Для дослідження економічних процесів і розв'язку інших прикладних задач часто використовують поняття еластичності функції.

Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'$$

Еластичність функції показує наближено, наскільки процентів зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1%.

Відмітимо властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної x

на темп зміни функції

$T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$,

тобто

$E_x(y) = xT_y$ (2)

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій

$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v)$ (3)

$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$ (4)

Еластичність функцій застосовується при аналізі попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або доходу x) – коефіцієнт, що визначається за формулою (1), який показує наближено, на скільки процентів зміниться попит (обсяг споживання) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (по абсолютній величині) $|E_x(y)| > 1$, тоді попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)| = 1$, -нейтральним, якщо $|E_x(y)| < 1$, -нееластичним відносно ціни (або доходу).

Приклад 10. Залежність між витратами виробництва k і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $k = 50x - 0.05x^3$ (грошова од.). Визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції 10 одиниць.

Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $k_1 = \frac{k}{x} = 50 - 0,05x^2$, при $x = 10$. Середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють

$k_1(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45$ (гр.од.)

Функція граничних витрат виражається похідною

$k'(x) = 50 - 0,15x^2$;

при $x = 10$ граничні витрати складають

$$k'(x) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$$ (гр.од)

Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. один., тоді граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (обсязі продукції, що випускається, 10 од.) складає 35 гр.од.

Приклад 11. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. гривень) і випуском продукції x (тис. гривень) виражається функцією

$$y = -0{,}5x + 80$$

Знайти еластичність собівартості при випуску продукції, що дорівнює 60 тис.гривень.

Згідно формули (1) еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160}$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0{,}6$, тобто при випуску продукції, що дорівнює 60 тис.гривень, збільшення його на 1% приведе до зниження собівартості на 0,6%.

Приклад 12. Обсяг продукції u, виробленої бригадою робітників, може бути описаний рівнянням

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$$ (од), $1 \le t \le 8$,

де t –робочий час в годинах. Обчислить продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення.

Продуктивність праці виражається похідною

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$$ (од/год),

а швидкість і темп зміни продуктивності – відповідно похідною $z'(t)$ і логарифмічною похідною $T_z(t) = [\ln z(t)]'$:

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}$$ (од/год),

де $z'(t) = -5t + 15$ (од/год^2)

В задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:

$z(1) = 112{,}5$ (од/год)

$z'(1) = 10$ (од/год^2)

$T_z(1) = 0{,}09$ (од/год)

і

$z(7) = 82{,}5$ (од/год)

$z'(7) = -20$ (од/год^2)

$T_z(7) = -0.24$ (од/год)

Отже, на кінець роботи продуктивність праці суттєво знижується; при цьому зміна знаку $z'(t)$ і $T_z(t)$ із плюса на мінус свідчить про те, що підвищення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Приклад 13. Дослідним шляхом встановлені функції попиту $g = \frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 0.5$, де g і s - кількість товару, відповідно купленого і пропонованого на продаж в одиницю часу, p - ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиції урівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при підвищені ціни на 5% від рівноважної.

а) Рівноважна ціна визначається із умови $g = 1 \ : \ \frac{p+8}{p+2} = p + 0.5$, звідки $p = 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грошовим одиницям.

б) Знайдемо еластичності по попиту і пропозиції за формулою (1)

$$E_p(g) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1};$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо

$$E_{p=2}(g) = -0{,}3; \quad E_{p=2}(s) = 0{,}8.$$

Оскільки отримані значення еластичності по абсолютній величині менше 1, тоді і попит і пропозиції даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни р на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція підвищиться на 0,8%.

в) При підвищенні ціни р на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, отже, доход зростає на 3,5%.

Приклад 14. Як пов'язані граничні і середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1?

Нехай повні витрати підприємства у виражаються функцією $y = f(x)$, де *x* - обсяг продукції, що випускається. Тоді середні витрати y_1 на виробництво одиниці продукції $y_1 = \frac{y}{x}$. Згідно (4) еластичність частки двох функцій дорівнює різниці їх еластичностей, тобто:

$$E_x(y_1) = E_x\left(\frac{y}{x}\right) = E_x(y) - E_x(x) = E_x(y) - 1$$

З умови $E_x(y) = 1$, отже, $E_x(y_1) = 1 - 1 = 0$.

Це означає, що зі зміною обсягу продукції *x* середні витрати на одиницю продукції не змінюються, тобто $y_1 = \frac{y}{x} = c$, звідки $y = cx$. Граничні витрати підприємства визначаються похідною $y' = c$. Отже, $y' = y_1$, тобто граничні витрати дорівнюють середнім витратам (зауважимо, що отримане твердження справедливе лише тільки для лінійних функцій витрат).

ГЛАВА 7: Застосування похідних до дослідження функцій

§ 1 Загальні властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку

У цьому параграфі наводимо без доведення дві теореми, які виражають істотні властивості, притаманні неперервним функціям. В дальшому викладі при доведенні теорем будемо спиратися на ці теореми як на очевидні факти.

Теорема 1. (Про найбільшу й найменшу вартість функції). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку* $[a, b]$*, то вона набуває на цьому проміжку принаймні один раз своєї найбільшої і своєї найменшої вартостей.*

Строге доведення цієї теореми (як і наступної) грунтується на теорії дійсних чисел. Ми обмежимося поясненням її змісту, використавши при цьому геометричне зображення функцій.

Теорема твердить, що коли функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то існує на ньому принаймні одна така точка x_1 (рис. 47), що для всіх вартостей x з проміжку $a < x < b$ буде виконуватись нерівність

$f(x) < f(x_1)$.

Вартість $f(x_1)$ називається найбільшою вартістю функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ і позначається літерою М

$f(x_1)=M$

За тих же умов теорема твердить про існування принаймні однієї точки x_2 на проміжку $[a, b]$, що для всіх вартостей x з розглянутого проміжку буде виконуватися нерівність

$f(x_1) < f(x)$.

Вартість $f(x_2)$ називається найменшою вартістю функції $f(x_2)$ на проміжку $[a, b]$ і позначаються літерою m.

Може здатися, що твердження теореми зовсім очевидне і тривіальне. Але достатньо взяти відкритий проміжок (a, b) - і ми переконаємося, що теорема стає невірною. Розглянемо, наприклад, неперервну функцію $f(x)=x^2$ (рис.48) на відкритому проміжку (-2, 2). Вона набуває найменшої вартості нуль в точці $x=0$, але не можна вказати таку точку, для якої функція має найбільшу вартість. Справді, яку б не взяли ми точку x_1 лівіше правого кінця $x=2$ (або праворуч лівого кінця $x=-2$), завжди знайдеться інша точка, наприклад, $x_2=\frac{x_1+2}{2}$ (посередині між $x=x_1$ та $x=2$), в якій функція $x=x^2$має більшу вартість, аніж у точці $x=x_1$. Коли б точки $x=-2$ та $x=2$ не були виключені, тобто, якщо б ми розглядали функцію $y=x^2$ на замкненому проміжку [-2, 2], існувала б найменша вартість функції 4 аж у двох точках $x=-2$ та $x=2$.

Якщо взяти, наприклад, функцію $y=x$, яка є неперервною в будь-якому відкритому проміжку, то неважко переконатися, що вона не досягає в ньому ні найбільшої, ні найменшої вартості.

Теорема 2. *Якщо функція f(x) неперервна на замкненому проміжку [a, b] і має на його кінцях протилежні знаки, тобто $f(a)\bullet f(b)<0$, то вона принаймні один раз стає нулем всередині цього проміжку.*

Припустимо, що $f(x)$ неперервна функція на проміжку [a, b] і що $f(a)>0$, а $f(b)<0$ (рис.49)

Теорема твердить, що існує принаймні одна точка ξ всередині проміжку [a, b] така, що $f(\xi)=0$. З рис. 49 видно, що перехід функції від додаткової вартості $f(a)$ до від'ємної $f(b)$, зважаючи на неперервність кривої – графіка неперервної функції, - відбудеться з обов'язковим перетином осі Ox принаймні в одній точці ξ. Розривні функції (рис.50), взагалі кажучи, не мають цієї властивості. З теореми 2 як наслідок випливає третя важлива теорема про неперервність функції.

Теорема 3. (про проміжні вартості функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку [a, b] і має на його кінцях нерівні між собою вартості $f(a)$=A і $f(b)$=B, то всередині проміжку вона набуває принаймні один раз будь-якої вартості C, що міститься між A та B.

Доведення. Нехай A<B. (Припущення B<A не змінює суті міркувань). Тоді A<C<B.

Введемо допоміжну функцію

$F(x)=f(x)-C$.

На проміжку [a, b] ця функція неперервна, бо неперервна на ньому, за припущенням, $f(x)$. Але $F(a)=f(a)$-C=A-C<0 і $F(b)=f(b)$-C=B-C>0. Отже, за теоремою 2, функція $F(x)$ стає нулем при деякому $x=\xi$. Тому

$F(x)=f(x)$-C. ,

тобто $f(\xi)=C$. Це й треба було довести.

Геометричний зміст цієї теореми такий: будь-яка пряма y=C, паралельна осі Ox, перетне графік функції $f(x)$ принаймні в одній точці, якщо тільки C міститься між $A=f(a)$ та $B=f(b)$. На рис.51 маємо три таких точки ξ_1, ξ_2 та ξ_3. .

Теорему 3 часто формулюють так: неперервна функція, переходячи від одної вартості до іншої, набуває усіх проміжних вартостей. Звичайно, розривна функція не має такої властивості. Між вартостями A_1 та B_2 (рис.50) немає вартостей функції (вона їх набуває), зображеної на цьому рисунку.

Теорему 2 можна застосувати до наближеного обчислення коренів рівняння. Вартість $x=x_0$, при якій функція $f(x)$ стає нулем, зветься коренем функції або коренем рівняння $f(x)=0$.

§ 2 Теореми про середнє значення

Дослідження функцій за допомогою похідних грунтуються на деяких основних теоремах диференціального числення.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована на інтервалі $(a;b)$ і $f(a)=f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$ така, що $f'(c)=0$.

Доведення. За теоремою Вейєрштрасса неперервна на $[a;b]$ функція $f(x)$ набуває на ньому найбільшого значення M і найменшого значення m.

Якщо $m=M$, то $f(x)$ - стала для всіх $x\in(a;b)$ і за точку $c\in(a;b)$ можна взяти будь-яку точку інтервалу $(a;b)$.

Якщо $m < M$, то принаймні одне із значень m або M досягається у внутрішній точці c відрізку $[a;b]$, тобто в точці, яка належить інтервалу $(a;b)$. Нехай, наприклад, в точці c функція $f(x)$ набуває найменшого значення. Доведемо, що $f'(c) = 0$. Дійсно, для досить малих $\Delta x \neq 0$ точка $c + \Delta x \in (a;b)$, причому

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \geq 0$$

Тому при $\Delta x > 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{і} \quad f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0,$$

а при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{і} \quad f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0.$$

Оскільки функція $f(x)$ диференційована в точці *c*, то $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$. Теорему доведено.

Геометрично теорема Ролля означає, що серед усіх дотичних до графіка функції $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна осі *Ox*.

У точці c функція $f(x)$ набуває найменшого значення (рис.52).

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі (*a*; *b*). Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доведення. Розглянемо на $[a;b]$ допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Очевидно, $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на $[a;b]$ як різниця двох неперервних на $[a;b]$ функцій $f(x)$ і $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$; диференційована на $(a;b)$, причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ і $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Звідки $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, що й потрібно було довести.

Геометрично теорема Лагранжа означає, що серед усіх дотичних до графіка функцій $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна січній АВ, яка сполучає точки $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$. Справді (рис.53), відношення $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ є кутовим коефіцієнтом січної АВ, а $f'(c)$ - кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка, проведеної в точці $(c; f(c))$. Ці коефіцієнти рівні, отже, дотична і січна АВ дійсно паралельні.

Зауваження 1. Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо $f(a) = f(b)$.

Зауваження 2. Рівність $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), c \in (a;b)$ називається *формулою Лагранжа.* Її можна записати й трохи інакше. Очевидно, що $c = a + \Theta(b - a)$ де $0 < \Theta < 1$. Отож, $f(b) - f(a) = f'(a + \Theta(b - a))(b - a)$, де $0 < \Theta < 1$.

Припускаючи $a = x, b = x + \Delta x$, матимемо також

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \Theta\Delta x)\Delta x,$$

де $0 < \Theta < 1$.

Наслідок. Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку X і $f'(c) = 0$ при будь-якому $x \in X$, тоді $f(x)$ на X - стала. Дійсно, нехай x_0 - фіксована точка X, а x - його довільна точка. За теоремою Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$, де c - деяка точка, яка знаходиться між x_0 і x. Оскільки $f'(x)$ при будь-якому $x \in X$, то $f'(c) = 0$, а тому $f(x) = f(x_0) = C$ при всіх $x \in X$.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку [a;b] і диференційовані на інтервалі (a;b), причому $g'(x) \neq 0$ в усіх точках $x \in (a;b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $g(b) - g(a) \neq 0$, оскільки у протилежному випадку $(g(b) = g(a))$, згідно з теоремою Ролля для функції $g(x)$ знайдеться принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що $g'(c) = 0$. А це суперечить тому, що $g'(c) \neq 0$ в усіх точках (a;b). Далі розглянемо на [a;b] допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Очевидно, $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на [a;b] як різниця двох неперервних на [a;b] функцій $f(x)$ і $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$; диференційована на (a;b), причому

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

і $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Звідки, оскільки $g'(c) \neq 0$, отримаємо формулу Коші

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a;b),$$

що й потрібно довести.

Зауваження. Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші, якщо $g(x) = x$.

§ 3 Правила Лопіталя

При дослідженні функцій часто виникає необхідність знаходити границі дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$, чисельник і знаменник якого при $x \to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають *розкриттям невизначеностей*. Найбільш простими і ефективними методами розкриття невизначеностей є правила Лопіталя.

Теорема 1. (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на інтервалі (a;b); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ на (a;b). Тоді, якщо існує (скінчена або нескінченна) границя

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

то границя $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$.

Доведення. Нехай $x\in(a;b)$ і $-\infty<K<+\infty$. Довизначимо функції $f(x)$ і $g(x)$ у точці a, припустивши $f(a)=g(a)=0$. Тоді вони, очевидно, стануть неперервними на відрізку $[a;x]$ і задовольнятимуть на ньому всі вимоги теореми Коші попереднього параграфа. А тому знайдеться така точка $c\in(a;x)$, що

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Якщо $x\to a+0$, то й $c\to a+0$. Переходячи до границі в останній рівності, маємо

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

що й потрібно довести.

Зауваження 1. Теорема 1 доведена для правих границь. Вона лишається вірною й для лівих, і до границі взагалі.

Зауваження 2. Твердження теореми 1 залишається в силі, якщо $a=\infty(\pm\infty)$.
Дійсно, візьмемо, наприклад, $a=\infty$. Припустимо, $t=\dfrac{1}{x}$ і нехай $F(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right), G(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

При розкритті невизначеностей іншого типу діє теорема, яка наводиться без доведення.

Теорема 2. (друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на інтервалі (a;b); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$ і $g'(x) \neq 0$ на (a;b). Тоді, якщо існує (нескінченна або скінченна) границя $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то границя $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Зауваження, подані до теореми 1, залишаються в силі і для теореми 2.

Трапляється, що для похідних $f'(x)$ і $g'(x)$ виконуються умови однієї з теорем, тоді правила Лопіталя можна застосовувати повторно:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Взагалі, при виконанні відповідних умов цю процедуру можна застосовувати кілька разів.

Теорема 1 і 2 застосовуються до випадків, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до нуля або до нескінченності.

Відповідно, знаходження $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ називають *розкриттям невизначеностей* типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

За допомогою тотожних перетворень до основних випадків $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ можна звести й невизначеності інших типів: $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^{\circ}, 1^{\infty}$.

Невизначеність $0\cdot\infty$, тобто добуток $f(x)g(x)$, де $\lim_{x\to a} f(x)=0, \lim_{x\to a} g(x)=\infty$, зводиться до вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ за формулами

$f(x)g(x)=f(x):\frac{1}{g(x)}$ або $f(x)g(x)=g(x):\frac{1}{f(x)}$.

Невизначеність $\infty-\infty$ зводиться до вигляду $\frac{0}{0}$ за допомогою перетворення

$$f(x)-g(x)=\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]:\frac{1}{f(x)g(x)}.$$

Невизначеності $0^0, 1^\infty, \infty^0$ мають місце при розгляді функцій $[f(x)]^{g(x)}$, якщо функція $f(x)$ прямує відповідно до 0,1 і $+\infty$, а $g(x)$ - відповідно до 0,1 і 0, коли $x\to a$. Як правило, використовується рівність

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

і справа зводиться до розкриття невизначеності вигляду $0\cdot\infty$ у показнику

Приклад 1. Знайти наступні границі:

а) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{arctg5x}$;

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}$;

в) $\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$.

а) Чисельник і знаменник прямують до нуля, якщо $x \to 0$, а тому маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Використаємо правило Лопіталя, тобто розглянемо границю відношення похідних заданих функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{arctg5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5}=\frac{2}{5},$$

оскільки $e^{2x}\to 1$ і $\frac{1}{1+25x^2}\to 1$, якщо $x\to 0$.

б) Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Застосовуючи двічі формулу Лопіталя, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=0.$$

На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватися тотожними перетвореннями, які спрощують відношення, а також комбінують це правило з будь-якими іншими прийомами обчислення границь.

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Звільнимо знаменник дробу від множника $\cos^2 x$, оскільки він має границю 1 при $x\to 0$. Розкладемо чисельник, як різницю кубів

$$1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$$

і звільнимо чисельник від множника $(1+\cos x+\cos^2 x)$, який має границю 3 при $x\to 0$. Після таких спрощень отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Використовуючи першу важливу границю, отримаємо кінцеву відповідь $\frac{1}{2}$, вже без правила Лопіталя.

Приклад 2. Знайти границі

а) $\lim_{x\to 0}(x^2 \ln x)$;

б) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

в) $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$;

г) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$;

д) $\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}$.

а) Тут ми маємо невизначеність типу $0\cdot\infty$. Представимо добуток у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 \ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

б) Це невизначеність типу $\infty-\infty$. Для того, щоб знайти границю функції, приведемо дроби до загального знаменника, а потім, отримавши невизначеність типу $\frac{0}{0}$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

в) Це невизначеність типу 0°. Позначимо дану функцію через у , тобто $y=x^{\sin x}$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y=\sin x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції, застосовуючи правило Лопіталя (тут маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{X\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=0.$$

Отже, $\lim_{x\to 0} y=e^{\circ}=1$.

г) Це невизначеність типу ∞°. Припустимо, $(tgx)^{2x-\pi}=y$, і прологарифмуємо:

$$\ln y=(2x-\pi)\ln tgx=\frac{\ln tgx}{\frac{1}{2x-\pi}};$$

Застосувавши правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot 2}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x}.$$

Звільнимо знаменник від множника $\sin x$, оскільки він прямує до 1, якщо $x\to\frac{\pi}{2}$;

$$-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x-\pi)\cdot 2}{-2\sin x}=0$$.

Тобто $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y=e^0=1$.

д) Це невизначеність типу 1^{∞}. Введемо позначення

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$.

Тоді $\ln y=2x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ є невизначеністю типу $\infty\cdot 0$. Перетворимо вираз $\ln y$ до вигляду

$$\ln y=2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$.

Згідно правила Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=2$$.

Отже, $\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2$. ^

§4 Дослідження функцій

4.1. Умови монотонності функцій

Визначення 1. Функція $f(x)$ називається *зростаючою (спадною)* на деякому проміжку X, якщо для будь-яких $x_1, x_2\in X\ (x_1<x_2)$ виконана нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ (відповідно $f(x_1)>f(x_2)$).

Теорема 1 (достатні умови монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційована на проміжку X і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на X, то функція $f(x)$ зростаюча (спадна) на цьому проміжку.

Доведення. Нехай для конкретності $f'(x) > 0$ на X і x_1, x_2 - будь-які точки з X, причому $x_1 < x_2$. За формулою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$, де $c \in (x_1; x_2)$.

Оскільки $f'(c) > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ або $f(x_1) < f(x_2)$, тобто функція $f(x)$ зростає на X.

Випадок, коли $f'(x) < 0$ на X, досліджується аналогічно.

4.2. Умови локального екстремуму

Визначення 2. Точка x_0 називається точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, якщо при всіх $x \neq x_0$ з деякого δ-околу точки x_0 виконується нерівність

$$f(x) > f(x_0) \qquad (f(x) < f(x_0)).$$

Аналогічно, якщо в деякому δ-околі точки x_0 виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad (f(x) \leq f(x_0)),$$

то точка x_0 називається *точкою локального мінімуму (максимуму).* Часто для скорочення слово локальний не вживають.

Точки мінімуму й максимуму функції називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках – її екстремумами.

Теорема 2 (необхідні умови екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційована, то $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай для конкретності x_0 - точка максимуму, тоді при досить малих $\Delta x(|\Delta x|<\delta) f(x) \geq f(x_0+\Delta x)$ і $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \leq 0$, а отже,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

Оскільки ж функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0.$$

Випадок, коли x_0 - точка мінімуму, досліджується аналогічно.

Теорема 2 має простий геометричний зміст: дотична до графіка диференційованої функції у відповідній точці паралельна осі *Ox*.

Зауваження 1. Якщо $f'(x)=0$, то звідси ще не випливає, що x_0 - точка екстремуму. Наприклад, для функції $f(x)=x^3$ похідна $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$. Проте $x_0=0$, очевидно, не є точкою екстремуму.

Зауваження 2. Точка x_0, в якій функція $f(x)$ недиференційована, також може бути точкою екстремуму. Наприклад, функція $f(x)=|x|$ не має похідної в точці $x_0=0$, але ця точка є для неї точкою мінімуму.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються стаціонарними. Стаціонарні точки, а також точки, де функція визначена, але її похідна не існує, називаються критичними. Саме серед них слід шукати точки екстремуму.

Теорема 3 (достатні умови строгого екстремуму першого типу). Нехай функція $f(x)$ неперервна в деякому δ-околі точки x_0: $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, диференційована у ньому, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо $f'(x)<0$ $(f'(x)>0)$ при $x_0-\delta<x<x_0$ і $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ при $x_0<x<x_0+\delta$, то точка x_0 є точкою строгого мінімуму (максимуму).

Коротко цю теорему формулюють таким чином: якщо в точці x_0 похідна змінює знак з мінуса на плюс (з плюса на мінус), то x_0 - точка строгого мінімуму (максимуму)

Доведення. Нехай для конкретності $f'(x)<0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ і $f'(x)>0$ при $x_0<x<x_0+\delta$.

Спочатку розглянемо $x\in(x_0-\delta; x_0)$. Застосуємо формулу Лагранжа до функції $f(x)$ на відрізку $[x; x_0]$. Маємо

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),$$

де $c\in(x_0-\delta, x_0)$. Оскільки $f'(c)<0$ і $x-x_0<0$, то $f(x)-f(x_0)>0$ або $f(x)>f(x_0)$ при $x_0-\delta<x<x_0$.

Якщо ж $x\in(x_0; x_0+\delta)$, то застосовуючи формулу Лагранжа до функції $f(x)$ на відрізку $[x_0; x]$, матимемо

$$f(x)-f(x_0)=f'(d)(x-x_0),$$

де $d\in(x_0; x_0+\delta)$. Оскільки $f'(d)>0$ і $x-x_0>0$, то $f(x)-f(x_0)>0$ або $f(x)>f(x_0)$ при $x_0<x<x_0+\delta$.

Таким чином, для будь-якого $x \neq x_0$ з δ- околу точки $x_0, f(x) > f(x_0)$, а це й означає, що точка x_0 є точкою строгого мінімуму.

Випадок зміни знаку похідної з плюса на мінус досліджується аналогічно.

Зауваження. Якщо $f'(x)$ має однакові знаки на інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$, то x_0 не є точкою строгого екстремуму.

Теорема 4 (друга достатня ознака екстремуму). Якщо в околі точки $x = x_0$ друга похідна неперервна, причому $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум, коли $f''(x_0) < 0$, і мінімум, коли $f''(x_0) > 0$.

Доведення. Нехай $f''(x_0) < 0$. Зважаючи на неперервність $f''(x)$, існує деякий окіл точки x_0, в якому $f''(x_0) < 0$. Тому в цьому околі функція $f'(x)$ буде спадною, бо її похідна - $f''(x)$ - від'ємна. Але ж при $x = x_0$ $f'(x_0) = 0$, отже, при переході (зліва направо) через точку x_0 функція $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус. А це означає, що в точці x_0 функція має максимум.

Аналогічно доводиться, що, коли $f'(x_0) = 0$ і $f'(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ - мінімум функції $f(x)$.

Якщо ж в деякій критичній точці $x = x_1$ $f''(x_1) = 0$, то друге правило не застосовне і дослідження слід проводити за допомогою першої похідної (спираючись на теорему 3).

Приклад 3. Дослідити на максимуми та мінімуми.

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$

1. Знаходимо похідну $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$.

2. Прирівнюємо до нуля і знаходимо її корені, тобто критичні точки

$x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0, \qquad x^2(x^2 - 4x + 3) = 0, \qquad x_{1,2} = 0, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 3$

3. Обчислюємо другу похідну

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$

4. Підставляючи у вираз другої похідної знайдені корені першої похідної, отримаємо $f''(0) = 0$ (правило не застосовне), $f''(1) = -10 < 0$ (максимум), $f''(3) = 90 > 0$ (мінімум).

Через те що при $x_0 = 0$ $f''(x_0) = 0$, вдаємося до першого правила. Маємо при $x < 0$ $f'(x) = 5x^2(x-1)(x-3) > 0$, при $x > 0$ (але $x < 1$) $f'(x) = 5x^2(x-1)(x-3) > 0$.

Похідна не змінює знака, екстремуму в точці $x = 0$ немає.

За допомогою теорії максимумів та мінімумів функції розв’язуються численні задачі з геометрії, економіки, механіки та з інших наук.

4.3. Знаходження найменшого й найбільшого значень

Зупинимося на питанні про відшукання найменшого й найбільшого значень функції $f(x)$, неперервної на відрізку [a;b]. За теоремою Вейєрштрасса (див. гл.7, §1) така функція обов’язково набуде цих значень в деяких точках [a;b]. Це можуть бути як внутрішні точки відрізка, так і його кінці.

Отже, для відшукання найменшого (найбільшого) значення неперервної на [a;b] функції $f(x)$ потрібно знайти її локальні екстремуми на (a;b) і порівняти їх із значеннями $f(a)$, $f(b)$. Найменше (найбільше) із цих значень і буде найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на відрізку [a;b].

Може статися, що функція $f(x)$ на (a;b) зовсім не має точок екстремуму. В цьому випадку її найменше (найбільше) значення буде серед значень $f(a)$ і $f(b)$.

При практичній роботі слід мати на увазі, що оскільки найменше (найбільше) значення досягається в критичних точках або на кінцях відрізку, то не потрібно перевіряти достатні умови наявності екстремуму функції в критичних точках. Досить лише знайти значення функції в усіх критичних точках і порівняти їх із значеннями $f(a)$, $f(b)$. Найменше (найбільше) з них і буде найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на [a;b].

Приклад 4. З пункту А, який лежить на лінії прямолінійної залізниці, в пункт В, що знаходиться від цієї лінії на відстані l, потрібно перевозити вантажі.

Вартості перевозу одиниці вантажу на одиницю відстані залізницею і дорогою дорівнюють відповідно m і n $(m < n)$. До якої точки M лінії залізниці слід прокласти дорогу, щоб транспортування вантажу з A до B було найбільш економічним?

Нехай $AB = s, \quad BC = l, \quad a \quad CM = x$,

тоді $CA = \sqrt{s^2 - l^2}, \quad MA = \sqrt{s^2 - l^2} - x \quad і \quad BM = \sqrt{l^2 + x^2}$ (рис.54а). Вартість перевезення k одиниць вантажу по дорозі BM складе $kn\sqrt{l^2 + x^2}$, залізницею MA - відповідно $km(\sqrt{s^2 - l^2} - x)$. Загальна вартість $Q(x)$ транспонування вантажу

Рис.54

$Q(x) = kn\sqrt{l^2 + x^2} + km(\sqrt{s^2 - l^2} - x)$.

Знайдемо найменше значення цієї функції при $x \in (0; \sqrt{s^2 - l^2})$.

Беручи похідну

$$Q'(x) = \frac{knx}{\sqrt{l^2 + x^2}} - km = \frac{k\left(nx - m\sqrt{l^2 + x^2}\right)}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

і прирівнюючи її до нуля, отримаємо рівняння $nx - m\sqrt{l^2 + x^2} = 0$, розв’язок якого визначає єдину критичну точку $x_0 = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$. Легко перевірити, що похідна в цій точці змінює знак з мінуса на плюс. Отже, якщо $\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} < \sqrt{s^2 - l^2}$, тобто CM<CA, то при $x = x_0 = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ вартість транспортування вантажу з A в B найменша.

Якщо ж при $\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} \geq \sqrt{s^2 - l^2}$, тобто $CM \geq CA$ (рис.54б), то дорогу слід, очевидно, прокласти вздовж прямої BA.

4.4 Опуклість, угнутість та точки перегину кривої

Відносно функції $f(x)$, графік якої подано на рис.55 , припускається, що вона має неперервну другу похідну.

Визначення 1. *Крива зветься опуклою (угнутою) в деякий точці M, якщо в околі цієї точки лежить під (над) дотичною, проведеною в точці M* (на рис.55 в точці M_1 крива опукла, M_2 - угнута).

Крива зветься опуклою (угнутою) на деякому проміжку, якщо вона опукла (угнута) в усіх точках цього проміжку.

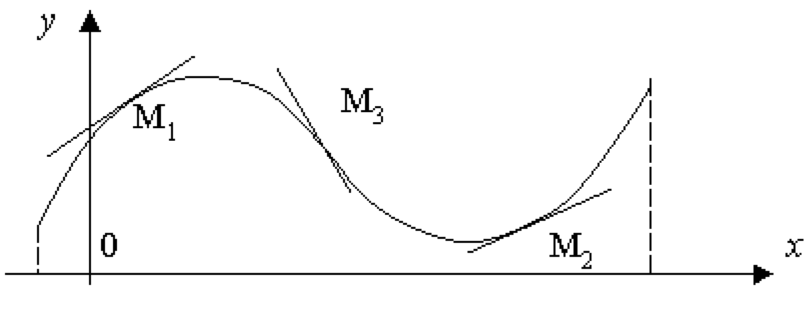

Рис. 55

При побудові графіка дуже важливо знати, на яких проміжках графік функції $f(x)$ опуклий і на яких він угнутий.

Теорема 5. Якщо на проміжку (a;b) друга похідна функції від'ємна, то крива $y = f(x)$ опукла на цьому проміжку; якщо ж $f''(x)$ додатна на (a;b), то крива угнута.

Представимо лише деякі міркування геометричного характеру. Якщо скрізь на проміжку (a;b), $f''(x) < 0$, то це означає, що сама функція, тобто $f'(x)$ - спадна. Отже, спадає на розглянутому проміжку кутовий коефіцієнт дотичної ($tg\alpha$) до кривої і, звичайно, спадає й кут α, утворюваний дотичною з віссю OX (рис. 56)

Очевидно, крива в усіх точках проміжку (a;b), розташована під дотичною, тобто вона опукла.

Якщо $f''(x) > 0$, то такі ж геометричні міркування доводять, що крива буде угнутою (рис. 77).

Визначення. Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від угнутої чи навпаки, зветься точкою перегину кривої.

На рис. точка M_3 є точкою перегину. У точках перегину дотична перетинає криву, бо з одного боку від цієї точки крива лежить під дотичною, а з другого боку - над нею.

Теорема. Якщо друга похідна функції $f(x)$ в деякій точці $x = x_0$ стає $(f''(x_0) = 0)$, а при переході через цю точку змінює знак, то точка кривої з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Доведення. Припустимо, що в точці М з абсцисою $x = x_0$ $f''(x_0)$ і змінює знак, наприклад, з плюса на мінус. Тоді ліворуч від М крива угнута $(f''(x) > 0)$, а праворуч – крива опукла $(f''(x) < 0)$. Отже, в точці М крива змінює угнутість на опуклість, а точка М є точкою перегину.

Приклад 5. Знайти точки перегину та визначити проміжки опуклості та угнутості кривої $y = x^3$.

Маємо $y' = 3x^2, \quad y'' = 6x$.

Друга похідна стає нулем при $x = 0$. Якщо $x < 0$, то $y'' < 0$;
коли $x > 0, \quad y'' > 0$.

Таким чином, на проміжку $(-\infty;0)$ графік опуклий, а на проміжку $(0;\infty)$ - угнутий. Точка кривої з абсцисою $x=0$ є точкою перегину.

Приклад 6. Дослідити на точки перегину криву $y=x^4$.

Маємо $y'=4x^3, \quad y''=12x^2$. При $x=0 \quad y''=0$. Досліджуємо зміну знака. При $x<0, \quad y''>0$ (крива угнута), при $x>0, \quad y''>0$ (крива теж угнута). Друга похідна не змінює знака, крива не має точок перегину.

3.5. Асимптоти. Дослідження графіка функції в цілому

При вивчені поведінки функції, якщо $x \to +\infty(-\infty)$ або поблизу точок розриву другого роду, часто трапляється, що графік функції як завгодно близько наближається до тієї чи іншої прямої. Ці прямі називаються *асимптотами*.

Визначення . Пряма $x=a$ називається вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ нескінченна. Наприклад, пряма $x=3$ - вертикальна асимптота графіка функції $y=\dfrac{1}{x-3}$, оскільки

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=+\infty, \quad \lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}=-\infty.$$

Визначення . Пряма $y=kx+b$ називається *похилою асимптотою графіка функції* $y=f(x)$ при $x \to +\infty(-\infty)$, якщо

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx-b]=0\right).$$

Теорема . Для того щоб пряма $Y=kx+b$ була похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x \to +\infty(-\infty)$, необхідно й достатньо, щоб існували границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b\right)$$

Доведення. ***Необхідність.*** Для конкретності розглядатимемо випадок, коли $x \to +\infty$. Нехай $Y = kx + b$ - похила асимптота графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Оскільки

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x}; \qquad f(x) - kx = [f(x) - kx - b] + b,$$

то в силу визначення ,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

Достатність. Нехай існують границі, вказані в теоремі. Тоді з другої границі випливає, що $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$, а тому пряма $Y = kx + b$ дійсно є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

При дослідженні графіка функції в цілому рекомендується, наприклад, схема, за якою слід знайти:

1. область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2. асимптоти графіка функції;
3. точки локального екстремуму функції;
4. проміжки монотонності функції;
5. точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

Враховуючи дослідження, побудувати графік функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями функції. При розв'язанні конкретної задачі окремі пункти можна дещо розширити, а деякі можуть виявитися зайвими.

§ 5 Застосування похідної в економічній теорії.

Розглянемо деякі приклади застосування похідної в економічній теорії. Звернемо увагу на те, що багато, в тому числі і базові закони теорії виробництва і споживання, попиту і пропозиції є прямим наслідком математичних теорем, сформульованих в даній главі.

Спочатку розглянемо економічну інтерпретацію теореми Ферма.

Один із базових законів теорії виробництва є таким: оптимальний для виробника рівень випуску товару визначається рівністю граничних витрат і граничного доходу.

Тобто рівень випуску x_0 є оптимальним для виробника, якщо $MS(x_0) = MD(x_0)$, де MS – граничні витрати, а MD – граничний доход. Позначимо функцію прибутку за $C(x)$. Тоді $C(x) = D(x) - S(x)$. Очевидно, що оптимальним рівнем виробництва є той, при якому прибуток максимальний, тобто таке значення випуску x_0, при якому функція $C(x)$ має екстремум (максимум). За теоремою Ферма в цій точці $C'(x) = 0$. Оскільки $C'(x) = D'(x) - S'(x)$, тоді $D'(x_0) = S'(x_0)$, тобто $MD(x_0) = MS(x_0)$.

Друге важливе поняття теорії виробництва – це рівень найбільш економічного виробництва, при якому середні витрати по виробництву товару мінімальні. Відповідний економічний закон твердить: рівень найбільш економічного виробництва визначається рівністю середніх і граничних витрат.

Отримаємо цю умову як наслідок теореми Ферма. Середні витрати $AS(x)$ визначаються як $\frac{S(x)}{x}$, тобто витрати по виробництву товару поділені на вироблену його кількість. Мінімум цієї величини досягається в критичній точці функції $y = AS(x)$, тобто за умови

$$AS'(x) = \frac{S'x - S}{x^2} = 0,$$

звідси $S'x - S = 0$ або $S' = \frac{S}{x}$, тобто $MS(x) = AS(x)$.

Поняття випуклості функції також знаходить свою інтерпретацію в економічній теорії.

Один з найбільш відомих економічних законів – закон спадаючої дохідності – формулюється таким чином: зі збільшенням виробництва додаткова продукція, отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного, і т.ін.), з деякого моменту спадає.

Іншими словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δx - приріст ресурсу, а Δy - приріст випуску продукції, зменшується при зростанні x. Таким чином, закон спадаючої дохідності формулюється так: функція $y = f(x)$, яка виражає залежність випуску продукції від вкладеного ресурсу, є функцією, випуклою вверх.

Другим базисним поняттям економічної теорії є функція корисності $U = U(x)$, де x - товар, а U - корисність. Ця величина дуже суб'єктивна для кожного окремого споживача, але достатньо об'єктивна для суспільства в цілому. Закон спадаючої корисності стверджується таким чином: із ростом кількості товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці із деякого моменту спадає. Очевидно, цей закон можна переформулювати так: функція корисності є функцією випуклою вверх. В такій постановці закон спадаючої корисності є відправною точкою для математичного дослідження теорії попиту і пропозиції.

Приклад 7. Виробник реалізує свою продукцію по ціні р за одиницю, а витрати при цьому задаються кубічною залежністю

$$S(x) = ax + \lambda x^3 (a < p, \lambda > 0).$$

Знайти оптимальний для виробника обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток.

Позначимо обсяг продукції, що випускається через x. Складемо функцію прибутку

$$C(x) = px - (ax + \lambda x^3),$$

де px - доход від продукції, що реалізується.

1. Знаходимо $C'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2$.
2. Знаходимо критичні точки: $C'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2 = 0$, звідки $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ (другу критичну точку $x_2 = -\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ не розглядаємо за змістом задачі).
3. Знаходимо $c''(x) = -b\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$: $C''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) < 0$ (в даному

випадку $C''(x) < 0$ при будь-якому $x > 0$), отже, при $x = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток $C(x)$ максимальний.

4. Знаходимо максимум функції (тобто максимальний розмір прибутку)

$$C_{max} = \left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = \frac{(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

Приклад 8. Капітал в 1 млрд. гривень може бути розміщений в банку під 50% річних або інвестований у виробництво, причому ефективність вкладу очікується в розмірі 100%, а витрати задаються квадратичною залежністю. Прибуток обкладається податком в р%. При яких значеннях р вклад у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу в банку?

Нехай x (млрд. гривень) інвестується у виробництво, а $(1-x)$ - розміщується під проценти. Тоді розміщений капітал через рік стане дорівнювати

$$(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x,$$

а капітал, вкладений у виробництво $x\left(1+\frac{100}{100}\right) = 2x$. Витрати складуть ax^2, тобто прибуток від вкладу у виробництво $C = (2x - a^2)$. Податки складуть $(2x - ax^2)\frac{p}{100}$, тобто чистий прибуток стане дорівнювати

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x - ax^2).$$

Загальна сума через рік складе:

$$A(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + \left(1-\frac{p}{100}\right)(2x - ax^2) = \frac{3}{2} + \left[2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]x - a\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2.$$

Потрібно знайти максимальне значення цієї функції на відрізку [0,1].

Маємо

$$A'(x) = 2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)x$$

і

$A'(x) = 0$ при $$x_0 = \frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)};$$

$$A''(x) = -2a\left(1-\frac{p}{100}\right) < 0,$$

тобто згідно другої достатньої умови екстремуму x_0 - точка максимуму.

Щоб x_0 належало відрізку [0,1], необхідно виконання умови

$0 < 2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2} < 1$ або $p < 25$.

Таким чином, якщо, $p > 25$, то вигідніше нічого не вкладати у виробництво і розмістити увесь капітал у банку. Якщо, $p < 25$, тоді можна показати, що при $x = x_0$

$$A(x_0) = \frac{3}{2}+\frac{\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1-\frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$

тобто вклад у виробництво є більш вигідним, ніж чисте розміщення під проценти.

§ 5. Розв’язки задач

Приклад 9. Визначити проміжки монотонності функції

$f(x) = -\frac{x^3}{6} + 8x + 1$.

Область визначення $(-\infty, \infty)$.

Знаходимо похідну $f'(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$ і розв'язуємо нерівності $-\frac{x^2}{2} + 8 > 0$ та $-\frac{x^2}{2} + 8 < 0$. При $|x| < 4$ похідна $f'(x) > 0$, а при $|x| > 2$ похідна $f'(x) < 0$.

Отже, в інтервалі (-4,4) функція зростає, а в інтервалі $(-\infty;2);(2;\infty)$ функція спадає.

Приклад 10. Дослідити на екстремум функцію

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad y = (x-5)e^x$.

а) Область визначення $(-\infty, \infty)$. Знаходимо $f'(x)$ і визначаємо критичні точки

$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$;

$1 - x^2 = 0$;

$x^2 = 1$.

Отже, $x_1 = 1; \quad x_2 = -1$.

Застосовуючи перше правило дослідження на екстремум, будуємо таблицю

X	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,1)	1	$(1,+\infty)$

y'	-	0	+	+	-
Y		min $y=-\frac{1}{2}$		max $y=\frac{1}{2}$	

б) Область визначення $(-\infty,\infty)$. Знаходимо похідну $y'=(x-4)e^x$.

Прирівнюємо її до нуля і знаходимо стаціонарну точку:

$e^x(x-4)=0; \quad x=4$.

Застосовуючи друге правило, знайдемо другу похідну і отримаємо

$f''(x)=(x-3)e^x$.

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарній точці. При $x=4$ маємо

$y''(4)=(4-3)e^4>0$,

отже згідно достатньої умови другого типу в точці $x=4$ функція має мінімум

$Y_{\min}=(4-5)e^4=-e^4$.

Приклад 11. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=3x-x^3$ на відрізку [-2,3].

$D(f)=R$. Знаходимо похідну

$f'(x)=3-3x^2$;

$3-3x^2=0$,

тобто $x=\pm 1$ - стаціонарні точки.

Визначаємо значення функції в цих точках $f(1)=2; \quad f(-1)=-2$.

Обчислюємо значення даної функції на границях проміжку: $f(-2)=2; \quad f(3)=-18$.

Із отриманих чотирьох значень вибираємо найбільше і найменше. Отже, найбільше значення функції на заданому відрізку дорівнює 2, а найменше дорівнює -18.

Приклад 12. Знайти точку перегину і інтервали випуклості функції

$f(x)=arctgx$.

Знаходимо похідну $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ та другу похідну $f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ і будуємо таблицю, враховуючи, що $f''(x)=0$ при $x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	+	0	-
y	$\cup$	~	$\cap$

Отже, на проміжку $(-\infty,0)$ графік функції - угнутий, а на проміжку $(0,+\infty)$ - опуклий. Точка $x=0$, в якій друга похідна змінює знак з "+" на "-" - точка перегину графіка.

Приклад 13. Знайти асимптоти кривих а) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

а) Досліджувана функція має вертикальну асимптоту $x=-2$. Очевидно,

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\infty; \quad \lim_{x\to -2-0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=-\infty,$$

функція має розрив другого роду.

Знаходимо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = 1$$;

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right] = -4$$

Отже, $y = x - 4$ являється похилою асимптотою кривої

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

б) Очевидно, вертикальних асимптот крива $y = x^2 e^{-x}$ не має.
Якщо $x \to \infty, \quad y \to 0$. Отже вісь Ох є горизонтальною асимптотою даної кривої.
Дослідимо наявність похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Отже, є тільки горизонтальна асимптота $y = 0$.

Приклад 14. Дослідити функцію

$$y = x^2 e^{-x^2}$$

І побудувати її графік.

1. Область визначення $(-\infty; \infty)$. Функція парна, оскільки $f(-x) = f(x)$ і графік її симетричний відносно осі ординат.

2. Вертикальних асимптот немає, оскільки функція визначена при всіх дійсних значеннях х.

Поведінка функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

В силу парності функції $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, тобто пряма $y = 0$ (вісь абсцис) – горизонтальна асимптота.

3. Екстремуми і інтервали монотонності:

$y' = 2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(x - x^3)$;

$y' = 0$ при $x - x^3 = 0$;

$$x(1 - x^2) = 0$$
$$x = \pm 1, x = 0,$$

тобто критичні точки $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$.

Таким чином $x = -1$ є точка максимуму, $x = 0$ - точка мінімуму, $x = 1$ - точка максимуму.

$$f_{\max} = f(-1) = \frac{1}{e},$$
$$f_{\min} = f(0) = 0,$$
$$f_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}.$$

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(0;1)$ і спадає на (-1;0) і $(1;+\infty)$.

4. Інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину:

$$y'' = 2e^{-x^2}(-2x)(x-x^3) + 2e^{-x^2}(1-3x^2) = 2e^{-x^2}(2x^4-5x^2+1).$$

$y''=0$ при $x = \pm\dfrac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$.

Таким чином, функція опукла на інтервалах

$\left(-\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2},\quad -\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2},\quad \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right)$

і вгнута на інтервалах

$\left(-\infty,\quad -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2},\quad \infty\right)$

а $x = \pm\dfrac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$ - точки перетину.

5. $f(0)=0$. Рівняння $f(x)=0$ має єдиний розв'язок x=0, тобто графік функції проходить через початок координат.

Приклад 15. Дослідити функцію

$$y = \frac{x^2-5}{x-3}$$

і побудувати її графік.

1. Область визначення $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Дана функція не являється ні парною, ні непарною.

2. Досліджувана функція має вертикальну асимптоту x=3.. Очевидно,

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-5}{x-3}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-5}{x-3}=-\infty,$$

отже в точці x=3 функція має розрив другого роду. Далі

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-5}{x-3}=+\infty,\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-5}{x-3}=-\infty.$$

Знаходимо похилу асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5}{x(x-3)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5}{x-3}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-5}{x-3}=3.$$

Отже, y=x+3 являється похилою асимптотою кривої $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

3. Обчислимо похідну функції $y'=\frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$ і розв’яжемо рівняння $y'=0$:

x=5, x=1.

Досліджуючи знак похідної, складаємо таблицю

X	$(-\infty,1)$	1	(1,3)	(3,5)	5	$(5,+\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+

Y		max $y = 2$			min $y = 10$	

4. Знаходимо другу похідну

$$y'' = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Бачимо, що рівняння $y'' = 0$ коренів не має, отже точок перегину не існує. Будуємо таблицю:

X	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
y''	-	+
Y	$\cap$	$\cup$

5. Рівняння $f(x) = 0$, тобто $\frac{x^2 - 5}{x - 3} = 0$ має два корені $x = \pm\sqrt{5}$, тобто графік перетинає вісь абсцис в точках $x_1 = -\sqrt{5}, \quad x_2 = \sqrt{5}$.

На підставі добутих даних будуємо графік функції